11. Opérateurs autoadjoints non bornés

11.1. Opérateurs non bornés

Préliminaires algébriques

Dans cette sous-section il ne sera question que d'algèbre linéaire : pas un poil de topologie. Soient X et Y deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; une *application linéaire partiellement définie* (un peu plus loin, on dira un *opérateur*) T de X dans Y est donnée par un sous-espace vectoriel dom(T) de X appelé *domaine* de T et par une application linéaire (usuelle) $\mathrm{L_T}$ de dom(T) dans Y.

Autrement dit, la donnée T est celle de $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{dom(T)}, \mathrm{L_T})$. Le *graphe* de T est le sous-espace vectoriel du produit $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ égal à $\mathrm{Gr(T)} = \{(x, \mathrm{L_T}(x)) : x \in \mathrm{dom(T)}\}$. On va voir que T est complètement déterminé par Gr(T), qui est un sous-espace vectoriel G de $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$, avec la propriété $\big((0_\mathrm{X}, y) \in \mathrm{G}\big) \Rightarrow (y = 0_\mathrm{Y})$.

Dans la suite, pour tout $x \in \mathrm{dom(T)}$ on posera $\mathrm{T}(x) = \mathrm{L_T}(x)$ et on ne fera plus la distinction entre $\mathrm{L_T}(x)$ et $\mathrm{T}(x)$. On laissera donc tomber complètement $\mathrm{L_T}$. Si T est une application linéaire partiellement définie, le *graphe* de T est donc le sous-espace vectoriel du produit $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ égal à $\mathrm{Gr(T)} = \{(x, \mathrm{T}(x)) : x \in \mathrm{dom(T)}\}$. La restriction à Gr(T) de la première projection est injective. Réciproquement, appelons *graphe partiel* tout sous-espace vectoriel G de $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ tel que la restriction de la première projection à G soit injective. Autrement dit, si $(x, y) \in \mathrm{G}$ et $(x, y') \in \mathrm{G}$, alors $y = y'$; ou encore : si $(0, y) \in \mathrm{G}$, alors $y = 0$. On voit que tout graphe partiel est le graphe d'une unique application linéaire partiellement définie T. La correspondance qui à T associe son graphe est une correspondance bijective entre applications linéaires partiellement définies et graphes partiels :

> soit $\mathrm{G} \subset \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ un graphe partiel. Notons $p_1 : \mathrm{G} \to \mathrm{X}$ et $p_2 : \mathrm{G} \to \mathrm{Y}$ les projections et définissons un opérateur T en posant $\mathrm{dom(T)} = p_1(\mathrm{G})$ et $\mathrm{T}(p_1(z)) = p_2(z)$ pour tout $z \in \mathrm{G}$. Il est clair que $\mathrm{Gr(T)} = \mathrm{G}$. Comme le noyau de la première projection de $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ dans X est le sous-espace $\{0\} \times \mathrm{Y}$ de $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$, la correspondance entre opérateur et graphe partiel est bijective.

Désormais on dira *opérateur* au lieu d'application linéaire partiellement définie. On appelle *noyau* de T le sous-espace $\ker(\mathrm{T}) = \{x \in \mathrm{dom(T)} : \mathrm{T}(x) = 0\}$ de X et *image* de T le sous-espace $\mathrm{im(T)} = \mathrm{T(dom(T))}$ de Y. On appelle *extension* d'un opérateur T tout opérateur S tel que $\mathrm{Gr(T)} \subset \mathrm{Gr(S)}$. On écrit alors $\mathrm{T} \subset \mathrm{S}$.

Soient T un opérateur et D un sous-espace vectoriel de dom(T) ; on note $\mathrm{T}_{|\mathrm{D}}$ l'opérateur tel que $\mathrm{T}_{|\mathrm{D}} \subset \mathrm{T}$ et $\mathrm{dom}(\mathrm{T}_{|\mathrm{D}}) = \mathrm{D}$.

Soient S et T deux opérateurs de X dans Y ; on définit l'opérateur $\mathrm{S} + \mathrm{T}$ en posant $\mathrm{dom(S + T)} = \mathrm{dom(S)} \cap \mathrm{dom(T)}$ et en posant $(\mathrm{S} + \mathrm{T})(x) = \mathrm{S}(x) + \mathrm{T}(x)$ pour tout vecteur $x \in \mathrm{dom(S + T)}$. Si R, S et T sont des opérateurs de X dans Y, on a clairement $\mathrm{R} + \mathrm{S} = \mathrm{S} + \mathrm{R}$ et $(\mathrm{R} + \mathrm{S}) + \mathrm{T} = \mathrm{R} + (\mathrm{S} + \mathrm{T})$.

Si S est une application linéaire usuelle de X dans Y, elle définit un opérateur de la façon la plus évidente : on pose $\mathrm{dom(S)} = \mathrm{X}$ et $\mathrm{S}(x) \in \mathrm{Y}$ aura le sens habituel pour tout $x \in \mathrm{X}$; si T est un opérateur de X dans Y, le domaine de $\mathrm{S} + \mathrm{T}$ sera égal à celui de

l'opérateur T. Cette remarque sera utilisée lorsque $X = Y$ et $S = \lambda\,\mathrm{Id}_X$, pour introduire l'opérateur $T - \lambda\,\mathrm{Id}_X$, de même domaine que T.

Soient X, Y et Z des espaces vectoriels, T un opérateur de X dans Y et S un opérateur de Y dans Z ; on définit la composition ST de ces deux opérateurs en posant d'abord $\mathrm{dom}(ST) = \{x \in \mathrm{dom}(T) : T(x) \in \mathrm{dom}(S)\}$ et en posant $(ST)(x) = S(T(x))$ pour tout $x \in \mathrm{dom}(ST)$. Si R est un opérateur de Z dans un quatrième espace vectoriel H, on a $(RS)T = R(ST)$. De plus, si T est un opérateur de X dans Y et si R et S sont des opérateurs de Y dans Z, on a $(R + S)T = RT + ST$. Cependant, si R et S sont des opérateurs de X dans Y et T est un opérateur de Y dans Z, on a $TR + TS \subset T(R + S)$ sans avoir en général l'égalité.

L'attitude habituelle quand on travaille avec les opérateurs bornés continus est d'essayer de les prolonger le plus vite possible à l'espace complet convenable (penser à la transformation de Fourier, qui est définie sur $L_1(\mathbb{R})$ par la formule intégrale usuelle ; on appelle aussi transformation de Fourier son extension par continuité à l'espace $L_2(\mathbb{R})$). Pour comprendre les définitions de ce paragraphe, il faut se dire qu'on adopte l'attitude radicalement opposée : ici, on ne prend **aucune** initiative de prolongement ; si T_1 est défini sur D_1 et T_2 sur D_2, la seule chose que nous sommes obligés d'admettre est que les deux sont définis sur $D_1 \cap D_2$. On ne cherche surtout pas à aller plus loin.

Exemples 11.1.1.

A. On prend $X = Y = L_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{dom}(T)$ est l'espace des fonctions C^1 à support compact et on pose $T(f) = f'$ pour $f \in \mathrm{dom}(T)$.

B. Cet exemple se décline en trois variantes.

– B1 : on prend $X = Y = L_2([0,1])$, $\mathrm{dom}(T_1)$ est l'espace des fonctions C^1 sur $[0,1]$ et $T_1(f) = f'$ pour $f \in \mathrm{dom}(T_1)$.

– B2 : on prend $X = Y = L_2([0,1])$, $\mathrm{dom}(T_2)$ est l'espace des fonctions f qui sont C^1 sur $[0,1]$ et telles que $f(0) = f(1) = 0$, et $T_2(f) = f'$ pour $f \in \mathrm{dom}(T_2)$.

– B3 : on prend $X = Y = L_2([0,1])$, $\mathrm{dom}(T_3)$ est l'espace des fonctions f qui sont C^1 sur $[0,1]$ et telles que $f(0) = f(1)$, et $T_3(f) = f'$ pour $f \in \mathrm{dom}(T_3)$.

Ça a l'air de pinaillages ridicules, mais on verra plus loin à propos des adjoints qu'il y a des différences importantes dans les propriétés de T_1, T_2 et T_3.

Un opérateur T de X dans Y est dit *injectif* si l'application $T : \mathrm{dom}(T) \to Y$ est injective. Soit T un opérateur injectif de X dans Y ; le sous-ensemble de $Y \times X$ égal à $\{(y,x) \in Y \times X : (x,y) \in \mathrm{Gr}(T)\}$ est le graphe d'un opérateur T^{-1} (de domaine $\mathrm{im}(T)$) appelé *inverse* de T. Clairement T^{-1} est injectif et $(T^{-1})^{-1} = T$. Si $T : X \to Y$ et $S : Y \to G$ sont injectifs, alors ST est injectif et $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.

Exemple 11.1.2. Considérons $X = Y = L_2(0,1)$; soit V l'opérateur borné de "primitive nulle en 0", $(Vf)(t) = \int_0^t f(s)\,ds$, et posons $D = \mathrm{im}(V)$. On a vu que V est injectif (exemples 7.3.2). On peut donc définir l'opérateur $T = V^{-1}$ de domaine D en posant pour tout $g \in D$

$$(Tg = f) \Leftrightarrow (Vf = g).$$

Cet opérateur T est donc injectif lui-aussi.

La topologie revient

Soient E et F deux espaces de Banach ; un opérateur T de E dans F est dit *densément défini* si son domaine dom(T) est dense dans E.

Définition 11.1.3. Soient E et F deux espaces de Banach ; un opérateur de E dans F est dit *fermé* si son graphe est un sous-espace fermé de $E \times F$. Un opérateur de E dans F est dit *fermable* s'il admet une extension fermée.

Exemple 11.1.4. Reprenons l'opérateur borné V de $L_2([0,1])$ dans lui-même et son inverse non borné V^{-1} de l'exemple 2 ; le domaine de V^{-1} est im(V) ; on a vu que im(V) est dense (exemples 7.3.2), donc V^{-1} est densément défini. Puisque V est continu, son graphe est fermé, donc V^{-1} est fermé puisque son graphe s'obtient à partir de celui de V par l'homéomorphisme $(x,y) \to (y,x)$ de $L_2 \times L_2$ sur lui-même.

Soit S une extension fermée de l'opérateur T ; alors Gr(S) contient Gr(T), donc son adhérence $\overline{\mathrm{Gr(T)}}$. Il s'ensuit qu'un opérateur T est fermable si et seulement si $\overline{\mathrm{Gr(T)}}$ est le graphe d'un opérateur. On appellera *fermeture* de l'opérateur T l'opérateur $\overline{\mathrm{T}}$ tel que $\mathrm{Gr}(\overline{\mathrm{T}}) = \overline{\mathrm{Gr(T)}}$. En particulier, pour que l'opérateur T soit fermable il faut et il suffit que l'on ait $\overline{\mathrm{Gr(T)}} \cap (\{0\} \times \mathrm{F}) = \{(0,0)\}$. On en déduit immédiatement :

Proposition 11.1.1. *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach et* T *un opérateur de* E *dans* F *; pour que l'opérateur* T *soit fermable il faut et il suffit que pour toute suite* (x_n) *de* dom(T) *qui converge vers* 0 *dans* E *et telle que* $\mathrm{T}(x_n)$ *converge dans* F *vers un vecteur* y*, on ait* $y = 0$.

Exemple 11.1.5. Fermetures des opérateurs T, T_1, T_2 et T_3 de l'exemple 1. Commençons par l'opérateur T de l'exemple **A**, défini sur $L_2(\mathbb{R})$. On va montrer que T est fermable et isoler un candidat pour la fermeture.

Supposons que (f,g) soit dans l'adhérence de Gr(T) ; il existe une suite $(f_n) \subset \mathrm{C}^1_{\mathrm{comp}}$ telle que $f_n \to f$ dans L_2 et $f_n' \to g$ dans L_2. Quitte à passer à une sous-suite on peut supposer qu'il existe $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{R} \setminus \mathrm{E}$ soit négligeable et tel que $f_n(t)$ converge vers $f(t)$ pour tout $t \in \mathrm{E}$. En particulier, E est non vide, et il est même dense dans $\mathbb{R}$. Fixons $a \in \mathrm{E}$, et soit $t \in \mathrm{E}$; pour tout n on a

$$f_n(t) = f_n(a) + \int_a^t f_n'(s)\,ds,$$

et la convergence dans L_2 implique la convergence des intégrales sur les segments bornés, donc compte tenu de tout

$$f(t) = f(a) + \int_a^t g(s)\,ds.$$

Mais la fonction $\mathrm{G}(t) = \int_a^t g(s)\,ds$ est continue pour tout t, et on peut redéfinir f sur l'ensemble négligeable $\mathbb{R} \setminus \mathrm{E}$ par la formule $f(t) = f(a) + \int_a^t g(s)\,ds$. Il en résulte que f est continue, et qu'il existe une fonction $g \in L_2$ telle que

$$\forall t < u, \quad f(u) = f(t) + \int_t^u g(s)\,ds.$$

On introduit l'ensemble

$$\mathrm{G}_{\mathbf{A}} = \{(f,g) \in L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R}) : \forall t < u, \quad f(u) = f(t) + \int_t^u g(s)\,ds\}$$

(pour être vraiment correct, on devrait dire : l'ensemble des couples (f,g) tels que la classe f admette un représentant $\tilde{f}$ pour lequel, pour tous $t<u$, on ait $\tilde{f}(u)=\dots$). On vient de montrer que l'adhérence de Gr(T) est contenue dans $\mathrm{G}_{\mathbf{A}}$; pour savoir que T est fermable, il suffit de voir que $\mathrm{G}_{\mathbf{A}}$ est un graphe : c'est clairement un espace vectoriel, et si $(0,g)\in\mathrm{G}_{\mathbf{A}}$, on aura $\int_t^u g=0$ pour tous $t<u$, ce qui signifie que g est orthogonale à toutes les fonctions en escalier, qui sont denses dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, donc $g=0$, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 11.1.6. Montrer que l'adhérence du graphe de T est *égale* à $\mathrm{G}_{\mathbf{A}}$.

On appelle $\mathrm{H}_1(\mathbb{R})$ (espace de Sobolev) l'espace des fonctions $f\in\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ telles qu'il existe $g\in\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ telle que $(f,g)\in\mathrm{G}_{\mathbf{A}}$. On dit que g est la *dérivée généralisée* de f, et on note simplement $g=f'$. La fermeture de T de l'exemple 1, $\mathbf{A}$ est donc l'opérateur $\overline{\mathrm{T}}$ de $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même dont le domaine est $\mathrm{H}_1(\mathbb{R})$ et qui est défini par $\overline{\mathrm{T}}(f)=f'$ pour $f\in\mathrm{H}_1(\mathbb{R})$.

On définit de même l'espace $\mathrm{H}_1([0,1])$ des fonctions $f\in\mathrm{L}_2([0,1])$ (en fait f sera continue) pour lesquelles existe une fonction $g\in\mathrm{L}_2([0,1])$ telle que $f(t)=f(0)+\int_0^t g(s)\,ds$, pour tout $t\in[0,1]$. Si on se rappelle l'opérateur-exemple V de $\mathrm{L}_2([0,1])$ dans lui-même qui associe à chaque $g\in\mathrm{L}_2([0,1])$ sa "primitive" nulle en zéro, on voit que $\mathrm{H}_1([0,1])$ est égal à $\mathrm{im}(\mathrm{V})+\mathbb{K}1$. On peut vérifier que les fermetures des variantes B1, B2, B3 sont définies sur les domaines

- 1 : $f\in\mathrm{H}_1([0,1])$
- 2 : $f\in\mathrm{H}_1([0,1])$ et $f(0)=f(1)=0$
- 3 : $f\in\mathrm{H}_1([0,1])$ et $f(0)=f(1)$.

Dans les trois cas $j=1,2,3$ la valeur de l'extension $\overline{\mathrm{T}}_j(f)$ est égale à f', la dérivée généralisée de f, quand f est dans le domaine de $\overline{\mathrm{T}}_j$.

Revenons sur la notion de dérivée généralisée. Avec Fubini on montre que si $f\in\mathrm{H}^1(\mathbb{R})$ et si φ est C^1 à support compact, on a

$$\int_{\mathbb{R}} f\varphi' = -\int_{\mathbb{R}} f'\varphi. \tag{D}$$

Supposons en effet que $[a,b]$ contienne le support de φ ; on a $f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\,dt$, donc

$$\int_{\mathbb{R}} f\varphi' = \int_a^b f(x)\varphi'(x) = f(a)\int_a^b \varphi'(x)\,dx + \int_a^b\int_a^b \mathbf{1}_{a<t<x<b} f'(t)\varphi'(x)\,dt\,dx =$$
$$\int_a^b \Big(\int_a^b \mathbf{1}_{a<t<x<b} f'(t)\varphi'(x)\,dx\Big)\,dt = \int_a^b f'(t)(\varphi(b)-\varphi(t))\,dt = -\int_{\mathbb{R}} f'\varphi.$$

En modifiant très légèrement ce qui précède, on obtient la formule d'intégration par parties dans $\mathrm{H}^1([a,b])$: si $f,g\in\mathrm{H}^1([a,b])$, on a

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = \Big[f(t)g(t)\Big]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt.$$

C'est la propriété (D) précédente qui permet d'étendre la définition de H^1 au cas de plusieurs dimensions. Par exemple, on dit que $f\in\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^2)$ si $f\in\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^2)$ et s'il existe deux fonctions $g_1,g_2\in\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^2)$ qui seront les *dérivées partielles faibles* de f, ce qui signifie que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^2} g_j(x)\varphi(x)\,dx$$

pour $j = 1, 2$ et pour toute fonction φ qui soit C^1 à support compact sur $\mathbb{R}^2$. Les fonctions de cet espace $H^1(\mathbb{R}^2)$ ne sont plus nécessairement continues, ni même bornées sur les compacts de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 11.1.2. *L'inverse d'un opérateur injectif fermé est fermé.*

Démonstration. Soient E et F deux espaces de Banach et T un opérateur fermé de E dans F ; on a $\mathrm{Gr}(T^{-1}) = \rho(\mathrm{Gr}(T))$ où $\rho : E \times F \to F \times E$ est l'homéomorphisme $(x, y) \to (y, x)$, donc $\mathrm{Gr}(T^{-1})$ est fermé.

//

Exemple 11.1.7. L'opérateur V^{-1} de l'exemple 2 est fermé et densément défini. Les opérateurs fermés et densément définis forment la classe la plus intéressante dans cette théorie.

Proposition 11.1.3. *Soient* E, F *et* G *des espaces de Banach ;*

(i) soient $S : E \to F$ *une application linéaire continue et* T *un opérateur de* E *dans* F *; pour que* $S+T$ *soit fermé il faut et il suffit que* T *le soit ; pour que* $S+T$ *soit fermable il faut et il suffit que* T *le soit et, dans ce cas* $\overline{S+T} = S + \overline{T}$ *;*

(ii) soient $S : E \to F$ *une application linéaire continue et* T *un opérateur fermé (resp. fermable) de* F *dans* G *; l'opérateur* TS *est fermé (resp. fermable) ;*

(iii) soient S *un opérateur fermé (resp. fermable) de* E *dans* F *et* $T : G \to F$ *une application linéaire continue injective ; l'opérateur* $T^{-1}S$ *est fermé (resp. fermable).*

Démonstration. Le graphe de $S + T$ est $\{(x, y) \in E \times F : (x, y - S(x)) \in \mathrm{Gr}(T)\}$; si T est fermé, cet ensemble est fermé. Si T est fermable, $S + T$ admet l'extension $S + \overline{T}$ qui est fermée par ce qui précède ; il en résulte que $S + T$ est fermable et $\overline{S+T} \subset S + \overline{T}$.

Remplaçant T par $T + S$ et S par $-S$ on trouve que si $T + S$ est fermé ou fermable il en va de même pour T et que, dans ce cas $\overline{T} \subset \overline{S+T} - S$; donc $S + \overline{T} \subset S + \overline{S+T} - S = \overline{S+T}$.

Si T est fermé, le graphe de TS est $\{(x, y) \in E \times G : (S(x), y) \in \mathrm{Gr}(T)\}$, donc est fermé. Si T est fermable, alors TS admet l'extension fermée $\overline{T}S$.

Si S est fermé, le graphe de $T^{-1}S$ est $\{(x, y) \in E \times G : (x, T(y)) \in \mathrm{Gr}(S)\}$, donc est fermé. Si S est fermable, alors $T^{-1}S$ admet l'extension fermée $T^{-1}\overline{S}$.

//

Soient E et F deux espaces de Banach et soit T un opérateur de E dans F ; on appelle *topologie du graphe* associée à l'opérateur T, la topologie sur dom(T) induite par l'injection $x \to (x, T(x))$ de dom(T) dans $E \times F$. Cette topologie est plus fine que celle induite par E et fait de dom(T) un espace complet si T est fermé.

Soient E et F deux espaces de Banach et T un opérateur fermable de E dans F ; un sous-espace D du domaine de T est appelé un *domaine essentiel* pour T si les opérateurs T et $T_{|D}$ ont même fermeture. Cela revient à dire que D est dense dans dom(T) pour la topologie du graphe.

11.2. Spectre des opérateurs fermés

Définition 11.2.1. Soient T un opérateur d'un espace de Banach complexe E dans lui même et $\lambda \in \mathbb{C}$; on dit que λ est une *valeur régulière* de T si $T - \lambda \,\mathrm{Id}_E$ est une application linéaire bijective de dom(T) sur E et si l'application linéaire réciproque définit une application linéaire *continue* de E dans lui même. On appelle *spectre* de T le complémentaire Sp(T) dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble des valeurs régulières de T.

Soit T un opérateur sur un espace de Banach complexe E ; désignons par Ω_T l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ qui sont valeur régulière de T ; pour $\lambda \in \Omega_T$, on pose

$$R_\lambda(T) = (T - \lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$$

et on appelle $R_\lambda(T)$ la *résolvante* de T.

Seuls les opérateurs fermés sont intéressants pour la théorie spectrale : en effet, si T admet une valeur régulière λ, l'opérateur $(T - \lambda \,\mathrm{Id}_E)^{-1}$ est continu donc à graphe fermé ; on en déduit que son inverse $T - \lambda \,\mathrm{Id}_E$ est fermé, et il en résulte facilement que T lui-même est fermé. Autrement dit : si T n'est pas fermé, T n'admet aucune valeur régulière, donc on a toujours $\mathrm{Sp}(T) = \mathbb{C}$.

Soit T un opérateur fermé d'un espace de Banach E dans lui-même ; remarquons que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'opérateur $T - \lambda \,\mathrm{Id}_E$ est fermé (par la proposition 1.3). Si $T - \lambda \,\mathrm{Id}_E$ est bijectif de dom(T) sur E, alors λ est une valeur régulière car $(T - \lambda \,\mathrm{Id}_E)^{-1}$ est fermé (proposition 1.2), donc continu par le théorème du graphe fermé (théorème 4.1.6).

Exemples 11.2.2.

1. Soit μ une mesure sur $\mathbb{C}$, positive et non nulle, donnant une mesure finie à tout compact ; on considère dans $L_2(\mu) = L_2(\mathbb{C}, \mu)$ l'application de multiplication par z, définie sur le domaine

$$D = \{f \in L_2(\mu) : \int_{\mathbb{C}} |z|^2 \, |f(z)|^2 \, d\mu(z) < +\infty\},$$

ce qui donne un opérateur, en général non borné, qu'on notera M, qui agit sur $f \in D$ par $(Mf)(z) = zf(z)$, et $Mf \in L_2(\mu)$. On peut décrire l'appartenance de f au domaine D en une seule formule,

$$\int_{\mathbb{C}} (1 + |z|^2) \, |f(z)|^2 \, d\mu(z) < +\infty.$$

On suppose d'abord que $\lambda \in \mathbb{C}$ est tel que pour tout $\varepsilon > 0$, on ait que $B = B(\lambda, \varepsilon)$ vérifie $\mu(B) > 0$. On peut considérer la fonction $f = \mathbf{1}_B$, qui est dans le domaine D, et qui n'est pas dans la classe nulle de $L_2(\mu)$ puisque $\mu(B) > 0$. On a $|(M - \lambda)f| = |z - \lambda| \, \mathbf{1}_B \leq \varepsilon \, \mathbf{1}_B$. Ceci montre que $\|(M - \lambda)f\|_2 \leq \varepsilon \, \|f\|_2$; si l'inverse $R_\lambda(M)$ de $M - \lambda \,\mathrm{Id}$ existait, il devrait vérifier $\|R_\lambda(M)\| \geq 1/\varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui est impossible. Il en résulte que $\lambda \in \mathrm{Sp}(T)$.

Remarquons en passant : si μ est la mesure de Lebesgue de $\mathbb{C}$, toutes les boules ouvertes sont de mesure > 0, donc le spectre de M est $\mathbb{C}$ tout entier dans ce cas (on a dit qu'on obtient aussi que $\mathrm{Sp}(T) = \mathbb{C}$ dans le cas dégénéré où T n'est pas fermé).

On suppose inversement que $\lambda \in \mathbb{C}$ est tel qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\mu(B(\lambda, \varepsilon_0)) = 0$. Considérons la fonction mesurable bornée g définie sur $\mathbb{C}$ par $g(z) = (z - \lambda)^{-1}$ si $|z - \lambda| \geq$

ε_0 et $g(z) = 0$ sinon. La multiplication M_g est bornée sur $\mathrm{L}_2(\mu)$ puisque g est bornée, et on va voir que $\mathrm{M}_g = \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{M})$. Si $f \in \mathrm{dom}(\mathrm{M})$, on voit que $\mathrm{M}_g(\mathrm{M}(f)-\lambda f) = g(z-\lambda)f$ est égale à f en dehors de B, et à 0 dans B ; mais puisque $\mu(\mathrm{B}) = 0$, on a bien $\mathrm{M}_g(\mathrm{M}(f) - \lambda f) = f$ en tant que classe. Inversement, si $h \in \mathrm{L}_2(\mu)$, on vérifie que $\mathrm{M}_g(h) \in \mathrm{dom}(\mathrm{M})$ (en effet,

$$\int_{\mathbb{C}} |z|^2 \, |(\mathrm{M}_g h)(z)|^2 \, d\mu(z) = \int_{\mathbb{C}} |z|^2 \, |g(z)h(z)|^2 \, d\mu(z) = \int_{\mathbb{C}} |zg(z)|^2 \, |h(z)|^2 \, d\mu(z) < +\infty$$

parce que $zg(z)$ est bornée sur $\mathbb{C}$) et ensuite $(\mathrm{M} - \lambda \, \mathrm{Id})(\mathrm{M}_g(h)) = h$. On a bien montré que $\mathrm{M}_g = \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{M})$.

En bref, le spectre de M est exactement l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ décrit précédemment, c'est à dire les λ dont tout voisinage a une μ-mesure > 0.

Si $\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \delta_{z_n}$, où (z_n) est une suite quelconque de points de $\mathbb{C}$, on déduit de ce qui précède que le spectre de M est l'adhérence F de l'ensemble des points de la suite. Cela nous permet de dire que tout fermé non vide de $\mathbb{C}$ est le spectre d'un opérateur. C'est vrai aussi pour l'ensemble vide, comme on le verra avec l'exemple qui suit.

2. Nous allons donc montrer maintenant que le spectre de l'opérateur $\mathrm{T} = \mathrm{V}^{-1}$ de l'exemple 1.2 est vide :

évidemment, 0 est valeur régulière de T et $\mathrm{R}_0(\mathrm{T}) = \mathrm{V}$. Pour $\lambda \neq 0$, cherchons à résoudre l'équation $\mathrm{T}x - \lambda x = y$, pour $y \in \mathrm{E}$ donné (on cherche $x \in \mathrm{D}$). Puisque T est surjectif, on peut écrire $y = \mathrm{T}z$, avec $z = \mathrm{V}(y) \in \mathrm{D}$. En appliquant V on trouve $x - \lambda \mathrm{V}x = z$, soit $\mathrm{V}x - \lambda^{-1}x = -\lambda^{-1}z$. On sait que λ^{-1} n'est pas dans le spectre de V (qui est réduit à $\{0\}$) donc on peut résoudre,

$$x = \mathrm{R}_{\lambda^{-1}}(\mathrm{V})(-\lambda^{-1}z) = -\lambda^{-1}\mathrm{R}_{\lambda^{-1}}(\mathrm{V})\,(\mathrm{V}y).$$

On vient donc d'identifier $\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}) = -\lambda^{-1}\mathrm{R}_{\lambda^{-1}}(\mathrm{V})\,\mathrm{V}$. Finalement, on constate que tout nombre complexe est valeur régulière de T, donc le spectre de $\mathrm{T} = \mathrm{V}^{-1}$ est vide.

Le spectre d'un opérateur T est réunion des trois ensembles disjoints suivants :

– le *spectre ponctuel* $\mathrm{Sp}_p(\mathrm{T})$ de T est l'ensemble de ses valeurs propres ;

– le *spectre résiduel* $\mathrm{Sp}_r(\mathrm{T})$ de T formé des $\lambda \in \mathbb{C}$ qui ne sont pas valeur propre de l'opérateur T et tels que l'image de $\mathrm{T} - \lambda \, \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ ne soit pas dense dans E ;

– le complémentaire $\mathrm{Sp}_c(\mathrm{T})$ dans $\mathrm{Sp}(\mathrm{T})$ de la réunion de ces deux ensembles appelé *spectre continu* de T.

Remarque 11.2.3. Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}_c(\mathrm{T})$, l'opérateur $\mathrm{T} - \lambda \, \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ est injectif d'image dense, mais $(\mathrm{T} - \lambda \, \mathrm{Id}_\mathrm{E})^{-1}$ n'est pas continu.

Lemme 11.2.1. *Soient* T *un opérateur injectif fermé d'un espace de Banach* E *dans lui même et* λ *une valeur régulière de* T *non nulle ; alors* λ^{-1} *est une valeur régulière de* T^{-1} *et on a*

$$\mathrm{R}_{\lambda^{-1}}(\mathrm{T}^{-1}) = -\lambda \mathrm{T} \, \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}) = -\lambda \, \mathrm{Id}_\mathrm{E} - \lambda^2 \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}).$$

Démonstration. On veut résoudre pour tout $y \in \mathrm{E}$ l'équation $(\mathrm{T}^{-1} - \lambda^{-1} \, \mathrm{Id}_\mathrm{E})(x) = y$ (on cherche $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}^{-1}) = \mathrm{im}(\mathrm{T})$). Puisque λ est régulière pour T, on peut écrire $y = (\mathrm{T} - \lambda \, \mathrm{Id})(z)$, avec $z = \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T})(y)$. On sait alors que $z \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}) = \mathrm{im}(\mathrm{T}^{-1})$, donc il existe $u \in \mathrm{im}(\mathrm{T})$ tel que $z = \mathrm{T}^{-1}(u)$. L'équation proposée est donc

$$\mathrm{T}^{-1}(x) - \lambda^{-1}x = (\mathrm{T} - \lambda \, \mathrm{Id})(\mathrm{T}^{-1}(u)) = u - \lambda \mathrm{T}^{-1}(u) = \mathrm{T}^{-1}(-\lambda u) - \lambda^{-1}(-\lambda u).$$

Il en résulte que $x_0 = -\lambda u$ convient. Par ailleurs, $\mathrm{T}^{-1} - \lambda^{-1}\,\mathrm{Id}$ est injectif (donc la solution x_0 est unique) : si $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}^{-1})$ et $\mathrm{T}^{-1}(x) - \lambda^{-1}x = 0$, alors $x = \lambda \mathrm{T}^{-1}(x) \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ et $\mathrm{T}(x) = \lambda x$ implique $x = 0$ puisque λ est régulière pour T. Si $\mathrm{R}_{\lambda^{-1}}(\mathrm{T}^{-1})$ existe, on a donc

$$x = \mathrm{R}_{\lambda^{-1}}(\mathrm{T}^{-1})(y) = -\lambda u = -\lambda \mathrm{T}(z) = -\lambda \mathrm{T}\,\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T})(y).$$

Il reste à expliquer pourquoi l'opérateur $\mathrm{T}\,\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T})$ est borné. Cela provient de l'égalité $(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id})\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}) = \mathrm{Id}$, qui donne $\mathrm{T}\,\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}) = \lambda \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}) + \mathrm{Id}$, qui est bien continu.

//

Proposition 11.2.2. *Le spectre d'un opérateur fermé* T *d'un espace de Banach complexe* E *dans lui même est une partie fermée de* $\mathbb{C}$*, et l'application* $\lambda \to \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T})$ *est continue et holomorphe du complémentaire du spectre dans* $\mathcal{L}(\mathrm{E})$*.*

Démonstration. Désignons par Ω_T l'ensemble des valeurs régulières pour T, et montrons que cet ensemble est ouvert. Si Ω_T est vide, il est ouvert ; sinon, supposons que $\lambda_0 \in \Omega_\mathrm{T}$, et montrons que les valeurs voisines de λ_0 sont elles aussi régulières et $\lambda \to \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T})$ continue dans ce voisinage. En remplaçant T par $\mathrm{T}_0 = \mathrm{T} - \lambda_0\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ on se ramène à $\lambda_0 = 0$. On supposera donc que $\mathrm{T} = \mathrm{T} - 0\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ est une bijection de dom(T) sur E, d'inverse $\mathrm{S} = \mathrm{R}_0(\mathrm{T})$ continu ; on veut alors montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que λ soit valeur régulière de T quand $|\lambda| < \varepsilon$.

Etant donné $y \in \mathrm{E}$ quelconque, on veut résoudre en $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$, et avec solution unique, l'équation

$$\mathrm{T}(x) - \lambda x = y.$$

Posons $z = \mathrm{T}(x)$, ce qui équivaut à $x = \mathrm{S}(z)$. L'équation précédente devient alors $z - \lambda \mathrm{S}(z) = y$, ou encore $(\mathrm{S} - \lambda^{-1}\,\mathrm{Id}_\mathrm{E})(z) = -\lambda^{-1}y$. Lorsque $|\lambda| < \rho(\mathrm{S})^{-1}$, on sait que $\mathrm{S} - \lambda^{-1}\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ est inversible, donc z est uniquement défini par

$$z = \mathrm{R}_{\lambda^{-1}}(\mathrm{S})(-\lambda^{-1}y),$$

et puisque $x = \mathrm{S}(z)$ ceci montre que $\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}) = -\lambda^{-1}\mathrm{S}\,\mathrm{R}_{\lambda^{-1}}(\mathrm{S})$ existe et est borné, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < \rho(\mathrm{T}^{-1})^{-1}$. Si on réécrit

$$\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}) = -\lambda^{-1}\mathrm{S}\,\mathrm{R}_{\lambda^{-1}}(\mathrm{S}) = -\mathrm{S}(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - \lambda \mathrm{S})^{-1}$$

on voit que $\lambda \to \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T})$ est continue et holomorphe au voisinage de $\lambda_0 = 0$; mais λ_0 est en fait un point quelconque de Ω_T.

//

Exemple 11.2.4. Opérateur diagonal. Pour toute suite scalaire $(\mu_n)_{n\geq 0}$, on définit un opérateur (en général non borné) sur $\ell_2(\mathbb{N})$ dont le domaine est

$$\mathrm{D} = \{x \in \ell_2 : \sum |\mu_n x_n|^2 < +\infty\}$$

et qui est défini pour $x \in \mathrm{D}$ par $(\mathrm{T}x)_n = \mu_n x_n$. Le spectre de T est l'adhérence dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble des valeurs $(\mu_n)_{n\geq 0}$. Comme toute partie fermée non vide F de $\mathbb{C}$ admet une suite dense, on retrouve le fait que pour toute partie fermée non vide F de $\mathbb{C}$, on peut construire un opérateur T d'un espace de Hilbert H dont le spectre Sp(T) soit égal à F. L'opérateur $\mathrm{T} = \mathrm{V}^{-1}$ de l'exemple 7.2.2 fournit un cas où $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) = \emptyset$.

11.3. Transposés et adjoints

Soient E et F deux espaces de Banach et T un opérateur densément défini de E dans F ; on définit *le transposé* de T, qui est un opérateur de F^* dans E^*, de la façon suivante : le domaine de ${}^t\mathrm{T}$ est l'ensemble des $y^* \in F^*$ telles que la forme linéaire $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}) \to y^*(\mathrm{T}(x))$ soit continue (en ayant muni l'espace vectoriel dom(T) de la norme induite par celle de E). Dans le cas où $y^* \in \mathrm{dom}({}^t\mathrm{T})$, cette forme linéaire continue, définie sur le sous-espace dense $\mathrm{dom}(\mathrm{T}) \subset \mathrm{E}$, se prolonge de façon unique en une forme linéaire $x^* \in \mathrm{E}^*$ continue sur E. On pose alors ${}^t\mathrm{T}(y^*) = x^*$. On a donc

$$({}^t\mathrm{T})(y^*)(x) = y^*(\mathrm{T}(x))$$

pour tous $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ et $y^* \in \mathrm{dom}({}^t\mathrm{T})$.

Lorsque E et F sont deux espaces de Hilbert et T un opérateur densément défini de E dans F, on définit un opérateur T^* de F dans E de la façon suivante : on définit $\mathrm{T}^*(y) = x$ si la forme linéaire ℓ_y associée à $y \in \mathrm{H}$ est dans $\mathrm{dom}({}^t\mathrm{T})$, et si $\ell_x = x^* = {}^t\mathrm{T}(\ell_y)$. Le vecteur y est donc dans le domaine de T^* si et seulement si la forme linéaire $\ell : u \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}) \to \langle \mathrm{T}(u), y\rangle$ est continue sur dom(T) (muni de la norme de E), et le couple $(y, x) \in \mathrm{F} \times \mathrm{E}$ est dans le graphe de T^* si et seulement si

$$(*) \qquad \langle \mathrm{T}(u), y\rangle = \langle u, x\rangle$$

pour tout $u \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$, ce qui signifie que x représente la forme linéaire ℓ (et son prolongement continu à E). On a donc

$$\mathrm{Gr}(\mathrm{T}^*) = \{(y, x) \in \mathrm{F} \times \mathrm{E} : \forall z \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}),\ \langle x, z\rangle = \langle y, \mathrm{T}(z)\rangle\}.$$

En effet, la forme linéaire $u \to \langle \mathrm{T}(u), y\rangle$ est alors continue puisqu'elle est égale à $u \to \langle u, x\rangle$ et dans ce cas on a $x = \mathrm{T}^*(y)$ par définition de l'adjoint. Il est clair que la condition $(*)$ définit un ensemble fermé de couples (y, x), ce qui montre que T^* est toujours un opérateur fermé.

On dit que T (densément défini sur un Hilbert) est *symétrique* si

$$\langle x, \mathrm{T}(y)\rangle = \langle \mathrm{T}(x), y\rangle$$

pour tous $x, y \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$. Cela revient à dire que $\mathrm{T} \subset \mathrm{T}^*$. Un opérateur T de E dans lui même est dit *autoadjoint* si $\mathrm{T} = \mathrm{T}^*$. Tout autoadjoint est symétrique mais l'inverse n'est pas vrai.

Exemple 11.3.1. Donnons un exemple simple d'opérateur autoadjoint. On considère $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{D} = \{f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2\, dx < +\infty\}$ et on définit $\mathrm{M}f$ pour toute $f \in \mathrm{D}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\mathrm{M}f)(x) = xf(x).$$

On va vérifier que l'opérateur M est autoadjoint. On voit facilement que D est dense dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ (parce que D contient toutes les fonctions de $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ à support borné). Il est à peu près évident que M est symétrique,

$$\langle \mathrm{M}f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} \big(xf(x)\big)\, \overline{g(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \overline{xg(x)}\, dx = \langle f, \mathrm{M}g\rangle.$$

On en déduit $\mathrm{dom}(\mathrm{M}) \subset \mathrm{dom}(\mathrm{M}^*)$. Inversement, supposons que $g \in \mathrm{dom}(\mathrm{M}^*)$, et considérons pour tout $n \geq 0$ la fonction $f_n \in \mathrm{dom}(\mathrm{M})$ définie par $f_n(x) = x\mathbf{1}_{[-n,n]}(x)g(x)$;

puisque $g \in \mathrm{dom}(\mathrm{M}^*)$, il existe une constante C telle que pour tout $n \geq 0$, on ait $|\langle \mathrm{M}f_n, g\rangle| \leq \mathrm{C}\,\|f_n\|_2$, ce qui donne

$$\int_{-n}^{n} x^2 |g(x)|^2\,dx \leq \mathrm{C}\left(\int_{-n}^{n} x^2|g(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$$

d'où résulte que $\int_{\mathbb{R}} x^2|g(x)|^2\,dx \leq \mathrm{C}^2 < +\infty$, soit $g \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$. La vérification est finie.

Exercice 11.3.2. Adjoints des fermetures des exemples B1, B2, B3 de 1.1. Posons $\mathrm{E} = \mathrm{L}_2([0,1])$. La fermeture de l'exemple B3 est l'opérateur T_c dont le domaine est

$$\mathrm{D}_c = \{f \in \mathrm{H}^1([0,1]) : f(0) = f(1)\}$$

et qui est défini par $\mathrm{T}_c(f) = f'$ pour toute $f \in \mathrm{D}_c$; on va montrer que $\mathrm{S}_c = i\mathrm{T}_c$ est autoadjoint.

Avant tout on vérifie que D_c est dense dans E : les fonctions affines par morceaux, nulles en 0 et 1, sont dans D_c, et elles sont denses dans $\mathrm{L}_2(0,1)$; en effet, la fonction indicatrice de tout intervalle $]a,b[$ contenu dans $[0,1]$ peut être obtenue comme limite croissante d'une suite (f_n) de fonctions affines par morceaux, nulles en 0 et 1, et telles que $0 \leq f_n \leq 1$ pour tout n. Ensuite, les fonctions indicatrices d'intervalles forment une partie totale de $\mathrm{L}_2(0,1)$.

On montre maintenant que S_c est symétrique, c'est à dire que $\langle f_1, \mathrm{S}_c(f_2)\rangle = \langle \mathrm{S}_c(f_1), f_2\rangle$ pour toutes $f_1, f_2 \in \mathrm{D}_c$. On a en effet en utilisant l'intégration par parties dans $\mathrm{H}^1([0,1])$

$$\langle f_1, \mathrm{S}_c(f_2)\rangle = \int_0^1 f_1\,\overline{(if_2')} = \left[f_1\,\overline{(if_2)}\right]_0^1 - \int_0^1 f_1'\,\overline{(if_2)} = \int_0^1 (if_1')\,\overline{f}_2 = \langle \mathrm{S}_c(f_1), f_2\rangle$$

(le terme $\left[\,.\,\right]_0^1$ est nul parce que toutes les fonctions ont la même valeur en 0 et en 1 par définition de D_c). On montrerait de la même façon que l'exemple S_b correspondant à B2, défini sur $\mathrm{D}_b = \{f \in \mathrm{H}^1([0,1]) : f(0) = f(1) = 0\}$ est symétrique : c'est évident puisque $\mathrm{S}_b \subset \mathrm{S}_c$.

On sait donc déjà que $\mathrm{D}_c \subset \mathrm{dom}(\mathrm{S}_c^*)$, et que $\mathrm{S}_c^*(f) = \mathrm{S}_c(f) = if'$ pour $f \in \mathrm{D}_c$. Il reste à voir que $\mathrm{dom}(\mathrm{S}_c^*) \subset \mathrm{D}_c$. Dire que (g,h) est dans le graphe de S_c^* signifie que $g \in \mathrm{E}$ est dans le domaine de S_c^* et que $h = \mathrm{S}_c^*(g) \in \mathrm{E}$ vérifie

$$\langle f, h\rangle = \langle \mathrm{S}_c(f), g\rangle$$

pour toute fonction $f \in \mathrm{D}_c$. On a si $(g,h) \in \mathrm{Gr}(\mathrm{S}_c^*)$

$$\int_0^1 f\,\overline{h} = \int_0^1 (if')\,\overline{g}$$

pour toute $f \in \mathrm{D}_c$. Posons $\mathrm{H}(t) = \int_0^t h(s)\,ds$. On obtient par intégration par parties

$$\int_0^1 f\,\overline{h} = \left[f\,\overline{\mathrm{H}}\right]_0^1 - \int_0^1 f'\,\overline{\mathrm{H}} = f(1)\,\overline{\mathrm{H}}(1) - \int_0^1 f'\,\overline{\mathrm{H}},$$

ce qui donne

$$f(1)\,\overline{\mathrm{H}}(1) - \int_0^1 f'\,\overline{\mathrm{H}} = \int_0^1 (if')\,\overline{g} = -\int_0^1 f'\,\overline{(ig)}$$

ou encore $f(1)\,\overline{\mathrm{H}}(1) = \int_0^1 f'\,\overline{(\mathrm{H} - ig)}$ pour toute $f \in \mathrm{D}_c$. Puisque la fonction $f_0 = 1$ est dans D_c, on obtient puisque $f_0' = 0$ que $\mathrm{H}(1) = 0$. On remarque que l'ensemble

des f', lorsque $f \in \mathrm{D}_c$, est exactement l'ensemble de toutes les fonctions k de $\mathrm{E} = \mathrm{L}_2$ qui sont d'intégrale nulle sur $[0,1]$. Cet ensemble des fonctions d'intégrale nulle est égal à $(\mathbb{C}1)^\perp$, et l'équation précédente indique que $\mathrm{H} - ig$ est orthogonale à $(\mathbb{C}1)^\perp$, donc $\mathrm{H} - ig \in (\mathbb{C}1)^{\perp\perp} = \mathbb{C}1$. On obtient que $\mathrm{H} - ig$ est une fonction constante, donc $g = -i\mathrm{H} + Cte$; comme $\mathrm{H}(0) = \mathrm{H}(1)$ et que H est une fonction de $\mathrm{H}^1([0,1])$, il en résulte que $g \in \mathrm{D}_c$. On a déjà vu que $\mathrm{D}_c \subset \mathrm{dom}(\mathrm{S}_c^*)$, et on a maintenant $\mathrm{dom}(\mathrm{S}_c^*) \subset \mathrm{D}_c$, donc $\mathrm{dom}(\mathrm{S}_c^*) = \mathrm{D}_c$ et pour $g \in \mathrm{dom}(\mathrm{S}_c^*)$ on a $\mathrm{S}_c^*(g) = ig' = \mathrm{S}_c(g)$, ce qui montre que S_c est autoadjoint.

En suivant la même méthode, on vérifie que l'adjoint de S_a, défini sur $\mathrm{D}_a = \mathrm{H}^1([0,1])$ par $\mathrm{S}_a(f) = if'$, est l'opérateur S_b défini sur $\mathrm{D}_b = \{f \in \mathrm{D}_a : f(0) = f(1) = 0\}$ par $\mathrm{S}_b(f) = if'$. L'adjoint de S_b est S_a. Il en résulte que S_b est un exemple d'opérateur symétrique qui n'est pas autoadjoint.

Proposition 11.3.1. *Soient* E *et* F *deux espaces de Hilbert et* T *un opérateur densément défini de* E *dans* F *; alors* T^* *est fermé. Pour que* T *soit fermable, il faut et il suffit que* T^* *soit densément défini. Dans ce cas, on a* $\overline{\mathrm{T}} = (\mathrm{T}^*)^*$.

Démonstration. Sur l'espace $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ on introduit le produit scalaire

$$\langle (x,y), (x',y') \rangle = \langle x, x' \rangle + \langle y, y' \rangle$$

et on procède de même sur $\mathrm{F} \times \mathrm{E}$. Soit $\mathrm{U}_0 \in \mathcal{L}(\mathrm{F} \times \mathrm{E}, \mathrm{E} \times \mathrm{F})$ l'opérateur unitaire qui à $(y,x) \in \mathrm{F} \times \mathrm{E}$ associe $(x,-y)$; le graphe $\mathrm{Gr}(\mathrm{T}^*)$ de T^* est l'orthogonal dans l'espace de Hilbert $\mathrm{F} \times \mathrm{E}$ de $\mathrm{U}_0^*(\mathrm{Gr}(\mathrm{T}))$, donc $\mathrm{Gr}(\mathrm{T}^*)$ est fermé.

Supposons T fermable. Pour montrer que T^* est densément défini, on va montrer que $y = 0_\mathrm{F}$ est le seul vecteur de F orthogonal à $\mathrm{dom}(\mathrm{T}^*)$. Dans ce cas le couple $(y, 0_\mathrm{E})$ est orthogonal à $\mathrm{Gr}(\mathrm{T}^*)$, donc il est dans $\mathrm{U}_0^*(\mathrm{Gr}(\mathrm{T}))^{\perp\perp}$; mais puisque T est fermable, $\mathrm{Gr}(\mathrm{T}))^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{Gr}(\mathrm{T})}$ est le graphe d'un opérateur $\overline{\mathrm{T}}$, et on obtient $(y, 0_\mathrm{E}) \in \mathrm{U}_0^*(\mathrm{Gr}(\overline{\mathrm{T}}))$, c'est à dire $(0_\mathrm{E}, y) \in \mathrm{Gr}(\overline{\mathrm{T}})$, d'où $y = \overline{\mathrm{T}}(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{F}$.

Si T^* est densément défini, alors $\mathrm{T} \subset (\mathrm{T}^*)^*$ donc T est fermable. Dans ce cas, $\mathrm{Gr}(\overline{\mathrm{T}}) = \overline{\mathrm{Gr}(\mathrm{T})} = \mathrm{Gr}(\mathrm{T})^{\perp\perp} = \mathrm{Gr}((\mathrm{T}^*)^*)$. Soient $y \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}^*)^\perp$ et $(x,z) \in \mathrm{Gr}(\mathrm{T})^\perp$; alors $z \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}^*)$ donc $\langle 0, x \rangle + \langle y, z \rangle = 0$, donc $(0,y) \in \mathrm{Gr}(\mathrm{T})^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{Gr}(\mathrm{T})}$.

//

Proposition 11.3.2. *Soit* T *un opérateur densément défini d'un espace de Hilbert* E *dans un espace de Hilbert* F *; alors* $\ker(\mathrm{T}^*) = \mathrm{im}(\mathrm{T})^\perp$.

Démonstration. Soit $y \in \mathrm{F}$; on a $y \in \ker(\mathrm{T}^*)$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$, on a $\langle 0, x \rangle = \langle y, \mathrm{T}(x) \rangle$; cela a lieu si et seulement si $y \in \mathrm{im}(\mathrm{T})^\perp$.

//

Proposition 11.3.3. *Soient* E *et* F *deux espaces de Hilbert et* T *un opérateur densément défini, fermé de* E *dans* F *;*

(*i*) *pour tout* $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *on a* $(\mathrm{S} + \mathrm{T})^* = \mathrm{S}^* + \mathrm{T}^*$ *;*

(*ii*) *si* R *est une extension de* T*, alors* $\mathrm{R}^* \subset \mathrm{T}^*$ *;*

(*iii*) *si* T *est injectif et d'image dense, alors* $(\mathrm{T}^{-1})^* = (\mathrm{T}^*)^{-1}$.

Démonstration. Pour $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$, $y \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}^*)$, on a

$$\langle (\mathrm{S}+\mathrm{T})(x), y\rangle = \langle \mathrm{S}(x), y\rangle + \langle \mathrm{T}(x), y\rangle = \langle x, (\mathrm{S}^*+\mathrm{T}^*)(y)\rangle,$$

donc $\mathrm{S}^*+\mathrm{T}^* \subset (\mathrm{S}+\mathrm{T})^*$. Pour $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$, $y \in \mathrm{dom}(\mathrm{S}+\mathrm{T})^*$, on a

$$\langle \mathrm{T}(x), y\rangle = \langle (\mathrm{S}+\mathrm{T})(x), y\rangle - \langle \mathrm{S}(x), y\rangle = \langle x, (\mathrm{S}+\mathrm{T})^*(y)\rangle - \langle x, \mathrm{S}^*(y)\rangle,$$

donc $y \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}^*)$ et $\mathrm{T}^*(y) = (\mathrm{S}+\mathrm{T})^*(y) - \mathrm{S}^*(y)$, donc $(\mathrm{S}+\mathrm{T})^* = \mathrm{S}^*+\mathrm{T}^*$, ce qui termine le point (i). Si $\mathrm{Gr}(\mathrm{T}) \subset \mathrm{Gr}(\mathrm{R})$, alors $\mathrm{Gr}(\mathrm{R})^\perp \subset \mathrm{Gr}(\mathrm{T})^\perp$, d'où le deuxième point (ii). Enfin, pour $(x,y) \in \mathrm{E}\times\mathrm{F}$ on a $(x,y) \in \mathrm{Gr}((\mathrm{T}^{-1})^*)$ si et seulement si $(y,-x) \in \mathrm{Gr}(\mathrm{T}^{-1})^\perp$, ce qui équivaut à $(-x,y) \in \mathrm{Gr}(\mathrm{T})^\perp$ ou encore à $(y,x) \in \mathrm{Gr}(\mathrm{T}^*)$.

//

Proposition 11.3.4. *Soient* E *et* F *deux espaces de Hilbert et* T *un opérateur fermé densément défini de* E *dans* F *; l'opérateur* $(\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T})$ *est injectif, son image est égale à* E *et* $(\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T})^{-1}$ *est un élément positif de* $\mathcal{L}(\mathrm{E})$*. L'opérateur* $\mathrm{T}^*\mathrm{T}$ *est autoadjoint et son spectre est contenu dans* $[0,+\infty[$*.*

Démonstration. Soit $x \in \mathrm{E}$; comme $\mathrm{U}_0(\mathrm{G}(\mathrm{T}^*))$ est l'orthogonal de $\mathrm{Gr}(\mathrm{T})$, il existe deux vecteurs $\xi \in \mathrm{Gr}(\mathrm{T})$ et $\eta \in \mathrm{Gr}(\mathrm{T}^*)$ tels que $(x,0) = \xi + \mathrm{U}_0(\eta)$; en d'autres termes, il existe $z \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ et $y \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}^*)$ tels que $(x,0) = (z,\mathrm{T}(z)) + (\mathrm{T}^*(y),-y)$. Alors $y = \mathrm{T}(z)$ donc $z \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}^*\mathrm{T}) = \mathrm{dom}(\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T})$ et $x = (\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T})(z)$. Donc $(\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T})$ est surjectif. Soit $z \in \mathrm{dom}(\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T})$; comme $z \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ et $\mathrm{T}(z) \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}^*)$, on a

$$\langle \mathrm{T}^*(\mathrm{T}(z)), z\rangle = \langle \mathrm{T}(z), \mathrm{T}(z)\rangle.$$

On a $\langle (\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T})(z), z\rangle = \langle z+\mathrm{T}^*\mathrm{T}(z), z\rangle = \|z\|^2 + \|\mathrm{T}(z)\|^2$. Alors

$$\|z\|^2 \le \|z\|^2 + \|\mathrm{T}(z)\|^2 = \langle (\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T})(z), z\rangle \le \|z\|\,\|(\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T})(z)\|\,;$$

donc $\|z\| \le \|(\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T})(z)\|$, il en résulte que $\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T}$ est injectif, que l'inverse $(\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T})^{-1}$ est continue et que $\|(\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T})^{-1}\| \le 1$. Enfin, considérons $z = (\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T})^{-1}(x)$ avec $x \in \mathrm{E}$; on a

$$\langle x, (\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T})^{-1}(x)\rangle = \langle (\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T})(z), z\rangle = \|z\|^2 + \|\mathrm{T}(z)\|^2 \ge 0.$$

Donc $(\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T})^{-1}$ est un élément positif de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$. Comme $(\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T})^{-1}$ est injectif et autoadjoint, son image est dense (d'après la proposition 6.1.3). Par la proposition 3, l'opérateur $\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T}$ est autoadjoint, donc $\mathrm{T}^*\mathrm{T}$ est autoadjoint. Comme l'opérateur $(\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T})^{-1}$ est positif de norme ≤ 1, on a $\mathrm{Sp}(\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T})^{-1} \subset [0,1]$; il en résulte que $\mathrm{Sp}(\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T}) \subset [1,+\infty[$ (par le lemme 2.1) et $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}^*\mathrm{T}) \subset [0,+\infty[$.

//

11.4. Théorème de représentation. Décomposition spectrale

Exemple 11.4.1. Soit (Ω,μ) un espace mesuré et soit $\mathrm{L}_0(\Omega,\mu)$ l'ensemble des classes d'équivalence de fonctions mesurables complexes pour la relation d'égalité μ-presque partout ; si $f,g \in \mathrm{L}_0(\Omega,\mu)$, on voit facilement que la classe de $\widetilde{f}\widetilde{g}$ ne dépend pas des représentants $\widetilde{f}$, $\widetilde{g}$ des deux classes, ce qui permet de parler du produit ponctuel de deux classes. On peut alors définir un opérateur M_f dont le domaine est l'ensemble des $g \in \mathrm{L}_2(\Omega,\mu)$ telles que $fg \in \mathrm{L}_2(\Omega,\mu)$ et tel que $\mathrm{M}_f(g) = fg$ pour tout $g \in \mathrm{dom}(\mathrm{M}_f)$.

Pour tout $g \in \mathrm{L}_2(\Omega,\mu)$ et tout $n > 0$, la fonction $g_n = \big(n/(n+|f|)\big)\, g$ est dans le domaine de M_f ; de plus la suite (g_n) converge partout vers g et est dominée par $|g|$. Il résulte alors du théorème de convergence dominée que le domaine de M_f est dense dans L_2. Soient $\xi, \eta \in \mathrm{L}_2(\Omega,\mu)$ tels que $f\xi \in \mathrm{L}_2(\Omega,\mu)$ et $\overline{f}\eta \in \mathrm{L}_2(\Omega,\mu)$; on a

$$\langle f\xi, \eta\rangle = \int f(t)\xi(t)\overline{\eta(t)}\, d\mu(t) = \langle \xi, \overline{f}\eta\rangle.$$

On en déduit que $\mathrm{M}_{\overline{f}} \subset \mathrm{M}_f^*$. Enfin, soient $\xi, \eta \in \mathrm{L}_2(\Omega,\mu)$; posons $\xi_1 = (\xi + \overline{f}\eta)(1+|f|^2)^{-1}$ et $\eta_1 = (\eta - f\xi)(1+|f|^2)^{-1}$; clairement $f\xi_1 \in \mathrm{L}_2(\Omega,\mu)$, $\overline{f}\eta_1 \in \mathrm{L}_2(\Omega,\mu)$ et on voit que $(\xi,\eta) = (\xi_1, f\xi_1) + (-\overline{f}\eta_1, \eta_1)$. On en déduit que

$$\mathrm{L}_2(\Omega,\mu) \times \mathrm{L}_2(\Omega,\mu) = \mathrm{Gr}(\mathrm{M}_f) + \{(-z,y) : (y,z) \in \mathrm{Gr}(\mathrm{M}_{\overline{f}})\}.$$

Comme $\{(-z,y) : (y,z) \in \mathrm{Gr}(\mathrm{M}_{\overline{f}})\} \subset \mathrm{Gr}(\mathrm{M}_f)^\perp$, on en déduit l'égalité de ces deux sous-espaces ; il en résulte que M_f et $\mathrm{M}_{\overline{f}}$ sont fermés et adjoint l'un de l'autre.

Posons $h = (1+|f|)^{-1}$. Remarquons que $\mathrm{M}_h \in \mathcal{L}(\mathrm{L}_2(\Omega,\mu))$ est injective, que le domaine de M_f est l'image de M_h et que $\mathrm{M}_f\mathrm{M}_h = \mathrm{M}_{fh}$. On en déduit que $\mathrm{M}_f - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{L}_2(\Omega,\mu)}$ et $\mathrm{M}_{fh-\lambda h}$ ont même image. Le noyau de M_f est l'ensemble des fonctions $g \in \mathrm{L}_2(\Omega,\mu)$ telles que fg soit μ-négligeable. Il coïncide avec celui de M_{fh}. Par la proposition 10.2.1, le spectre de M_f est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que, pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $\{s \in \Omega : |f(s) - \lambda| < \varepsilon\}$ ne soit pas μ-négligeable.

Remarquons que M_f est injectif si et seulement si l'ensemble $\{s \in \Omega : f(s) = 0\}$ est μ-négligeable ; dans ce cas $\mathrm{im}(\mathrm{M}_f)$ est dense et $\mathrm{M}_f^{-1} = \mathrm{M}_{f^{-1}}$.

Théorème 11.4.1. *Soient* H *un espace de Hilbert complexe et* T *un opérateur auto-adjoint sur* H *; le spectre de* T *est réel :* $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) \subset \mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$; notons b sa partie imaginaire, non nulle. Pour tout $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$, on a $\langle \mathrm{T}(x), x\rangle = \langle x, \mathrm{T}(x)\rangle$ donc $\langle \mathrm{T}(x), x\rangle \in \mathbb{R}$; la partie imaginaire de $\langle (\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{H}})(x), x\rangle$ est donc $-b\|x\|^2$. On en déduit que

$$|b|\,\|x\|^2 \leq |\langle (\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{H}})(x), x\rangle| \leq \|(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{H}})(x)\|\,\|x\|,$$

donc $\|(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{H}})(x)\| \geq |b|\,\|x\|$, pour tout $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$. Il en résulte que l'image $(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{H}})(\mathrm{dom}(\mathrm{T}))$ est fermée dans H : supposons en effet que $(x_n) \subset \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ et que $(\mathrm{T}x_n - \lambda x_n)$ converge vers $y \in \mathrm{H}$; d'après ce qui précède,

$$\|x_n - x_m\| \leq |b|^{-1}\|(\mathrm{T}x_n - \lambda x_n) - (\mathrm{T}x_m - \lambda x_m)\| \to 0$$

donc (x_n) est de Cauchy, donc converge vers un $x \in \mathrm{H}$; par conséquent, $\mathrm{T}x_n$ converge vers $y + \lambda x$; puisque T est fermé (parce qu'il est autoadjoint) et puisque $(x_n, \mathrm{T}(x_n)) \in \mathrm{Gr}(\mathrm{T})$, on en déduit que $(x, y+\lambda x) \in \mathrm{Gr}(\mathrm{T})$, donc $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ et $y = (\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{H}})(x)$.

Pour finir, on va voir que l'image $(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{H}})(\mathrm{dom}(\mathrm{T}))$ est dense dans H, en vérifiant que $y = 0_{\mathrm{H}}$ est le seul vecteur de H orthogonal à cette image ; si y est orthogonal à l'image, on aura

$$\langle \mathrm{T}x - \lambda x, y\rangle = 0$$

pour tout $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$, ce qui montre que la forme linéaire $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}) \to \langle \mathrm{T}x, y\rangle$ est continue, puisqu'elle est égale à $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}) \to \lambda\langle x, y\rangle = \langle x, \overline{\lambda}y\rangle$; on en déduit que $y \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}^*) = \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ et $\mathrm{T}(y) = \mathrm{T}^*(y) = \overline{\lambda}y$; mais $\langle \mathrm{T}(y), y\rangle = \langle y, \mathrm{T}(y)\rangle = \lambda\langle y, y\rangle$ doit être réel, ce qui n'est possible que si $y = 0_{\mathrm{H}}$.

Il résulte de tout ce qui précède que $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{H}}$ est bijective de $\mathrm{dom}(\mathrm{T})$ sur H, et que l'inverse est continue, de norme $\leq 1/|b|$.

//

Exercice 11.4.2. On considère l'opérateur autoadjoint S sur $\mathrm{L}_2(0,1)$ dont le domaine est $\mathrm{dom}(\mathrm{S}) = \mathrm{H}^1(0,1) \cap \{f : f(0) = f(1)\}$, et qui est défini par $\mathrm{S}f = -if'$ pour $f \in \mathrm{dom}(\mathrm{S})$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on définit la fonction e_n par $e_n(t) = \mathrm{e}^{2\pi i n t}$; montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction e_n est dans le domaine de S et vérifie $\mathrm{S}(e_n) = 2\pi n\, e_n$. Vérifier ensuite que le spectre de S est exactement égal à $2\pi\mathbb{Z}$, en calculant la résolvante $\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{S})$ pour tout $\lambda \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

Produit de résolvantes

Proposition 11.4.2. *Soient* H *un espace de Hilbert complexe,* T *un opérateur fermé sur* H *et* $\lambda, \mu \notin \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$ *; posons* $r_\lambda = \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T})$, $r_\mu = \mathrm{R}_\mu(\mathrm{T})$ *; l'image* $r_\lambda r_\mu(\mathrm{H})$ *est égale au domaine de* T^2*, et* $r_\lambda r_\mu = r_\mu r_\lambda$.

Démonstration. Rappelons que

$$\mathrm{dom}(\mathrm{T}^2) = \{x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}) : \mathrm{T}x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})\}.$$

Considérons $x = r_\lambda(r_\mu(y))$, pour un $y \in \mathrm{H}$ quelconque. Par définition, on a $r_\lambda(\mathrm{H}) = \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ donc $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ et $\mathrm{T}x - \lambda x = r_\mu(y) \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$; par linéarité, $\mathrm{T}x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ donc $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}^2)$.

Inversement supposons $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}^2)$; alors $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ et $x_1 = \mathrm{T}x - \lambda x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$, ce qui permet de calculer $y = \mathrm{T}x_1 - \mu x_1$; on aura alors $r_\mu y = x_1$, puis $r_\lambda r_\mu y = x$.

Si $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}^2)$, on vérifie immédiatement en développant que

$$(\mathrm{T} - \lambda)(\mathrm{T} - \mu)x = \mathrm{T}^2(x) - \lambda\mathrm{T}(x) - \mu\mathrm{T}(x) + \lambda\mu x = (\mathrm{T} - \mu)(\mathrm{T} - \lambda)x.$$

En prenant l'inverse de cette relation sur l'image commune $\mathrm{dom}(\mathrm{T}^2) = r_\lambda r_\mu(\mathrm{H}) = r_\mu r_\lambda(\mathrm{H})$ on obtient $r_\lambda r_\mu = r_\mu r_\lambda$.

//

Proposition 11.4.3. *Soient* H *un espace de Hilbert complexe et* T *un opérateur autoadjoint sur* H *; alors* $\mathrm{R}_i(\mathrm{T}) = (\mathrm{T} - i\,\mathrm{Id}_\mathrm{H})^{-1}$ *est un opérateur borné normal, et son adjoint est égal à* $\mathrm{R}_{-i}(\mathrm{T})$.

Démonstration. D'après le théorème 1, les opérateurs $\mathrm{R}_i(\mathrm{T})$ et $\mathrm{R}_{-i}(\mathrm{T})$ existent et sont bornés. D'après la proposition précédente il suffit de savoir que $\mathrm{R}_{-i}(\mathrm{T})$ est l'adjoint de $\mathrm{R}_i(\mathrm{T})$. Soient y, v deux vecteurs quelconques dans H et posons $x = \mathrm{R}_i(\mathrm{T})(y)$ et $u = \mathrm{R}_{-i}(\mathrm{T})(v)$. On a

$$\langle \mathrm{R}_i(\mathrm{T})(y), v\rangle = \langle x, (\mathrm{T} + i)(u)\rangle = \langle \mathrm{T}x - ix, u\rangle = \langle y, \mathrm{R}_{-i}(\mathrm{T})(v)\rangle.$$

//

Théorème 11.4.4. *Soient* H *un espace de Hilbert séparable et* T *un opérateur autoadjoint de* H *dans* H *; il existe un espace mesuré* (Ω, μ)*, une fonction* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *mesurable et un isomorphisme* $u : \mathrm{L}_2(\Omega, \mu) \to \mathrm{H}$ *d'espaces de Hilbert tels que* $\mathrm{T} = u\,\mathrm{M}_f\,u^*$.

On donne à l'opérateur M_f son domaine naturel (de l'exemple 1) ; la relation ci-dessus sous-entend que u et son inverse u^* échangent les domaines de T et de M_f, c'est à dire qu'on a l'égalité $u(\mathrm{dom}(\mathrm{M}_f)) = \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ (et inversement, $u^*(\mathrm{dom}(\mathrm{T})) = \mathrm{dom}(\mathrm{M}_f)$).

Démonstration. On va se servir de l'opérateur normal $S = (T - i\,Id_H)^{-1}$ et de sa représentation obtenue au chapitre 9. Il existe un espace mesuré σ-fini $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, un unitaire U de $H_1 = H$ sur $H_2 = L_2(\Omega, \mu)$, une fonction $h \in L_\infty(\Omega, \mu)$ tels que

$$S = U^*\, M_h\, U,$$

où M_h désigne l'opérateur borné sur $L_2(\Omega, \mu)$ défini par la multiplication par h,

$$\forall g \in L_2(\Omega, \mu), \quad M_h(g) = hg.$$

Puisque S est injectif, il en résulte que M_h est injectif aussi ; cela implique que l'ensemble $A = \{h = 0\}$ est μ-négligeable (sinon on pourrait trouver, puisque μ est σ-finie, un $B \subset A$ tel que $0 < \mu(B) < +\infty$, et alors $\mathbf{1}_B \in L_2(\Omega, \mu)$ vérifierait $M_h(\mathbf{1}_B) = 0$ et $\|\mathbf{1}_B\| > 0$, ce qui n'est pas possible).

Si on comprend la traduction de S sur $L_2(\Omega, \mu)$, il n'est pas bien difficile de comprendre celle de $(T - i)$ puis celle de T. L'opérateur $(T - i)$, qui est l'inverse de $S = R_i(T)$, se traduit sur $L_2(\Omega, \mu)$ par l'inverse de la traduction de S : c'est l'opérateur M_2 de multiplication par la fonction $1/h$ (fonction qui est μ-presque partout définie). Le domaine D_2 de M_2 est l'image de M_h, l'ensemble des fonctions g de la forme $g = hk$ pour une $k \in L_2$. Comme $h \neq 0$ presque partout, cela revient à dire que

$$D_2 = \{g \in L_2 : \int_\Omega |g/h|^2\, d\mu < +\infty\}.$$

Pour finir on définit l'opérateur non borné T_2 sur $L_2(\Omega, \mu)$ par son domaine D_2 et la formule

$$\forall g \in D_2, \quad T_2(g) = g/h + ig.$$

Autrement dit, si on pose $f = i + 1/h$ et $u = U^*$, on obtient bien la représentation voulue : l'opérateur de multiplication $M_f = T_2$ vérifie $T = u\, M_f\, u^*$.

//

Exemple 11.4.3. Soit $H = L_2(\mathbb{R})$ et définissons T sur H par $dom(T) = H^1(\mathbb{R})$ et $Tf = -if'$ pour toute $f \in H^1(\mathbb{R})$. On vérifie que T est autoadjoint. Sa représentation par une multiplication est obtenue au moyen de la transformation de Fourier sur $L_2(\mathbb{R})$. On va obtenir ainsi que T est conjugué à l'opérateur M de multiplication par $t \to t$ sur $L_2(\mathbb{R})$. Si on pose pour $f \in L_1(\mathbb{R})$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (\mathcal{F}f)(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt}\, f(x)\, dx$$

on obtient par une intégration par parties facile que pour f à support compact de classe C^1, on a $\mathcal{F}(-if')(t) = t\,\mathcal{F}(f)(t)$. Par ailleurs on sait montrer que $U = (2\pi)^{-1/2}\,\mathcal{F}$ se prolonge en opérateur unitaire de $L_2(\mathbb{R})$, et on a alors la représentation

$$T = U^* \circ M \circ U.$$

Remarque 11.4.4. Si H est un espace de Hilbert séparable et T un opérateur autoadjoint de H dans H, l'opérateur $U = (T - i\,Id_H)(T + i\,Id_H)^{-1}$ est un élément unitaire de $\mathcal{L}(H)$. Cette transformation, appelée *transformation de Cayley*, permet de relier les autoadjoints non bornés aux unitaires.

Soient H un espace de Hilbert et T un opérateur densément défini autoadjoint de H dans H ; on peut, comme dans le cas borné, définir un calcul fonctionnel borélien pour

T : écrivons $\mathrm{T} = u\,\mathrm{M}_f\,u^*$. Si g est une fonction borélienne bornée sur $\mathrm{Sp}(\mathrm{T})$, on pose $g(\mathrm{T}) = u\,\mathrm{M}_{g\circ f}\,u^*$. Si l'unitaire $\mathrm{U} = (\mathrm{T}-i\,\mathrm{Id}_\mathrm{H})(\mathrm{T}+i\,\mathrm{Id}_\mathrm{H})^{-1}$ s'écrit $u\,\mathrm{M}_h\,u^*$, on a $f = \varphi\circ h$, où $\varphi : t \to -i(t+1)(t-1)^{-1}$; pour toute fonction borélienne bornée g sur $\mathbb{R}$ on a donc

$$g(\mathrm{T}) = u\,\mathrm{M}_{g\circ f}\,u^* = u\,\mathrm{M}_{g\circ\varphi\circ h}\,u^* = g\circ\varphi(\mathrm{U}).$$

On en déduit que $g(\mathrm{T})$ ne dépend pas de l'écriture $\mathrm{T} = u\,\mathrm{M}_f\,u^*$.

11.5. Le théorème de Stone

Soit H un espace de Hilbert ; on appelle *groupe à un paramètre d'unitaires* une famille $(v_t)_{t\in\mathbb{R}}$ d'éléments unitaires de $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ telle que :

(i) pour tous $s, t \in \mathbb{R}$ on a $v_{s+t} = v_s v_t$;

(ii) pour tout $x \in \mathrm{H}$ l'application $t \to v_t(x)$ est continue.

Lemme 11.5.1. *Soient* H *un espace de Hilbert,* $(v_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *un groupe à un paramètre d'unitaires,* D *un sous-ensemble dense de* H *tel que pour tout* $z \in \mathrm{D}$ *et tout* $t \in \mathbb{R}$ *on ait* $v_t(z) \in \mathrm{D}$ *; soient* $x, y \in \mathrm{H}$ *tels que, pour tout* $z \in \mathrm{D}$*, l'application* $t \to \langle v_t(x), z\rangle$ *soit dérivable en* 0 *de dérivée* $i\langle y, z\rangle$ *; alors* $t \to v_t(x)$ *est continûment dérivable de* $\mathbb{R}$ *dans* H *et sa dérivée en* t *est* $iv_t(y)$*.*

Démonstration. L'application $t \to v_t(y)$ est continue de $\mathbb{R}$ dans H. Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $x_t = x + \int_0^t iv_s(y)\,ds$. L'application $t \to x_t$ est continûment dérivable et sa dérivée en t est $iv_t(y)$. Soit $z \in \mathrm{D}$; posons $\varphi(t) = \langle x_t, z\rangle$ et $\psi(t) = \langle v_t(x), z\rangle$. La fonction φ est continûment dérivable et sa dérivée en t est $\langle iv_t(y), z\rangle$. Soient $t, s \in \mathbb{R}$; on a $\psi(t+s) = \langle v_t v_s(x), v_t v_{-t}(z)\rangle = \langle v_s(x), v_{-t}(z)\rangle$; par hypothèse, cette fonction de s est dérivable en 0 et sa dérivée est $i\langle y, v_{-t}(z)\rangle = i\langle v_t(y), z\rangle$. On a montré que ψ est dérivable en t et $\psi' = \varphi'$. Comme $\varphi(0) = \psi(0)$, on trouve $\varphi = \psi$; donc, pour tout $z \in \mathrm{D}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\langle (x_t - v_t(x)), z\rangle = 0$. Alors $x_t - v_t(x) \in \mathrm{D}^\perp$; donc $v_t(x) = x_t$, d'où le résultat.

//

Théorème 11.5.2 : Théorème de Stone. *Soit* H *un espace de Hilbert séparable ;*

(i) *soit* $(v_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *un groupe à un paramètre d'opérateurs d'unitaires. Il existe un opérateur autoadjoint* T *sur* H *dont le graphe est l'ensemble des couples* $(x, y) \in \mathrm{H}\times\mathrm{H}$ *tels que la fonction* $t \to v_t(x)$ *soit dérivable en* 0*, de dérivée* iy*. Pour* $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ *et* t *réel, on a* $v_t(x) \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ *et* $\mathrm{T}(v_t(x)) = v_t(\mathrm{T}(x))$*.*

On dit que T *est le générateur infinitésimal de* $(v_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *;*

(ii) *tout opérateur autoadjoint* T *est le générateur infinitésimal d'un unique groupe à un paramètre d'unitaires* $(v_t)_{t\in\mathbb{R}}$*.*

Démonstration. Montrons que le domaine de T est dense. Soient $x \in \mathrm{H}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 à support compact ; posons $x_f = \int f(t)v_t(x)\,dt$. On a

$$v_t(x_f) = \int f(s)v_t v_s(x)\,ds = \int f(s-t)v_t(x)\,ds.$$

Donc $(v_t(x_f) - x_f)/t = \int t^{-1}[f(s-t) - f(s)]v_s(x)\,ds$. Quand t tend vers 0, $(v_t(x_f) - x_f)/t$ tend vers $-\int f'(s)v_s(x)\,ds$. On en déduit que $x_f \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$. Soit f_n une suite

de fonctions positives de classe C^1 telles que $\int f_n(t)\,dt = 1$ et telles que f_n soit nulle en dehors de $]-1/n, 1/n[$; posons $y_n = \int f_n(t) v_t(x)\,dt$; on a $y_n \in \mathrm{dom}(T)$ et $\lim y_n = x$. Donc $\mathrm{dom}(T)$ est dense.

Si $x \in \mathrm{dom}(T)$, pour tout $z \in H$ la fonction $t \to \langle v_t(x), z\rangle$ est dérivable en 0. Par le lemme 1, $t \to v_t(x)$ est de classe C^1. En particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application $s \to v_s(v_t(x))$ est dérivable en 0 ; donc $v_t(x) \in \mathrm{dom}(T)$.

Soient $x, y \in \mathrm{dom}(T)$; on a $\langle v_t(x), y\rangle = \langle x, v_{-t}(y)\rangle = \overline{\langle v_{-t}(y), x\rangle}$. La dérivée en 0 de $t \to \langle v_{-t}(y), x\rangle$ est $-i\langle T(y), x\rangle$. On a donc $i\langle T(x), y\rangle = \overline{-i\langle T(y), x\rangle} = i\langle x, T(y)\rangle$. On en déduit que $T \subset T^*$.

Enfin, soit $x \in \mathrm{dom}(T^*)$; pour tout $z \in \mathrm{dom}(T)$, on a $\langle v_t(x), z\rangle = \langle x, v_{-t}(z)\rangle$; donc $t \to \langle v_t(x), z\rangle$ est dérivable en 0 et sa dérivée est $i\langle x, T(z)\rangle = i\langle T^*(x), z\rangle$. Par le lemme 1, $x \in \mathrm{dom}(T)$ et $T(x) = T^*(x)$.

Passons au deuxième point. Soient (X, μ) un espace mesuré, $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et $u : L_2(X, \mu) \to H$ un isomorphisme d'espaces de Hilbert tels que l'on ait $T = u\,M_f\,u^*$ (théorème 4.4) ; pour $t \in \mathbb{R}$, notons $g_t : X \to \mathbb{C}$ l'application $\exp(itf)$; posons $v_t = u\,M_{g_t}\,u^*$. Comme $|g_t| = 1$, M_{g_t} est unitaire, donc v_t est unitaire ; comme $g_s g_t = g_{s+t}$, on a $v_s v_t = v_{s+t}$. Si $t_n \to t$, pour tout $\xi \in L_2(X, \mu)$ la suite de fonctions $g_{t_n}\xi$ converge partout vers $g_t\xi$, son module est constant égal à $|\xi|$; par le théorème de convergence dominée, $g_{t_n}\xi$ converge vers $g_t\xi$ dans L_2. Il en résulte que $t \to v_t$ est fortement continu ; c'est donc un groupe à un paramètre d'unitaires. Notons S son générateur infinitésimal. Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a $|g_t - 1| \leq |tf|$; si $\xi \in \mathrm{dom}(M_f)$, pour toute suite (t_n) tendant vers 0, la suite de fonctions $t_n^{-1}(g_{t_n}\xi - \xi)$ converge partout vers $if\xi$, son module est majoré par $|f\xi|$; par le théorème de convergence dominée, $t_n^{-1}(g_{t_n}\xi - \xi)$ converge vers $if\xi$ dans L_2. Donc $t \to g_t\xi$ est dérivable en 0 et sa dérivée est $if\xi$. On en déduit que $u\xi \in \mathrm{dom}(S)$ et $iS(u\xi) = u(if\xi)$. On a montré que $T = u\,M_f\,u^* \subset S$. On en déduit que $S = S^* \subset T^* = T$. Donc $T = S$.

Enfin, soit $(v_t)_{t\in\mathbb{R}}$ et $(w_t)_{t\in\mathbb{R}}$ deux groupes à un paramètre d'unitaires ayant même générateur infinitésimal T ; pour $x \in \mathrm{dom}(T)$ et $t \in \mathbb{R}$, on a $v_t(x) \in \mathrm{dom}(T)$, $T(v_t(x)) = v_t(T(x))$, et $w_t(x) \in \mathrm{dom}(T)$, $T(w_t(x)) = w_t(T(x))$. Posons $\varphi(t) = \|v_t(x) - w_t(x)\|^2$ pour tout t réel ; on a

$$\varphi(t) = \|v_t(x)\|^2 + \|w_t(x)\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle v_t(x), w_t(x)\rangle = 2(\|x\|^2 - \mathrm{Re}\langle v_t(x), w_t(x)\rangle)\,;$$

La fonction φ est alors dérivable en tout $t \in \mathbb{R}$ et l'on a

$$\varphi'(t) = -2\,\mathrm{Re}(\langle v_t(x), iT(w_t(x))\rangle + \langle iT(v_t(x)), w_t(x)\rangle).$$

Comme $T = T^*$, on a $\langle T(v_t(x)), w_t(x)\rangle = \langle v_t(x), T(w_t(x))\rangle$, donc $\varphi' = 0$. Comme $\varphi(0) = 0$, on trouve $\varphi(t) = 0$. Donc $v_t(x) = w_t(x)$. Comme $\mathrm{dom}(T)$ est dense, on en déduit $v_t = w_t$.

//

On a en fait montré que, si T est le générateur infinitésimal d'un groupe à un paramètre d'unitaires $(v_t)_{t\in\mathbb{R}}$, alors $v_t = \exp(itT)$.

Index

Adjoint (opérateur borné) . . . 81
Adjoint (opérateur non borné) . . . 153
Algèbre de Banach . . . 91
Antilinéaire (application) . . . 21
Application identique . . . 2
Application linéaire compacte . . . 107
Application linéaire inversible . . . 91
Application ouverte . . . 56
Application transposée . . . 18
Application linéaire continue . . . 8
Autoadjoint (opérateur borné) . . . 82
Autoadjoint (opérateur non borné) . . . 153
Axiome du choix . . . 59
Base de Haar . . . 27
Base hilbertienne . . . 26, 87
Bessel (inégalité de) . . . 25, 88
Bidual . . . 65
Boule ouverte, fermée . . . 4
Boule unité d'un espace normé . . . 5
Cauchy-Schwarz (inégalité de) . . . 22
Changement d'échelle . . . 50
Classe monotone . . . 36
Codimension . . . 113
Combinaison convexe . . . 3
Compact (ensemble faiblement) . . . 75
Compact (opérateur) . . . 68, 107
Complet (espace) . . . 7
Complété . . . 13, 15, 65
Complexifié . . . 16
Conjugué (exposant) . . . 37
Convergence vague . . . 78
Convexe (ensemble, fonction) . . . 3
Critère de sommabilité de Cauchy . . . 85
C*-algèbre . . . 98
Décomposition polaire . . . 132
Densité de Radon-Nikodym . . . 42
Dérivée généralisée . . . 24, 148
Dimension hilbertienne . . . 88
Domaine d'un opérateur . . . 145
Domaine essentiel . . . 149
Dual . . . 17, 61
Dual de C(K) . . . 45
Dual de ℓ_p . . . 39
Dual topologique . . . 17
Elément inversible . . . 91
Ensemble convexe, enveloppe convexe . . . 3
Equicontinu . . . 106
Equivalence de semi-normes . . . 9
Espace de Baire . . . 54
Espace de Banach . . . 6
Espace de Fréchet . . . 8
Espace de Hilbert . . . 23
Espace ℓ_p . . . 6

Espace L_p . . . 6, 34
Espace mesurable . . . 34
Espace normé . . . 4
Espace préhilbertien . . . 23
Espace réflexif . . . 65
Espace séparable . . . 18, 63
Espace vectoriel topologique . . . 5
Espérance conditionnelle . . . 29
Exposant conjugué . . . 37
Extension d'un opérateur . . . 145
Faible (topologie) . . . 73
Faiblement compact . . . 75
Famille sommable . . . 84
Fermeture d'un opérateur . . . 147
Fonction convexe . . . 3
Fonction en escalier . . . 37
Fonction holomorphe (vectorielle) . . . 94
Fonction indicatrice . . . 2
Fonction sous-linéaire . . . 58
Forme bilinéaire symétrique . . . 21
Forme hermitienne, hermitienne positive . . . 22
Forme sesquilinéaire . . . 21
Générateur infinitésimal . . . 160
Graphe d'un opérateur . . . 145
Groupe à un paramètre d'unitaires . . . 160
Hermitien (opérateur borné) . . . 82
Hermitienne (forme) . . . 22
Hilbert (espace de) . . . 24
Homomorphisme d'algèbres de Banach . . . 98
Image d'un opérateur (non borné) . . . 145
Indice d'un opérateur . . . 113
Inductif (ensemble ordonné) . . . 59
Inégalité de Bessel . . . 25, 88
Inégalité de Cauchy-Schwarz . . . 22
Inégalité de Hölder . . . 37
Inégalité triangulaire . . . 3
Initiale (topologie) . . . 71
Injection isométrique dans le bidual . . . 65
Inverse d'un opérateur non borné . . . 146
Inversible (élément) . . . 91
Isométrique (opérateur) . . . 83
Isomorphes (espaces) . . . 66
Jauge d'un ensemble convexe . . . 58
Lemme de Zorn . . . 59
Mesure complexe . . . 40, 46
Mesure de comptage . . . 34
Mesure de Dirac . . . 45
Mesure réelle . . . 40, 46
Métrisable . . . 33
Minimisation . . . 79
Module d'un opérateur . . . 131
Module de continuité . . . 33
Nombre conjugué . . . 37
Normal (opérateur) . . . 82
Norme . . . 3
Norme d'une application linéaire . . . 9

Norme uniforme 6, 33
Normes équivalentes 9
Noyau d'un opérateur non borné 145
Opérateur à trace 121
Opérateur adjoint 81
Opérateur autoadjoint 82
Opérateur compact 68, 107
Opérateur de Hilbert-Schmidt 117
Opérateur de shift 95, 102, 137
Opérateur densément défini 147
Opérateur fermable, opérateur fermé 147
Opérateur hermitien 82
Opérateur isométrique 83
Opérateur linéaire borné 9
Opérateur non borné 145
Opérateur normal 82
Opérateur nucléaire 121
Opérateur positif 82
Opérateur unitaire 82
Opérateurs unitairement équivalents 137
Orthogonal (projecteur) 29
Orthogonales (parties) 30
Orthogonalité 24, 30
Orthonormal (système de vecteurs) 24, 87
Parallélogramme (relation du) 22
Partie totale 19, 63
Partition de l'unité 33
Phase 132
Point interne 58
Positif (opérateur) 82
Positive (forme hermitienne) 22
Positivement homogène 3
Précompact 105
Préhilbertien (espace) 23
Problème de Dirichlet 1
Produit scalaire 22
Produits et quotients 11
Projecteur orthogonal 29
Projection orthogonale 25, 89
Prolongement d'une application linéaire 13
Propriété d'intersection finie 80
Quotient (espace) 12
Radon-Nikodym 31, 42
Rang fini (opérateur de) 63
Rayon spectral 95
Réflexif (espace) 65
Relation du parallélogramme 22
Relativement compact 105
Résolvante 93
Résolvante (cas non borné) 150
Riemann-Lebesgue (lemme de) 48
Riesz (théorème de) 68
σ-algèbre 36
Segment 3
Semi-norme 3
Semi-normes équivalentes 9

Séparable (espace) . . . 18
Séparé . . . 15
Série de vecteurs . . . 6
Série de vecteurs normalement convergente . . . 7
Séries de Fourier . . . 47
Sesquilinéaire (forme) . . . 21
Sobolev (espace de) . . . 24, 148
Somme d'une série de vecteurs . . . 6
Somme de deux opérateurs non bornés . . . 145
Somme de Minkowski de deux ensembles . . . 54
Sous-additive (fonction) . . . 3
Sous-linéaire (fonction) . . . 58
Spectre . . . 93
Spectre (opérateur non borné) . . . 150
Spectre continu, ponctuel, résiduel . . . 101, 151
Suite diagonale . . . 78
Suites faiblement convergentes . . . 76
Support d'une mesure . . . 139
Symétrique (forme bilinéaire) . . . 21
Système de vecteurs orthogonaux . . . 24, 87
Système de Walsh . . . 28
Théorème de Baire . . . 53
Théorème de Banach-Steinhaus . . . 57
Théorème de décomposition de Hahn . . . 42
Théorème de Fisher-Riesz . . . 35
Théorème de Hahn-Banach . . . 58–62
Théorème de l'application ouverte . . . 56
Théorème de projection . . . 28
Théorème de Radon-Nikodym . . . 42
Théorème de Riesz . . . 68
Théorème de Tykhonov . . . 75
Théorème des isomorphismes . . . 54
Théorème du graphe fermé . . . 56
Topologie $*$-faible sur le dual X^* . . . 75
Topologie associée à une famille de semi-normes . . . 72
Topologie de la norme . . . 4
Topologie du graphe . . . 149
Topologie faible . . . 71–73, 109
Topologie faible sur un espace normé . . . 73
Topologie forte sur $\mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ . . . 73
Topologie initiale . . . 71
Topologie $\sigma(\mathrm{X}^*, \mathrm{X})$ . . . 75
Totale (partie) . . . 19
Transformation de Fourier . . . 49
Transposée d'une application linéaire . . . 18
Tribu borélienne . . . 36, 45
Ultrafiltre . . . 80
Uniformément équicontinu . . . 106
Unitaire (opérateur) . . . 82
Unitairement équivalents (opérateurs) . . . 137
Valeur régulière . . . 150
Variation totale . . . 40
Zorn (lemme de) . . . 59

Index des notations

0_{X} : vecteur nul de l'espace vectoriel X . . . 2
$\mathbf{1}_{\mathrm{A}}$: fonction indicatrice du sous-ensemble A . . . 2
1_{A} : unité de l'algèbre A . . . 91
$\mathrm{A}^{\perp}$: orthogonal de A (sous-ensemble d'un Hilbert) . . . 30
A^{c} : complémentaire du sous-ensemble A . . . 2
$\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2$: somme de Minkowski de deux ensembles . . . 54
$\mathrm{B}(x, r)$: boule ouverte de centre x, rayon r . . . 4
B_{X} : boule unité de l'espace normé X . . . 5
$\mathrm{C}(\mathrm{K})$: espace des fonctions continues sur K . . . 6
$\mathrm{co}(\mathrm{A})$: enveloppe convexe de l'ensemble A . . . 3
c_0 : espace des suites qui tendent vers 0 . . . 6
Δ_α : opérateur diagonal . . . 82
δ_{t_0} : mesure de Dirac au point t_0 . . . 45
$\|f\|_p$, $\|f\|_\infty$: norme de f dans L_p, dans L_∞ . . . 34, 35
$\mathrm{Gr}(\mathrm{T})$: graphe de l'opérateur T . . . 145
Id_{X} : application identique sur X . . . 2
$\mathrm{im}(\mathrm{T})$: image de l'opérateur T . . . 64
$\mathrm{ind}(\mathrm{T})$: indice de l'opérateur T . . . 113
i_{K} : fonction $z \to z$ sur $\mathrm{K} \subset \mathbb{C}$ . . . 126
$j_{\mathrm{C}}(x)$: jauge de l'ensemble convexe C . . . 58
J_q : isométrie de ℓ_q dans le dual de ℓ_p . . . 40
j_q : isométrie de L_q dans le dual de L_p . . . 44
J_{X} : application canonique de X dans son bidual . . . 65
$\mathcal{K}(\mathrm{E})$, $\mathcal{K}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$: espace des opérateurs compacts de E, ou de E dans F . . . 107
ℓ_∞ : espace des suites bornées . . . 6, 35
ℓ_p : espace des suites de puissance $p$ième sommable . . . 6
$\mathcal{L}(\mathrm{H})_+$: opérateurs positifs . . . 131
$\mathcal{L}(\mathrm{X})$, $\mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$: espace des applications linéaires continues . . . 9
$\mathcal{L}^1(\mathrm{E})$, $\mathcal{L}^1(\mathrm{E}, \mathrm{F})$: opérateurs nucléaires . . . 120
$\mathcal{L}^2(\mathrm{E}, \mathrm{F})$: opérateurs de Hilbert-Schmidt de E dans F . . . 117
$\mathrm{L}_\infty(\Omega, \mu)$: fonctions mesurables bornées . . . 35
$\mathcal{L}_p$: espace de fonctions de puissance $p$ième intégrable . . . 4
L_p, $\mathrm{L}_p(\Omega, \mu)$: espace de classes de fonctions de puissance $p$ième intégrable . . . 6, 34
M_f : application de multiplication par f . . . 10, 138
P_{F} : projecteur orthogonal sur F . . . 29
$\rho(a)$: rayon spectral de $a \in \mathrm{A}$ . . . 95
$\mathrm{R}_\lambda(a)$: résolvante de $a \in \mathrm{A}$ . . . 93
$\sigma(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$: topologie faible . . . 73
$\sigma(\mathrm{X}, \mathrm{X}^*)$, $\sigma(\mathrm{X}^*, \mathrm{X})$: topologie faible sur X, $*$-faible sur X^* . . . 73, 75
$\mathrm{Sp}(a)$: spectre de l'élément $a \in \mathrm{A}$ . . . 93
$\mathrm{Sp}_c(\mathrm{T})$, $\mathrm{Sp}_p(\mathrm{T})$, $\mathrm{Sp}_r(\mathrm{T})$: spectre continu, ponctuel, résiduel de T . . . 101
$\|\mathrm{T}\|_{\mathcal{L}(\mathrm{X},\mathrm{Y})}$: norme de l'application linéaire T . . . 9
$|\mathrm{T}|$: module de l'opérateur T . . . 131
$\mathrm{Tr}(\mathrm{T})$: trace de l'opérateur nucléaire T . . . 120
${}^t\mathrm{T}$: transposée de l'application linéaire T . . . 18
T^* : adjoint de l'application linéaire T . . . 81
$\mathrm{Vect}(y_1, \ldots, y_n)$: sous-espace vectoriel engendré . . . 19
$\|x\|$, $\|x\|_{\mathrm{X}}$: norme du vecteur $x \in \mathrm{X}$ . . . 5
$\langle x, y \rangle$: produit scalaire de x et y . . . 22
X^* : dual de l'espace normé X . . . 17
X^{**} : bidual de l'espace normé X . . . 65
$\|x\|_p$, $\|x\|_\infty$: norme de x dans ℓ_p, dans ℓ_∞ . . . 6