6. Opérateurs bornés sur les espaces de Hilbert

On a déjà revu l'essentiel des propriétés des espaces de Hilbert dans le chapitre 3, en particulier l'existence de base orthonormée pour tout espace de Hilbert séparable. Dans ce chapitre, on va généraliser la notion de base hilbertienne au cas non séparable ; l'outil essentiel pour cette extension est la notion de *famille sommable* de vecteurs d'un espace normé. On introduira aussi dans ce chapitre les principales classes d'opérateurs bornés entre espaces de Hilbert.

6.1. Applications linéaires continues entre espaces de Hilbert

On commence avec la notion essentielle d'application linéaire *adjointe* associée à une application linéaire continue T entre deux espaces de Hilbert ; plusieurs des classes particulières d'opérateurs bornés sur les espaces de Hilbert seront ensuite définies au moyen de cette notion.

Proposition 6.1.1. *Soient* E *et* F *deux espaces de Hilbert et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *; il existe un unique* $\mathrm{T}^* \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{E})$ *tel que pour tout* $x \in \mathrm{E}$ *et tout* $y \in \mathrm{F}$ *on ait*

$$\langle \mathrm{T}(x), y \rangle = \langle x, \mathrm{T}^*(y) \rangle.$$

On a de plus $\|\mathrm{T}^*\| = \|\mathrm{T}\|$.

Démonstration. Pour tout $y \in \mathrm{F}$, l'application $x \to \langle \mathrm{T}(x), y \rangle$ est linéaire et continue. Il existe donc un unique élément $\mathrm{T}^*(y) \in \mathrm{E}$ tel que pour tout $x \in \mathrm{E}$ on ait $\langle \mathrm{T}(x), y \rangle = \langle x, \mathrm{T}^*(y) \rangle$. On vérifie facilement que $\mathrm{T}^*(y) + \lambda \mathrm{T}^*(z)$ vérifie la propriété caractéristique de $\mathrm{T}^*(y + \lambda z)$, pour tous $y, z \in \mathrm{F}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, d'où l'on déduit que T^* est linéaire. On a, par définition de $\|\mathrm{T}\|$ et par la proposition 2.2.1

$$\begin{aligned}\|\mathrm{T}^*\| &= \sup\{\|\mathrm{T}^*(y)\| : y \in \mathrm{B}_\mathrm{F}\} = \sup\{\langle x, \mathrm{T}^*(y) \rangle : x \in \mathrm{B}_\mathrm{E},\ y \in \mathrm{B}_\mathrm{F}\} \\ &= \sup\{\langle \mathrm{T}(x), y \rangle : x \in \mathrm{B}_\mathrm{E},\ y \in \mathrm{B}_\mathrm{F}\} = \|\mathrm{T}\|.\end{aligned}$$

//

Rapport avec ${}^t\mathrm{T}$. Désignons par h_E l'isomorphisme antilinéaire d'un espace de Hilbert E sur son dual E^*. Si E et F sont deux espaces de Hilbert et si $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, la transposée est linéaire de F^* dans E^* et elle est reliée à l'adjoint T^* par la formule

$$\mathrm{T}^* = h_\mathrm{E}^{-1}\,({}^t\mathrm{T})\,h_\mathrm{F}.$$

Définition 6.1.1. Soient E et F deux espaces de Hilbert et $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$; l'unique application linéaire $\mathrm{T}^* \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{E})$ tel que pour tout $x \in \mathrm{E}$ et tout $y \in \mathrm{F}$ on ait $\langle \mathrm{T}(x), y \rangle = \langle x, \mathrm{T}^*(y) \rangle$ est appelée *adjointe* de T.

Regroupons dans la proposition suivante quelques propriétés des adjoints.

Proposition 6.1.2. *Soient* E *et* F *deux espaces de Hilbert ; l'application* $\mathrm{T} \to \mathrm{T}^*$ *est antilinéaire et isométrique de* $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *sur* $\mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{E})$ *; pour tout* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *on a* $(\mathrm{T}^*)^* = \mathrm{T}$ *et* $\|\mathrm{T}^* \circ \mathrm{T}\| = \|\mathrm{T}\|^2$. *Pour tout espace de Hilbert* H, *tout* $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *et tout* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{H})$ *on a* $(\mathrm{T} \circ \mathrm{S})^* = \mathrm{S}^* \circ \mathrm{T}^*$.

Démonstration. Montrons que $\|\mathrm{T}^* \circ \mathrm{T}\| = \|\mathrm{T}\|^2$. On a $\|\mathrm{T}^* \circ \mathrm{T}\| \le \|\mathrm{T}^*\| \, \|\mathrm{T}\| = \|\mathrm{T}\|^2$. De plus, pour tout $x \in \mathrm{E}$ tel que $\|x\| \le 1$ on a

$$\|\mathrm{T}(x)\|^2 = \langle \mathrm{T}(x), \mathrm{T}(x) \rangle = \langle x, \mathrm{T}^* \circ \mathrm{T}(x) \rangle \le \|\mathrm{T}^* \circ \mathrm{T}\|$$

grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, d'où résulte $\|\mathrm{T}\|^2 \le \|\mathrm{T}^* \circ \mathrm{T}\|$ et l'égalité cherchée. Les autres propriétés sont laissées en exercice.

//

Exemples 6.1.2.

1. Opérateur diagonal dans une base orthonormée (h_n) de H : soit $\alpha = (\alpha_n)$ une suite bornée de scalaires et définissons Δ_α sur H par

$$\forall c = (c_n) \in \ell_2, \quad \Delta_\alpha\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n h_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n c_n h_n.$$

On voit que Δ_α est continu et que $\|\Delta_\alpha\| = \|\alpha\|_\infty$. On vérifie que l'adjoint est donné par l'opérateur diagonal associé à la suite complexe conjuguée, $\Delta_\alpha^* = \Delta_{\overline{\alpha}}$.

Si f est une fonction complexe, mesurable bornée sur (Ω, μ), on définit l'opérateur de multiplication M_f par $\mathrm{M}_f(g) = fg$ pour toute $g \in \mathrm{L}_2(\Omega, \mu)$. On vérifie que M_f est borné sur $\mathrm{L}_2(\Omega, \mu)$, et $\mathrm{M}_f^* = \mathrm{M}_{\overline{f}}$.

2. Shift S sur $\mathrm{H} = \ell_2(\mathbb{Z})$ ou bien $\mathrm{H} = \ell_2(\mathbb{N})$. Pour tout vecteur $x \in \mathrm{H}$ on définit un nouveau vecteur Sx obtenu par *décalage à droite*, défini par $(\mathrm{S}x)_n = x_{n-1}$ pour tout n dans le cas $\mathbb{Z}$ et dans le cas $\mathbb{N}$, on pose $(\mathrm{S}x)_n = x_{n-1}$ pour tout $n \ge 1$, et $(\mathrm{S}x)_0 = 0$; dans le cas de $\ell_2(\mathbb{Z})$, on trouve $(\mathrm{S}^*y)_n = y_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on vérifie que $\mathrm{S}^*\mathrm{S} = \mathrm{S}\mathrm{S}^* = \mathrm{Id}$. Dans le cas $\ell_2(\mathbb{N})$, on a aussi $(\mathrm{S}^*y)_n = y_{n+1}$, mais pour $n \ge 0$; dans ce cas S^* n'est plus l'inverse de S, mais on a encore $\mathrm{S}^*\mathrm{S} = \mathrm{Id}$.

Proposition 6.1.3. *Soient* E *et* F *deux espaces de Hilbert et soit* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *; alors* $\ker \mathrm{T}^* = (\mathrm{T}(\mathrm{E}))^\perp$ *et l'adhérence de* $\mathrm{T}^*(\mathrm{F})$ *est* $(\ker \mathrm{T})^\perp$.

Démonstration. Si $y \in \mathrm{F}$, on voit que $y \in \ker \mathrm{T}^*$ si et seulement si pour tout $x \in \mathrm{E}$, on a $0 = \langle \mathrm{T}^*(y), x \rangle = \langle y, \mathrm{T}(x) \rangle$; clairement, ceci équivaut à dire que $y \in (\mathrm{T}(\mathrm{E}))^\perp$, d'où la première assertion. Il en résulte (par la proposition 2.3.4) que $\overline{\mathrm{T}(\mathrm{E})} = (\ker \mathrm{T}^*)^\perp$, d'où la deuxième assertion en remplaçant T par son adjoint.

//

Définition 6.1.3. Soient E et F deux espaces de Hilbert ; un élément $\mathrm{U} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est appelé *unitaire* si $\mathrm{U}^* \circ \mathrm{U} = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ et $\mathrm{U} \circ \mathrm{U}^* = \mathrm{Id}_\mathrm{F}$. Un élément $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est appelé *normal* si $\mathrm{T}^* \circ \mathrm{T} = \mathrm{T} \circ \mathrm{T}^*$, *hermitien* ou *autoadjoint* si $\mathrm{T} = \mathrm{T}^*$ et *positif* s'il est hermitien et si $\langle \mathrm{T}(x), x \rangle$ est réel ≥ 0 pour tout $x \in \mathrm{E}$.

Exemples 6.1.4.

1. Soient H un espace de Hilbert, $P \in \mathcal{L}(H)$ un projecteur orthogonal ; notons F son image. Pour $x, x' \in F$ et $y, y' \in F^\perp$ on a $\langle P(x+y), x'+y'\rangle = \langle x, x'\rangle = \langle x+y, P(x'+y')\rangle$, donc $P = P^*$. De plus, $\langle P(x+y), x+y\rangle = \langle x, x\rangle$ est réel ≥ 0, donc P est positif.

2. Les opérateurs diagonaux Δ_α de l'exemple 2 sont normaux car on voit facilement que

$$\Delta_\alpha \Delta_\alpha^* = \Delta_\alpha \Delta_{\overline{\alpha}} = \Delta_{\alpha\overline{\alpha}} = \Delta_{\overline{\alpha}} \Delta_\alpha = \Delta_\alpha^* \Delta_\alpha.$$

Pour la même raison les opérateurs de multiplication M_f sont normaux.

3. On dit que $U \in \mathcal{L}(E, F)$ est *isométrique* si $\|U(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$. On vérifie facilement que U est isométrique si et seulement si $U^* U = \mathrm{Id}_E$. En effet, si $U^* \circ U = \mathrm{Id}_E$, alors pour tout $x \in E$ on a $\|U(x)\|^2 = \langle U(x), U(x)\rangle = \langle x, U^*(U(x))\rangle = \|x\|^2$. La réciproque utilise la formule de polarisation (voir la démonstration ci-dessous). Le shift de l'exemple 2 est isométrique ; dans le cas de $\ell_2(\mathbb{Z})$ il est aussi unitaire.

4. Pour tout opérateur borné $T \in \mathcal{L}(E, F)$ entre deux Hilbert, T^*T est hermitien : en effet, $(T^*T)^* = T^*T^{**} = T^*T$; de plus T^*T est positif, puisque $\langle T^*T(x), x\rangle = \|T(x)\|^2$ pour tout $x \in E$. En particulier, A^2 est positif pour tout hermitien $A \in \mathcal{L}(E)$.

Proposition 6.1.4. *Soient* E *et* F *deux espaces de Hilbert et* $T \in \mathcal{L}(E, F)$ *; les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) *l'opérateur* T *est unitaire ;*
(*ii*) *l'opérateur* T *est surjectif et* $T^* \circ T = \mathrm{Id}_E$ *;*
(*iii*) *l'opérateur* T *est une isométrie de* E *sur* F.

Démonstration. Si T est unitaire, comme $T \circ T^* = \mathrm{Id}_F$, l'opérateur T est surjectif, donc $(i) \Rightarrow (ii)$. Si $T^* \circ T = \mathrm{Id}_E$, alors pour tout $x \in E$ on a $\|T(x)\|^2 = \|x\|^2$, donc $(ii) \Rightarrow (iii)$. Enfin, supposons que T soit une isométrie de E sur F, c'est à dire que pour tout $x \in E$ on ait $\langle x, x\rangle = \langle T(x), T(x)\rangle$; comme

$$(x, y) \to \langle x, T^*(T(y))\rangle = \langle Tx, Ty\rangle$$

est un produit scalaire sur E, il résulte de la proposition 2.1.1 que, pour tous $x, y \in E$, on a $\langle x, T^*(T(y))\rangle = \langle x, y\rangle$, ce qui implique $T^*(T(y)) = y$, c'est à dire que $T^* \circ T = \mathrm{Id}_E$. Comme par l'hypothèse (*iii*) l'application T est bijective, $T^* = T^{-1}$, d'où (*i*). //

Lemme 6.1.5. *Si* $T \in \mathcal{L}(H)$ *est normal, on a* $\ker T = \ker T^*$.

Démonstration. Si T est normal on a pour tout $x \in H$

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = \langle TT^*x, x\rangle = \|T^*(x)\|^2.$$

//

Proposition 6.1.6. *Si* $T \in \mathcal{L}(H)$ *est normal, on a* $H = \ker(T) \oplus \overline{\mathrm{im}(T)}$, *et la somme est une somme orthogonale.*

Démonstration. On sait que $\ker(T^*)^\perp = \overline{\mathrm{im}(T^{**})} = \overline{\mathrm{im}(T)}$, donc

$$H = \ker(T^*) \oplus \ker(T^*)^\perp = \ker(T) \oplus \overline{\mathrm{im}(T)}.$$

//

6.2. Familles sommables dans un espace de Banach

Définition 6.2.1. Soient X un espace normé, I un ensemble et $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une famille d'éléments de X ; on dit que la famille $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est *sommable* de somme $\mathrm{S} \in \mathrm{X}$ et on écrit $\mathrm{S} = \sum_{i\in \mathrm{I}} x_i$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J de I telle que, pour toute partie finie K de I contenant J on ait $\left\|\mathrm{S} - \sum_{i\in \mathrm{K}} x_i\right\| < \varepsilon$.

La somme S est unique : remarquons que si S et S′ sont deux éléments de E vérifiant ces conditions, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des parties finies J et J′ de I telles que, pour toute partie finie K de I contenant J (resp. J′) on ait $\left\|\mathrm{S} - \sum_{i\in \mathrm{K}} x_i\right\| < \varepsilon$ (resp. $\left\|\mathrm{S}' - \sum_{i\in \mathrm{K}} x_i\right\| < \varepsilon$). Prenant $\mathrm{K} = \mathrm{J} \cup \mathrm{J}'$ on trouve $\|\mathrm{S} - \mathrm{S}'\| < 2\varepsilon$. Cela étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit $\mathrm{S} = \mathrm{S}'$.

Il est facile de vérifier que si $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ et $(y_i)_{i\in \mathrm{I}}$ sont deux familles sommables, la famille $(x_i + y_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est elle aussi sommable, avec une somme égale à la somme des deux sommes. Considérons pour commencer le cas des familles sommables de nombres réels, et d'abord de réels ≥ 0.

Proposition 6.2.1. *Une famille de nombres réels à termes positifs est sommable si et seulement si les sommes finies sont majorées ; sa somme est alors la borne supérieure de l'ensemble des sommes finies. Une famille $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ à termes réels est sommable si et seulement si elle est absolument sommable, c'est à dire si la famille $(|x_i|)_{i\in \mathrm{I}}$ est sommable.*

Démonstration. Si $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est sommable, et $x_i \geq 0$ pour tout $i \in \mathrm{I}$, on aura, en prenant $\varepsilon = 1$ dans la définition, l'existence d'un ensemble fini $\mathrm{J}_0 \subset \mathrm{I}$ tel que $|\mathrm{S} - \sum_{i\in \mathrm{K}} x_i| \leq 1$ pour tout ensemble fini K contenant J_0. Pour tout $\mathrm{L} \subset \mathrm{I}$ fini on aura alors

$$\sum_{i\in \mathrm{L}} x_i \leq \sum_{i\in \mathrm{L}\cup \mathrm{J}_0} x_i \leq \mathrm{S} + 1,$$

ce qui montre que l'ensemble Σ des sommes finies est majoré. Réciproquement, lorsque l'ensemble Σ est majoré, il est assez facile de montrer que la somme de la famille est égale à la borne supérieure de l'ensemble Σ.

Supposons maintenant que $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est sommable à termes réels quelconques, et choisissons J_0 comme ci-dessus. Soit I^+ l'ensemble des indices $i \in \mathrm{I}$ tels que $x_i > 0$, et soit $\mathrm{L} \subset \mathrm{I}^+$ un ensemble fini, disjoint de J_0. On aura

$$\Big|\mathrm{S} - \sum_{i\in \mathrm{L}\cup \mathrm{J}_0} x_i\Big| = \Big|\mathrm{S} - \sum_{i\in \mathrm{L}} x_i - \sum_{i\in \mathrm{J}_0} x_i\Big| \leq \varepsilon = 1,$$

ce qui implique que les sommes finies dans $\mathrm{I}^+ \setminus \mathrm{J}_0$ sont majorées par la quantité $|\mathrm{S}| + |\sum_{i\in \mathrm{J}_0} x_i| + 1$. Il en résulte par la première partie que la famille $(x_i)_{i\in \mathrm{I}^+}$ est sommable, et le même raisonnement s'applique aux termes < 0 de la famille. Il en résulte que la famille $(|x_i|)_{i\in \mathrm{I}}$ est sommable.

//

Plus généralement, si E est de dimension finie, la famille $(x_n)_{n\geq 0}$ est sommable si et seulement si la série $\sum x_n$ est normalement convergente (exercice). En revanche, dans un espace de Banach de dimension infinie, il existe toujours des familles sommables de vecteurs qui ne sont pas sommables en norme (exercice infaisable).

La proposition suivante est laissée en exercice :

Proposition 6.2.2. *Soient* X *et* Y *deux espaces normés,* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *et* $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *une famille sommable d'éléments de* X *; alors la famille* $(\mathrm{T}(x_i))_{i \in \mathrm{I}}$ *est sommable dans* Y *et on a* $\sum_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{T}(x_i) = \mathrm{T}(\sum_{i \in \mathrm{I}} x_i)$.

Soient X un espace normé et $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une famille d'éléments de X ; on dit que la famille $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ vérifie le *critère de sommabilité de Cauchy* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J de I telle que, pour toute partie finie L de I disjointe de J, on ait $\left\| \sum_{i \in \mathrm{L}} x_i \right\| < \varepsilon$.

Proposition 6.2.3.

(*i*) *Toute famille sommable d'un espace normé vérifie le critère de sommabilité de Cauchy.*

(*ii*) *Dans un espace de Banach, toute famille vérifiant le critère de sommabilité de Cauchy est sommable.*

Démonstration. Soit $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une famille sommable d'éléments d'un espace normé X, et notons S sa somme ; soient $\varepsilon > 0$ et J une partie finie de I telle que, pour toute partie finie K de I contenant J on ait $\left\| \mathrm{S} - \sum_{i \in \mathrm{K}} x_i \right\| < \varepsilon/2$; si L est une partie finie de I disjointe de J, on a

$$\Big\| \sum_{i \in \mathrm{L}} x_i \Big\| = \Big\| \Big(\mathrm{S} - \sum_{i \in \mathrm{J}} x_i \Big) - \Big(\mathrm{S} - \sum_{i \in \mathrm{L} \cup \mathrm{J}} x_i \Big) \Big\| < \varepsilon,$$

ce qui montre que le critère de Cauchy est vérifié. Soient E un espace de Banach et $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une famille d'éléments de E vérifiant le critère de sommabilité de Cauchy ; il existe une suite (J_n) de parties finies de I telles que, pour tout entier $n \geq 0$ et toute partie finie J de I disjointe de J_n, on ait $\left\| \sum_{i \in \mathrm{J}} x_i \right\| < 2^{-n}$. Posons $\mathrm{K}_n = \bigcup_{k=0}^{n} \mathrm{J}_k$ et $\mathrm{S}_n = \sum_{i \in \mathrm{K}_n} x_i$; pour n, m entiers, avec $n \leq m$, on a

$$\|\mathrm{S}_m - \mathrm{S}_n\| = \Big\| \sum_{i \in \mathrm{K}_m \setminus \mathrm{K}_n} x_i \Big\| \leq 2^{-n},$$

vu que $\mathrm{K}_m \setminus \mathrm{K}_n$ est disjoint de J_n. La suite (S_n) étant de Cauchy, elle converge. Soit S sa limite ; pour $m \geq n$ on a $\|\mathrm{S}_m - \mathrm{S}_n\| \leq 2^{-n}$. Faisant tendre m vers l'infini, on en déduit que $\|\mathrm{S} - \mathrm{S}_n\| \leq 2^{-n}$. Si J est une partie finie contenant K_n, on a alors

$$\Big\| \mathrm{S} - \sum_{i \in \mathrm{J}} x_i \Big\| = \Big\| (\mathrm{S} - \mathrm{S}_n) + \Big(\mathrm{S}_n - \sum_{i \in \mathrm{J}} x_i \Big) \Big\| \leq 2^{-n} + \Big\| \sum_{i \in \mathrm{J} \setminus \mathrm{K}_n} x_i \Big\| \leq 2^{-n+1}$$

vu que $\mathrm{J} \setminus \mathrm{K}_n$ est disjoint de J_n. On a montré que la famille $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est sommable de somme S.

//

Remarque 6.2.2. Soient X un espace normé, $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une famille d'éléments de X, $\varepsilon > 0$ et J une partie finie de I telle que, pour toute partie finie L de I disjointe de J, on ait $\left\| \sum_{i \in \mathrm{L}} x_i \right\| < \varepsilon$. En considérant des parties L à un seul élément, on voit que, pour tout $i \in \mathrm{I} \setminus \mathrm{J}$, $\|x_i\| < \varepsilon$. Donc, si $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ vérifie le critère de sommabilité de Cauchy, pour tout entier $n \geq 1$, il n'y a qu'un nombre fini d'indices i tels que x_i soit de norme $\geq 1/n$; donc il y a un nombre dénombrable de x_i non nuls. En d'autres termes, on peut toujours se ramener au cas $\mathrm{I} = \mathbb{N}$.

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une famille sommable, et notons S sa somme ; soient $\varepsilon > 0$ et $\mathrm{J} \subset \mathbb{N}$ une partie finie telle que, pour toute partie finie K de $\mathbb{N}$ contenant J on ait $\left\|\mathrm{S} - \sum_{i\in\mathrm{K}} x_i\right\| < \varepsilon$; soit $m \in \mathbb{N}$ un majorant de J ; pour tout $n \geq m$, comme $\mathrm{J} \subset \{0, 1, \dots, n\}$ on a $\left\|\mathrm{S} - \sum_{i=0}^{n} x_i\right\| < \varepsilon$. Donc la série de terme général (x_n) est convergente et sa somme est égale à S. La notation $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ n'est donc pas en conflit avec la notation des séries.

Corollaire 6.2.4. *Soient* E *un espace de Banach et* $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une famille d'éléments de* E *;*

(i) soit $(t_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une famille de nombres réels ; si pour tout* $i \in \mathrm{I}$*, on a* $\|x_i\| \leq t_i$ *et si la famille* $(t_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *est sommable, alors la famille* $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *est sommable. En particulier, si la famille* $(\|x_i\|)_{i\in\mathrm{I}}$ *est sommable, alors la famille* $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *est sommable ;*

(ii) si la famille $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *est sommable, pour toute partie* $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$*, la famille* $(x_i)_{i\in\mathrm{J}}$ *est sommable.*

Démonstration. Si la famille de réels $(t_i)_{i\in\mathrm{I}}$ vérifie le critère de sommabilité de Cauchy, il en va clairement de même pour la famille de vecteurs $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ (inégalité triangulaire), et ceci montre le point (*i*). Si $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ vérifie le critère de sommabilité de Cauchy, il en va clairement de même pour la sous-famille $(x_i)_{i\in\mathrm{J}}$.

//

Remarque 6.2.3. On peut plus généralement définir les familles sommables dans un espace vectoriel topologique séparé X : une famille $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est dite sommable de somme $\mathrm{S} \in \mathrm{X}$, si, pour tout voisinage V de S dans X, il existe une partie finie J de I telle que, pour toute partie finie K de I contenant J on ait $\sum_{i\in\mathrm{K}} x_i \in \mathrm{V}$. Dans ce contexte vectoriel topologique, il peut arriver qu'une famille sommable ait une infinité non dénombrable d'éléments non nuls.

Dans un espace de Hilbert, on dispose d'un outil très simple pour tester la sommabilité d'une famille de vecteurs deux à deux orthogonaux, appelée aussi *système orthogonal*.

Lemme 6.2.5. *Soit* $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *un système orthogonal dans un espace de Hilbert ; la famille* (x_i) *est sommable si et seulement si la famille* $(\|x_i\|^2)$ *est sommable ; dans ce cas, on a*

$$\Big\|\sum_{i\in\mathrm{I}} x_i\Big\|^2 = \sum_{i\in\mathrm{I}} \|x_i\|^2.$$

Démonstration. Pour toute partie finie J de I, on a $\|\sum_{i\in\mathrm{J}} x_i\|^2 = \sum_{i\in\mathrm{J}} \|x_i\|^2$. On en déduit que la famille (x_i) vérifie le critère de Cauchy de sommabilité si et seulement si la famille $(\|x_i\|^2)$ vérifie le critère de Cauchy de sommabilité. Dans ce cas, il existe une suite croissante J_n de parties finies de I telles que $\mathrm{S} = \sum_{i\in\mathrm{I}} x_i$ soit la limite de $\mathrm{S}_n = \sum_{i\in\mathrm{J}_n} x_i$ et $\sum_{i\in\mathrm{I}} \|x_i\|^2$ soit la limite de $\sum_{i\in\mathrm{J}_n} \|x_i\|^2$. Mais alors

$$\|\mathrm{S}\|^2 = \lim_n \|\mathrm{S}_n\|^2 = \sum_{i\in\mathrm{I}} \|x_i\|^2.$$

//

6.3. Bases hilbertiennes

Disons quelques mots sur les espaces de Hilbert non séparables, qui demandent une généralisation de la notion de *suite* orthonormée. Soit I un ensemble d'indices non dénombrable, et soit H l'espace des familles $x = (x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de scalaires telles que l'ensemble des $i \in \mathrm{I}$ tels que $x_i \neq 0$ soit un ensemble dénombrable $\mathrm{J}(x)$, et telles que $\sum_{i \in \mathrm{J}(x)} |x_i|^2 < +\infty$. Si x et y sont de telles familles, le produit $x_i y_i$ est nul sauf pour au plus un ensemble dénombrable d'indices J, et $|x_i y_i| \leq \frac{1}{2}(x_i^2 + y_i^2)$, ce qui permet de poser

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in \mathrm{J}} x_i y_i,$$

le résultat ne dépendant pas de l'ensemble dénombrable J qui contient tous les indices i tels que $x_i y_i \neq 0$. On obtient ainsi un exemple d'espace de Hilbert non séparable, qui sera traité plus en détail à la section 6.4.

On a vu au chapitre 3 que l'espace $\mathrm{L}_2(\Omega, \mu)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(s)\overline{g(s)}\, d\mu(s)$. Il est possible que cet espace soit non séparable, même si la mesure μ est une probabilité.

Définition 6.3.1. Soient E un espace de Hilbert et $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ un système de vecteurs de E ; on dit que le système $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est *orthogonal* si les x_i sont deux à deux orthogonaux ; on dit que c'est un *système orthonormal* si de plus, pour tout $i \in \mathrm{I}$, on a $\|x_i\| = 1$; on appelle *base hilbertienne* de E un système orthonormal total dans E.

Un sous-ensemble B de E définit un système $(b)_{b \in \mathrm{B}}$. On dira que le sous-ensemble B est orthogonal, orthonormal, ou que c'est une base hilbertienne si le système $(b)_{b \in \mathrm{B}}$ est orthogonal, orthonormal, ou est une base hilbertienne. Ce procédé *d'auto-indexation* simplifie l'écriture de la démonstration qui suit.

Théorème 6.3.1. *Tout espace de Hilbert admet une base hilbertienne.*

Démonstration. Soit H un espace de Hilbert ; notons $\mathrm{U} \subset \mathcal{P}(\mathrm{H})$ l'ensemble des parties orthonormales. Montrons que, muni de l'ordre de l'inclusion, U est inductif : soit $\{\mathrm{B}_i : i \in \mathrm{I}\}$ une partie totalement ordonnée de U ; si $x, y \in \bigcup_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{B}_i$, il existe un indice $j \in \mathrm{I}$ tel que $x, y \in \mathrm{B}_j$ donc $\langle x, x \rangle = 1$ et si $x \neq y$ alors $\langle x, y \rangle = 0$; il s'ensuit que $\bigcup_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{B}_i$ est un élément de U majorant $\{\mathrm{B}_i : i \in \mathrm{I}\}$.

Soit B un élément maximal de U ; on veut montrer que B est total, et pour cela, on montre que $\mathrm{B}^\perp = \{0\}$; sinon, il existerait un vecteur x non nul et orthogonal à B (en particulier $x \notin \mathrm{B}$), et quitte à multiplier x par un scalaire convenable on peut supposer $\|x\| = 1$; alors $\mathrm{B} \cup \{x\} \in \mathrm{U}$, ce qui contredirait la maximalité de B. Donc $\mathrm{B}^\perp = \{0\}$, ce qui entraîne que $(\mathrm{B}^\perp)^\perp = \mathrm{H}$. Par la proposition 2.3.4, B est total. C'est donc une base hilbertienne.

//

Remarque 6.3.2. Dans le cas séparable, on a donné une démonstration plus concrète de ce théorème dans le chapitre 3.

Théorème 6.3.2 : inégalité de Bessel. *Soient* E *un espace de Hilbert et* $(e_i)_{i\in \mathrm{I}}$ *un système orthonormal dans* E *; pour tout* $x \in \mathrm{E}$ *la famille* $(|\langle x, e_i\rangle|^2)_{i\in\mathrm{I}}$ *est sommable et*

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} |\,\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle.$$

Démonstration. Par la proposition 2.1, il suffit de montrer que, pour toute partie finie J de I, on a $\sum_{i\in\mathrm{J}} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle$. Ce résultat a été vu au lemme 2.2.5.

//

Proposition 6.3.3. *Le cardinal de tout système orthonormal d'un espace de Hilbert est inférieur ou égal à celui de tout système total.*

Démonstration. Soient $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ un système orthonormal et $(x_j)_{j\in\mathrm{J}}$ un système total dans E hilbertien ; si J est fini, l'espace E est de dimension finie puisque $(x_j)_{j\in\mathrm{J}}$ est un système générateur fini pour E. Comme le système $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est libre, on trouve que le cardinal de I est inférieur ou égal à celui de J.

Supposons J infini. Posons $\mathrm{X} = \{(i, j) \in \mathrm{I} \times \mathrm{J} : \langle e_i, x_j\rangle \neq 0\}$. Pour $i \in \mathrm{I}$, comme $(x_j)_{j\in\mathrm{J}}$ est total, e_i n'est pas orthogonal à tous les x_j. Donc l'application $(i, j) \to i$ est surjective de X sur I. Donc le cardinal de I est majoré par le cardinal de X. Pour $j \in \mathrm{J}$, la famille $(|\langle e_i, x_j\rangle|^2)_{i\in\mathrm{I}}$ est sommable (par le théorème 2), donc $\{i : (i, j) \in \mathrm{X}\}$ est dénombrable. On en déduit qu'il existe une injection de X dans $\mathrm{J} \times \mathbb{N}$. Donc le cardinal de X est inférieur ou égal à celui de J.

//

Corollaire 6.3.4. *Deux bases hilbertiennes d'un espace de Hilbert* E *ont le même cardinal.*

Définition 6.3.3. On appelle *dimension hilbertienne* d'un espace de Hilbert E le cardinal d'une base hilbertienne quelconque de E.

Théorème 6.3.5 : identité de Parseval. *Soient* E *un espace de Hilbert,* $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une base hilbertienne de* E *et* $x \in \mathrm{E}$ *; la famille de nombres réels* $(|\langle x, e_i\rangle|^2)_{i\in\mathrm{I}}$ *est sommable, la famille de vecteurs* $(\langle x, e_i\rangle\, e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *est sommable dans* E *et*

$$x = \sum_{i\in\mathrm{I}} \langle x, e_i\rangle\, e_i\,; \quad \|x\|^2 = \sum_{i\in\mathrm{I}} |\langle x, e_i\rangle|^2.$$

Démonstration. Comme $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est un système orthonormal, il résulte du théorème 2 que la famille de réels $(|\langle x, e_i\rangle|^2)_{i\in\mathrm{I}}$ est sommable. Par le lemme 2.5, la famille $(\langle x, e_i\rangle\, e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est sommable dans E et, si on note y sa somme, on a $\sum_{i\in\mathrm{I}} |\langle x, e_i\rangle|^2 = \langle y, y\rangle$. Pour tout $j \in \mathrm{I}$, appliquant la proposition 2.2 à la forme linéaire $z \to \langle z, e_j\rangle$, on trouve $\langle y, e_j\rangle = \sum_{i\in\mathrm{I}} \langle x, e_i\rangle\langle e_i, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle$. Donc $x - y$ est orthogonal aux e_i, donc à l'espace vectoriel engendré par les (e_i) ; comme le système e_i est total, $x = y$.

//

Corollaire 6.3.6. *Soient* H *un espace de Hilbert,* F *un sous-espace vectoriel fermé de* H*, et* $(e_i)_{i\in \mathrm{I}}$ *une base hilbertienne du sous-espace* F *; pour tout vecteur* $x \in \mathrm{H}$*, la projection orthogonale de* x *sur* F *est donnée par*

$$\mathrm{P_F}(x) = \sum_{i\in \mathrm{I}} \langle x, e_i\rangle\, e_i.$$

Démonstration. Posons $y = \mathrm{P_F}(x)$; puisque $x-y$ est orthogonal à F, on a $\langle x-y, e_i\rangle = 0$ pour tout $i \in \mathrm{I}$, donc $\langle x, e_i\rangle = \langle y, e_i\rangle$. D'après le théorème précédent, appliqué à F et à y, on a

$$y = \sum_{i\in \mathrm{I}} \langle y, e_i\rangle\, e_i = \sum_{i\in \mathrm{I}} \langle x, e_i\rangle\, e_i.$$

//

Remarque 6.3.4. Soient E un espace de Hilbert et $(e_i)_{i\in \mathrm{I}}$ un système orthonormal de vecteurs de E ; on a l'égalité $\|x\|^2 = \sum_{i\in \mathrm{I}} |\langle x, e_i\rangle|^2$ si et seulement si

$$x = \sum_{i\in \mathrm{I}} \langle x, e_i\rangle\, e_i.$$

Soit F le plus petit sous-espace vectoriel fermé de E contenant les (e_i). Soit $x \in \mathrm{E}$; écrivons $x = y+z$ où $y = \mathrm{P_F}(x) \in \mathrm{F}$ et $z \in \mathrm{F}^\perp$. Comme (e_i) est une base hilbertienne de F, on a $y = \sum_{i\in \mathrm{I}} \langle x, e_i\rangle\, e_i$ (corollaire précédent), donc $\|y\|^2 = \sum_{i\in \mathrm{I}} |\langle x, e_i\rangle|^2$. De plus $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$; donc

$$\|x\|^2 = \|z\|^2 + \sum_{i\in \mathrm{I}} |\langle x, e_i\rangle|^2.$$

En conclusion, $\|x\|^2 = \sum_{i\in \mathrm{I}} |\langle x, e_i\rangle|^2$ si et seulement si $z = 0$, c'est à dire si et seulement si $x = \sum_{i\in \mathrm{I}} \langle x, e_i\rangle\, e_i$.

6.4. L'espace hilbertien $\ell^2(\mathrm{I})$

Soit I un ensemble ; notons $\ell^2(\mathrm{I})$ l'ensemble des familles de scalaires $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ telles que la famille de nombres réels positifs $|x_i|^2$ soit sommable. Si $\eta = (y_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est un autre élément de $\ell^2(\mathrm{I})$, la relation $|x_i + y_i|^2 \le 2\big(|x_i|^2 + |y_i|^2\big)$ montre que $\xi + \eta$ est encore dans $\ell_2(\mathrm{I})$, et on en déduit facilement que $\ell_2(\mathrm{I})$ est un espace vectoriel. Pour tout $\xi = (x_i)_{i\in \mathrm{I}} \in \ell^2(\mathrm{I})$ on pose

$$\|\xi\|_2 = \Big(\sum_{i\in \mathrm{I}} |x_i|^2\Big)^{1/2}.$$

On voit que cette quantité définit une norme sur l'espace vectoriel $\ell_2(\mathrm{I})$; en fait la relation $2|x_i\overline{y_i}| \le |x_i|^2 + |y_i|^2$ montre que la famille $(x_i\overline{y_i})_{i\in \mathrm{I}}$ est sommable, et si on pose

$$\langle \xi, \eta\rangle = \sum_{i\in \mathrm{I}} x_i\overline{y}_i$$

on définit sur $\ell_2(\mathrm{I})$ un produit scalaire pour lequel $\langle \xi, \xi\rangle = \|\xi\|^2$.

Pour $j \in \mathrm{I}$, notons $\epsilon_j \in \ell^2(\mathrm{I})$ la famille $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ telle que $x_j = 1$ et $x_i = 0$ si $i \in \mathrm{I} \setminus \{j\}$.

Proposition 6.4.1. *Muni du produit scalaire précédent, l'espace vectoriel $\ell^2(\mathrm{I})$ est un espace de Hilbert. La famille $(\epsilon_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est une base hilbertienne de $\ell^2(\mathrm{I})$.*

Démonstration. Il est clair que $(\epsilon_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est un système orthonormal. Pour $\xi = (x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ et $i \in \mathrm{I}$ on a $\langle \xi, \epsilon_i\rangle = x_i$, donc $\|\xi\|_2^2 = \sum_i |\langle \xi, \epsilon_i\rangle|^2$. Par la remarque 3.4, $(\epsilon_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est une base hilbertienne de $\ell^2(\mathrm{I})$.

Montrons enfin que $\ell^2(\mathrm{I})$ est complet. Notons $u : \ell^2(\mathrm{I}) \to \mathrm{H}$ l'application isométrique de $\ell^2(\mathrm{I})$ dans son complété. Il suffit de montrer que u est surjective. Soit $x \in \mathrm{H}$; posons $\xi = (\langle x, u(\epsilon_i)\rangle)_{i\in\mathrm{I}}$; par le théorème 3.2, on sait que $\xi \in \ell^2(\mathrm{I})$. Pour tout $i \in \mathrm{I}$, on a $\langle \xi, \epsilon_i\rangle = \langle x, u(\epsilon_i)\rangle$, donc $x - u(\xi)$ est orthogonal à $u(\epsilon_i)$. Or $(\epsilon_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est total dans $\ell^2(\mathrm{I})$; comme l'image de u est dense dans H, $(u(\epsilon_i))_{i\in\mathrm{I}}$ est total dans H ; on en déduit que $x = u(\xi)$. Il s'ensuit que u est isométrique et bijective. Alors $\ell^2(\mathrm{I})$ est isométrique à H, donc est complet.

//

Théorème 6.4.2. *Soient* H *un espace de Hilbert et* $\mathrm{B} = (e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une base hilbertienne de* H *; l'application* $\mathrm{U} : x \to (\langle x, e_i\rangle)$ *est une bijection linéaire isométrique de* H *sur* $\ell^2(\mathrm{I})$.

Démonstration. Il est clair que U est une application linéaire de H dans $\mathbb{K}^{\mathrm{I}}$. Par le théorème 3.5, U est isométrique de H dans $\ell^2(\mathrm{I})$. Soit $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}} \in \ell^2(\mathrm{I})$; par le lemme 2.5, la famille $(\lambda_i e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est sommable dans H ; posons $x = \sum_i \lambda_i e_i$. Pour tout $j \in \mathrm{I}$, appliquant la proposition 2.2 à la forme linéaire $z \to \langle z, e_j\rangle$, on trouve $\langle x, e_j\rangle = \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i \langle e_i, e_j\rangle = \lambda_j$. Donc $\mathrm{U}(x) = (\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$, donc U est surjective.

//

Il est clair que, pour tout $i \in \mathrm{I}$, on a $\mathrm{U}(e_i) = \epsilon_i$, où $(\epsilon_i)_{i\in\mathrm{I}}$ désigne la base hilbertienne canonique de $\ell^2(\mathrm{I})$.

Corollaire 6.4.3. *Soient* E *et* F *deux espaces de Hilbert,* $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une base hilbertienne de* E, $(f_j)_{j\in\mathrm{J}}$ *une base hilbertienne de* F *et* σ *une bijection de* I *sur* J *; il existe une bijection linéaire isométrique* U *de* E *sur* F *telle que, pour tout* $i \in \mathrm{I}$, *on ait* $\mathrm{U}(e_i) = f_{\sigma(i)}$.

Démonstration. Remarquons que $(f_{\sigma(i)})_{i\in\mathrm{I}}$ est une base hilbertienne de F. Notons $u : \mathrm{E} \to \ell^2(\mathrm{I})$ l'application $x \to (\langle x, e_i\rangle)_{i\in\mathrm{I}}$ et $v : \mathrm{F} \to \ell^2(\mathrm{I})$ l'application $y \to (\langle y, f_{\sigma(i)}\rangle)_{i\in\mathrm{I}}$. Ce sont des bijections isométriques par le théorème 2. La bijection isométrique $\mathrm{U} = v^{-1} \circ u$ convient.

//

En d'autres termes, deux espaces hilbertiens ayant même dimension hilbertienne sont isomorphes.

7. Algèbres de Banach et théorie spectrale

Un certain nombre de résultats de ce chapitre et des suivants n'a de sens que pour les espaces de Banach complexes, mais quelques énoncés seront valables aussi dans le cas réel. Quand nous dirons simplement "espace de Banach" ou "algèbre de Banach" cela signifiera que le résultat est valable aussi bien dans le cas réel que complexe.

7.1. Algèbres de Banach, spectre et résolvante

Une *algèbre de Banach unitaire* est un espace de Banach A muni d'un produit $(a, b) \in \mathrm{A} \times \mathrm{A} \rightarrow ab \in \mathrm{A}$, bilinéaire et associatif, tel qu'il existe dans A un élément neutre 1_{A} pour la multiplication ($1_{\mathrm{A}} a = a 1_{\mathrm{A}} = a$ pour tout $a \in \mathrm{A}$) et que de plus

$$\|1_{\mathrm{A}}\| = 1\,; \quad \|ab\| \leq \|a\|\,\|b\|$$

pour tous $a, b \in \mathrm{A}$. On en déduit immédiatement que l'application $(a, b) \rightarrow ab$ est continue de $\mathrm{A} \times \mathrm{A}$ dans A, et il en résulte que les applications $b \rightarrow ab$ et $b \rightarrow ba$ sont continues de A dans A.

On remarquera que notre définition exclut $\mathrm{A} = \{0\}$, puisqu'on ne pourrait pas y trouver un élément 1_{A} de norme 1 !

Pour $a \in \mathrm{A}$ et n entier ≥ 0, on définit a^n par récurrence en posant $a^0 = 1_{\mathrm{A}}$ et $a^{n+1} = aa^n = a^n a$ pour tout entier $n \geq 0$.

Exemples 7.1.1.

1. L'exemple de loin le plus important sera $\mathrm{A} = \mathcal{L}(\mathrm{E})$, où E est un espace de Banach ; si $\mathrm{E} \neq \{0\}$, il s'agit bien d'une algèbre de Banach unitaire. Le produit est la composition des applications linéaires, la norme de A est la norme d'application linéaire et $1_{\mathrm{A}} = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ est l'élément neutre du produit ; il est de norme 1 quand $\mathrm{E} \neq \{0\}$.

Si E, F et G sont des espaces normés, $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$, nous noterons TS la composée $\mathrm{T} \circ \mathrm{S}$ de ces applications.

2. Soit K un espace compact non vide ; considérons l'espace de Banach $\mathrm{A} = \mathrm{C}(\mathrm{K})$ des fonctions continues sur K à valeurs complexes, muni du produit usuel et de la norme de convergence uniforme (exemples 1.1.6) ; c'est une algèbre de Banach unitaire. L'élément 1_{A} est la fonction constante égale à 1. Cet exemple donne une algèbre commutative.

3. L'espace $\mathrm{L}_\infty([0, 1], dx)$ donne un autre exemple d'algèbre de Banach commutative. Si $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace mesurable, l'espace $\mathcal{L}_\infty(\Omega, \mathcal{A})$ des fonctions $\mathcal{A}$-mesurables bornées est une algèbre de Banach pour la norme du sup.

Définition 7.1.2. Soient A une algèbre de Banach unitaire, et $a \in \mathrm{A}$; on dit que a est *inversible dans* A s'il existe $b \in \mathrm{A}$ tel que $ab = ba = 1_{\mathrm{A}}$.

Exemples 7.1.3.

1. Soit E un espace de Banach et considérons $\mathrm{A} = \mathcal{L}(\mathrm{E})$; une application linéaire continue $\mathrm{T} \in \mathrm{A}$ est inversible dans A s'il existe $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ telle que $\mathrm{ST} = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} = 1_{\mathrm{A}}$ et $\mathrm{TS} = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$. Cela signifie que l'application T est bijective et que T^{-1} est continue, et correspond bien à la définition usuelle de l'inversibilité d'une application linéaire continue.

Remarquons que par le théorème des isomorphismes, si T est bijective et continue, T^{-1} est automatiquement continue. En d'autres termes, T est inversible si et seulement si elle est bijective et continue.

2. Soit $f \in A = C(K)$; si f est inversible il existe une fonction continue g telle que $f(s)g(s) = 1$ pour tout $s \in K$, donc $f(s) \neq 0$ pour tout $s \in K$. Inversement, si f ne s'annule pas sur K, la fonction $s \to 1/f(s)$ est définie et continue sur K, et elle est l'inverse de f dans $A = C(K)$. On voit donc que f est inversible dans C(K) si et seulement si elle ne s'annule pas sur K.

Exercice. Exprimer l'inversibilité dans L_∞ de $f \in L_\infty$.

Lemme 7.1.1. *Soient* A *une algèbre de Banach unitaire et* $a \in A$ *tel que* $\|a\| < 1$ *; alors, la série* $\sum_k a^k$ *est convergente dans* A *et sa somme est l'inverse de* $1_A - a$*,*

$$(1_A - a)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k.$$

On a de plus l'estimation

$$\|(1_A - a)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|a\|}.$$

Démonstration. Comme $\|a^k\| \leq \|a\|^k$ pour tout entier $k \geq 0$ et que $\|a\| < 1$, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a^k$ est normalement convergente, donc convergente dans l'espace complet A. Notons S sa somme. On vérifie facilement que

$$S\,a = a\,S = \sum_{k=0}^{+\infty} a^{k+1} = S - 1_A$$

ce qui implique que $S(1_A - a) = (1_A - a)S = 1_A$. En majorant la norme de la série par la série des normes, on obtient $\|(1_A - a)^{-1}\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|a\|^k = (1 - \|a\|)^{-1}$.

//

Remarque 7.1.4. Le raisonnement précédent prouve ceci : si on sait simplement que la série $\sum a^k$ converge dans A, sa somme $\sum_{k=0}^{+\infty} a^k$ sera l'inverse de $1_A - a$.

Remarque 7.1.5. Soient encore A une algèbre de Banach et $a \in A$ tel que $\|a\| < 1$; en enlevant le premier terme de la série géométrique $\sum a^k$, on a obtenu ci-dessus l'égalité $(1_A - a)^{-1} - 1_A = a\,(1_A - a)^{-1}$; de même, en enlevant les deux premiers termes on obtient la relation $(1_A - a)^{-1} - 1_A - a = a^2\,(1_A - a)^{-1}$. On en déduit les inégalités :

$$\|(1_A - a)^{-1} - 1_A\| \leq \|a\|\,(1 - \|a\|)^{-1}\,; \quad \|(1_A - a)^{-1} - 1_A - a\| \leq \|a\|^2(1 - \|a\|)^{-1}.$$

Proposition 7.1.2. *Soit* A *une algèbre de Banach ; l'ensemble des éléments inversibles dans* A *est un ouvert non vide* U *de* A*. L'application* $\varphi : u \to u^{-1}$ *est continue et différentiable de* U *dans* A *; sa différentielle en* $u \in U$ *est* $(d\varphi)_u : b \to -u^{-1}b\,u^{-1}$.

Démonstration. Soit $u \in A$ inversible et soit $b \in A$ tel que $\|b\| < \|u^{-1}\|^{-1}$; on écrit $u+b = u(1_A+u^{-1}b)$, et si on pose $a = -u^{-1}b$ on aura $\|a\| = \|u^{-1}b\| \leq \|u^{-1}\|\,\|b\| < 1$, ce qui implique que $1_A - a = 1_A + u^{-1}b$ est inversible dans A, donc $u + b$ aussi, et $(u + b)^{-1} = (1_A - a)^{-1}u^{-1}$.

En utilisant le développement en série obtenu au lemme 1, on obtient que lorsque $\|b\| < \|u^{-1}\|^{-1}$, on a $(u+b)^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a^k\right) u^{-1}$, ce qui peut s'écrire

$$(u+b)^{-1} = u^{-1} - u^{-1}b\,u^{-1} + u^{-1}b\,u^{-1}b\,u^{-1} - \cdots$$

Considérons que u est fixé, b variable et petit, et gardons en évidence les deux premiers termes du développement, sous la forme

$$(*) \qquad (u+b)^{-1} = u^{-1} - u^{-1}b\,u^{-1} + \mathrm{V}(b)$$

où $\mathrm{V}(b) = \left(\sum_{k=2}^{+\infty} a^k\right) u^{-1}$. Comme dans la remarque 5, on obtient la majoration de norme $\|\mathrm{V}(b)\| \le \|a\|^2\,(1 - \|a\|)^{-1}\,\|u^{-1}\|$, qui montre que $\|\mathrm{V}(b)\| = \mathrm{O}(\|b\|^2)$ lorsque $b \to 0_A$. Puisque $\psi : b \to -u^{-1}b\,u^{-1}$ est une application linéaire continue de A dans elle-même, la relation $(*)$ montre que l'application $v \in \mathrm{U} \to v^{-1}$ est différentiable au point u (donc continue au point u) et que sa différentielle au point u est ψ.

//

Remarque 7.1.6. Dans le cas complexe, la différentiabilité d'une fonction f au point a signifie que df_a est $\mathbb{C}$-linéaire ; cette différence anodine a en fait des conséquences considérables (penser aux fonctions holomorphes, qui ne sont rien d'autre que des fonctions $\mathbb{C}$-différentiables).

Dans le cas d'applications linéaires, on peut étendre légèrement le résultat au cas d'applications entre deux espaces de Banach distincts. La démonstration est identique.

Corollaire 7.1.3. *Soient* E, F *deux espaces de Banach ; l'ensemble* $\mathrm{U} \subset \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *des applications linéaires continues inversibles est ouvert dans l'espace* $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$*. L'application* $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{A}^{-1}$ *est continue et différentiable de* U *dans* $\mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{E})$ *; sa différentielle en* $\mathrm{T} \in \mathrm{U}$ *est* $(d\varphi)_\mathrm{T} : \mathrm{S} \to -\mathrm{T}^{-1}\mathrm{S}\mathrm{T}^{-1}$.

Ce qui a été dit jusqu'ici est valable aussi bien dans le cas réel que complexe. En revanche, la théorie du spectre n'est vraiment satisfaisante que dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Nous prendrons donc des algèbres de Banach sur $\mathbb{C}$.

Définition 7.1.7. Soient A une algèbre de Banach unitaire complexe et $a \in \mathrm{A}$; on appelle *spectre* de a et on note $\mathrm{Sp}(a)$ l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $a - \lambda 1_A$ ne soit pas inversible. On appelle *résolvante* de a l'application qui à $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(a)$ associe l'inverse $(a - \lambda 1_A)^{-1}$, et on note quand $\lambda \notin \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$

$$\mathrm{R}_\lambda(a) = (a - \lambda 1_A)^{-1}.$$

Si $|\lambda| > \|a\|$, on peut écrire $a - \lambda 1_A = -\lambda(1_A - a/\lambda)$, et $\|a/\lambda\| < 1$, ce qui montre que $a - \lambda 1_A$ est inversible dans ce cas. On voit donc que $\mathrm{Sp}(a)$ est contenu dans le disque fermé du plan complexe centré en 0 et de rayon $\|a\|$. De plus, d'après le lemme 1

$$(\mathrm{R}) \qquad \text{si } \ |\lambda| > \|a\|, \ \ \|\mathrm{R}_\lambda(a)\| \le \frac{1}{|\lambda| - \|a\|}.$$

Exemples 7.1.8.

a. Munissons $\mathbb{C}^n$ d'une norme (complexe) quelconque et considérons $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ comme l'algèbre de Banach $\mathrm{A} = \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$; le spectre d'une matrice $\mathrm{M} \in \mathrm{A}$ est l'ensemble des valeurs propres de la matrice.

b. Soit K un espace compact non vide ; considérons l'espace de Banach $\mathrm{A} = \mathrm{C}(\mathrm{K})$; on a vu que $f - \lambda$ est inversible si et seulement si $f - \lambda$ ne s'annule pas, donc si et seulement si $\lambda \notin f(\mathrm{K})$; par conséquent, on a $\mathrm{Sp}(f) = f(\mathrm{K})$.

On dit qu'une application f d'un ouvert U de $\mathbb{C}$ dans un espace de Banach complexe F est $\mathbb{C}$-*dérivable* au point λ (ou bien *dérivable au sens complexe*), de dérivée $f'(\lambda)$, si

$$f'(\lambda) = \lim_{z\in\mathbb{C}, z\to 0} \frac{1}{z}\big(f(\lambda+z) - f(\lambda)\big).$$

On dit qu'une application f d'un ouvert U de $\mathbb{C}$ dans un espace de Banach complexe F, dérivable au sens complexe en tout point de l'ouvert U, est une *fonction holomorphe* de U dans F.

Théorème 7.1.4.

Soient A *une algèbre de Banach unitaire complexe et* $a \in \mathrm{A}$ *; le spectre de* a *est une partie compacte non vide de* $\mathbb{C}$*, l'application* $\mathrm{R}(a) : \lambda \to (a - \lambda 1_{\mathrm{A}})^{-1} = \mathrm{R}_\lambda(a)$ *est holomorphe sur* $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(a)$*, avec*

$$\mathrm{R}(a)'(\lambda) = (\mathrm{R}_\lambda(a))^2.$$

(et la dérivée est donc continue).

Démonstration. Si λ n'est pas dans $\mathrm{Sp}(a)$, l'élément $a - \lambda 1_{\mathrm{A}}$ est inversible ; d'après la proposition 2, $a - \lambda' 1_{\mathrm{A}}$ sera encore inversible pour tout λ' dans un voisinage de λ, ce qui montre que le complémentaire du spectre est ouvert dans $\mathbb{C}$, donc $\mathrm{Sp}(a)$ est fermé dans $\mathbb{C}$; on a vu ci-dessus que $\mathrm{Sp}(a)$ est contenu dans le disque de rayon $\|a\|$, donc le spectre est borné.

Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(a)$; posons $u = a - \lambda 1_{\mathrm{A}}$; alors u est inversible, $u^{-1} = \mathrm{R}_\lambda(a)$ et on sait que pour z assez petit, $a - (\lambda + z)1_{\mathrm{A}} = u - z1_{\mathrm{A}}$ est inversible et

$$\mathrm{R}_{\lambda+z}(a) = u^{-1} + zu^{-2} + z^2u^{-3} + z^3u^{-4} + \cdots$$

En écrivant comme précédemment $\mathrm{R}_{\lambda+z}(a) = \mathrm{R}_\lambda(a) + z(\mathrm{R}_\lambda(a))^2 + \mathrm{V}(z)$ on montre que $\|\mathrm{V}(z)\| = \mathrm{O}(|z|^2)$ lorsque $z \to 0$, ce qui entraîne que l'application résolvante est dérivable (complexe) au point λ, avec $(\mathrm{R}_\lambda(a))^2$ pour dérivée en ce point.

Il reste à montrer que $\mathrm{Sp}(a) \neq \emptyset$. Choisissons λ_0 hors du spectre ; alors $\mathrm{R}_{\lambda_0}(a)$ est non nul puisqu'inversible et on peut trouver une forme linéaire x^* continue sur A telle que $x^*(\mathrm{R}_{\lambda_0}(a)) \neq 0$ (corollaire 4.2.7) ; l'application $g : \lambda \to x^*(\mathrm{R}_\lambda(a))$ est une fonction holomorphe scalaire définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(a)$, telle que $g(\lambda_0) \neq 0$. Si $\mathrm{Sp}(a)$ était vide, cette fonction serait entière (holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier) ; or d'après la relation (R) on voit que $g(\lambda) = x^*(\mathrm{R}_\lambda(a))$ tend vers 0 quand $\lambda \to \infty$. Par le théorème de Liouville on aurait $g(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, ce qui n'est pas vrai, donc $\mathrm{Sp}(a) \neq \emptyset$.

//

Exemples 7.1.9.

1. Soit K un espace compact ; considérons l'espace de Banach $E = C(K)$ des fonctions continues sur K à valeurs complexes, muni de la norme de convergence uniforme (exemples 1.1.6). Soit $f \in E$; l'application $M_f : g \to fg$ est linéaire de E dans E et continue puisque pour tout $g \in E$, on a $\|fg\|_\infty \le \|f\|_\infty \|g\|_\infty$. De plus la relation $\|M_f(f)\|_\infty = \|f\|_\infty^2$ implique $\|M_f\| \ge \|f\|_\infty$, donc $\|M_f\| = \|f\|_\infty$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$;
– si pour tout $s \in K$, on a $f(s) \ne \lambda$, alors la fonction $h : s \to (f(s) - \lambda)^{-1}$ est continue de K dans $\mathbb{C}$. On voit alors que $M_f - \lambda\,\mathrm{Id}_E$ est inversible et que son inverse $R_\lambda(M_f)$ est l'application $M_h : g \to hg$;
– s'il existe $s \in K$ tel que $f(s) = \lambda$, alors pour tout $g \in E$, la fonction $fg - \lambda g$ s'annule au point s, donc $\mathrm{im}(M_f - \lambda\,\mathrm{Id}_E) \subset \{g \in E : g(s) = 0\}$, qui est un sous-espace fermé de E, distinct de E. On en déduit que l'image de $M_f - \lambda\,\mathrm{Id}_E$ n'est pas dense, donc $M_f - \lambda\,\mathrm{Id}_E$ n'est pas inversible puisqu'il n'est pas surjectif. En résumé, le spectre de M_f est l'ensemble $\mathrm{Sp}(M_f) = f(K) = \{f(s) : s \in K\}$ des valeurs de f. C'est aussi le spectre de f dans l'algèbre C(K). On verra plus loin que ça n'est pas un hasard !

2. Soit p un nombre réel tel que $1 \le p < +\infty$, et soit $S \in \mathcal{L}(\ell_p)$ l'application qui à une suite $(x_n)_{n\ge0}$ associe la suite $(y_n)_{n\ge0}$ définie par $y_0 = 0$ et $y_n = x_{n-1}$ pour $n \ge 1$ (on décale d'un cran vers la droite, en introduisant un 0 à la place 0 ; en bon français, cet opérateur s'appelle *opérateur de décalage (à droite)*, ou *opérateur de shift* en langage mathématique usuel) ; l'application S est clairement isométrique. Comme $\|S\| = 1$, on a $\mathrm{Sp}(S) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le 1\}$.

Si y est un élément de ℓ_q (exposant conjugué de p) et si $x \in \ell_p$ on notera l'action de dualité de ℓ_q sur ℓ_p par

$$(y, x) = j_q(y)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} y_n x_n.$$

Avec cette notation on va chercher à exprimer la transposée de S, considérée comme endomorphisme de ℓ_q. Soit T l'opération de décalage à gauche, définie par $T((y_n)_{n\ge0}) = (y_{n+1})_{n\ge0}$. On constate sans peine que $(T(y), x) = (y, S(x))$ pour tous $x \in \ell_p$, $y \in \ell_q$. L'application T "est" donc la transposée de S, et de plus $T - \lambda\,\mathrm{Id}_{\ell_q}$ est pour tout λ la transposée de $S - \lambda\,\mathrm{Id}_{\ell_p}$. Quand un opérateur V sur ℓ_p est inversible, il est clair que sa transposée est inversible dans $\mathcal{L}(\ell_q)$, ce qui entraîne que $\mathrm{Sp}({}^tS) \subset \mathrm{Sp}(S)$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$; si $|\lambda| < 1$, posons $y = (\lambda^n)_{n\ge0}$; c'est un élément non nul de ℓ_q et ${}^tS(y) = \lambda y$. Il en résulte que ${}^tS - \lambda\,\mathrm{Id}_{\ell_q}$ n'est pas inversible, donc le spectre de ${}^tS$ contient le disque unité ouvert, et il est contenu dans Sp(S) qui est contenu dans le disque unité fermé ; puisque le spectre est fermé,

$$\mathrm{Sp}(S) = \mathrm{Sp}({}^tS) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le 1\}.$$

7.2. Rayon spectral

Soit A une algèbre de Banach unitaire complexe ; la quantité

$$\rho(a) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \mathrm{Sp}(a)\}$$

s'appelle le *rayon spectral* de $a \in A$. On a déjà remarqué que le spectre de a est contenu dans le disque de $\mathbb{C}$ centré en 0 et de rayon $\|a\|$, donc

$$\rho(a) \le \|a\|.$$

On va obtenir au théorème 1 une formule importante qui précise cette remarque simple et qui permet d'estimer, sinon de calculer, ce rayon spectral.

Théorème 7.2.1. *Soient* A *une algèbre de Banach unitaire complexe et* $a \in \mathrm{A}$ *; la suite* $(\|a^n\|^{1/n})$ *est convergente et on a*

$$\rho(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Démonstration. On démontre d'abord que $\rho(a) \le \limsup_n \|a^n\|^{1/n}$; remarquons tout de suite que $\|a^n\|^{1/n} \le \|a\|$ pour tout $n \ge 1$, donc ce que nous devons démontrer est un raffinement de l'estimation $\rho(a) \le \|a\|$ que nous avons déjà vue ; on obtiendra ce raffinement en reprenant les arguments déjà employés ; si $b \in \mathrm{A}$ est tel que $\beta = \limsup_n \|b^n\|^{1/n} < 1$, choisissons t réel tel que $\beta < t < 1$; on aura alors $\|b^n\|^{1/n} < t$ pour n grand, donc $\|b^n\| < t^n$, donc la série $\sum_k b^k$ sera normalement convergente, donc convergente dans le Banach A, et la démonstration déjà vue pour le lemme 1.1 nous dira que $1_\mathrm{A} - b$ est inversible ; si on écrit comme avant $a - \lambda 1_\mathrm{A} = -\lambda(1_\mathrm{A} - a/\lambda)$, cet élément sera inversible dès que $b = a/\lambda$ vérifiera $\limsup_n \|b^n\|^{1/n} < 1$, ce qui se produit quand $\limsup_n \|a^n\|^{1/n} < |\lambda|$. Ceci signifie qu'aucun nombre complexe λ tel que $|\lambda| > \limsup_n \|a^n\|^{1/n}$ ne peut être dans le spectre de a, c'est à dire que $\rho(a) \le \limsup_n \|a^n\|^{1/n}$.

La démonstration de l'inégalité inverse demande de se rappeler le cours de fonctions holomorphes ; si $g(z) : \mathrm{B}(0, \mathrm{R}) \to \mathbb{C}$ est holomorphe (valeur $\mathrm{R} = +\infty$ admise), alors elle est développable en série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$ dans ce disque ouvert $\mathrm{B}(0, \mathrm{R})$; pour tout r tel que $0 < r < \mathrm{R}$ la formule de Cauchy appliquée au cercle γ_r de rayon r donne pour tout $n \ge 0$

$$r^n c_n = r^n \,\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{g(z)}{z^{n+1}}\, dz = \int_0^{2\pi} g(r\,\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{e}^{-in\theta}\,\frac{d\theta}{2\pi},$$

ce qui fournit les inégalités de Cauchy

$$|c_n| r^n \le \mathrm{M}(r, g) = \max\{|g(z)| : |z| = r\}.$$

Considérons la fonction vectorielle $f(z) = (1_\mathrm{A} - za)^{-1}$; elle est définie pour tout complexe z tel que $1/z$ ne soit pas dans le spectre de a, ce qui est le cas lorsque $|z| < \mathrm{R} = \rho(a)^{-1}$; de plus $z \to f(z)$ est holomorphe de $\mathrm{B}(0, \mathrm{R})$ dans A. Par ailleurs, pour z assez petit on sait que $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k a^k$ (lemme 1.1), donc $g(z) = \sum_k z^k x^*(a^k)$; par l'unicité des coefficients de Taylor il résulte que $c_n = x^*(a^n)$ pour tout n.

Puisque $\|x^*\| \le 1$, on a $|g(z)| \le \|f(z)\|$, ce qui entraîne que $\mathrm{M}(r, g) \le \mathrm{M}_0(r)$; les inégalités de Cauchy, appliquées à g, donnent $|x^*(a^n)| \le \mathrm{M}_0(r)/r^n$ pour tout n et toute $x^* \in \mathrm{A}^*$ telle que $\|x^*\| = 1$; pour chaque $n \ge 1$ donné on peut choisir par Hahn-Banach (corollaire 4.2.7) une forme linéaire x^* telle que $\|x^*\| = 1$ et $x^*(a^n) = \|a^n\|$; on obtient ainsi $\|a^n\| \le \mathrm{M}_0(r)/r^n$ pour tout $n \ge 1$, ce qui implique $\limsup_n \|a^n\|^{1/n} \le 1/r$, d'où $\limsup_n \|a^n\|^{1/n} \le \rho(a)$ en faisant tendre r vers $\mathrm{R} = 1/\rho(a)$.

La convergence de la suite $(\|a^n\|^{1/n})$ résulte immédiatement du lemme qui suit et du fait que pour tous $p, q \ge 1$, on a $\|a^{p+q}\| = \|a^p a^q\| \le \|a^p\|\,\|a^q\|$.

//

Lemme 7.2.2. *Soit* (u_n) *une suite de nombres réels positifs ou nuls telle que, pour tous entiers* $p, q \geq 1$ *on ait* $(u_{p+q})^{p+q} \leq u_p^p\, u_q^q$ *; alors la suite* (u_n) *converge vers* $\inf_{n\geq 1} u_n$.

Démonstration. Montrons d'abord que pour tous entiers $p, k \geq 1$, on a $u_{pk} \leq u_k$, par récurrence sur $p \geq 1$; c'est clair pour $p = 1$; si on connaît cette inégalité pour un certain $p \geq 1$, alors

$$(u_{(p+1)k})^{(p+1)k} \leq u_{kp}^{kp}\, u_k^k \leq u_k^{kp}\, u_k^k = u_k^{(p+1)k}.$$

Notons $m = \inf_{n\geq 1} u_n$; s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $u_k = 0$, alors $m = 0$ et, pour tout $p \geq 1$, on a $u_{k+p} = 0$, donc (u_n) converge vers m. Supposons désormais que l'on ait $u_k \neq 0$ pour tout $k > 0$. Soit $\varepsilon > 0$; par définition de m, il existe un entier $k \geq 1$ tel que $u_k < m + \varepsilon$. Soit $n \geq 1$ et écrivons $n = kp + r$ avec p, r entiers ≥ 0, $r < k$; alors $u_n^n \leq u_{kp}^{kp}\, u_r^r \leq u_k^{kp}\, u_1^r$ d'après notre première étape, donc

$$u_n \leq u_k^{kp/n} u_1^{r/n} = u_k \left(\frac{u_1}{u_k}\right)^{r/n} \leq u_k \left(\frac{u_1}{u_k}\right)^{(k-1)/n}.$$

Comme la suite $n \to u_k(u_1/u_k)^{(k-1)/n}$ converge vers $u_k < m+\varepsilon$, on aura $u_n < m+\varepsilon$ pour n assez grand, mais aussi $m \leq u_n$, d'où la convergence vers m de la suite (u_n). //

Remarque 7.2.1. Ce n'est pas vraiment le lieu ici de développer les théories de l'intégration et des fonctions holomorphes pour les fonctions à valeurs dans un espace de Banach. Disons cependant que la théorie de Cauchy se généralise sans peine aux fonctions holomorphes à valeurs dans un espace de Banach (complexe, bien sûr) : soient $\mathrm{D} \subset \mathbb{C}$ un disque ouvert, F un espace de Banach complexe et $f : \overline{\mathrm{D}} \to \mathrm{F}$ une application continue, holomorphe sur D ; alors, pour tout $\lambda \in \mathrm{D}$ on a

$$f(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \mathrm{D}} (z - \lambda)^{-1} f(z)\, dz,$$

l'intégrale étant prise sur le bord $\partial\mathrm{D}$ de D. De plus, on a en fait

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-int}\; f(re^{it})\, dt.$$

Cependant, on n'a pas expliqué le sens de ces intégrales...

Ces intégrales sont des intégrales de fonctions continues définies sur un intervalle $[a, b]$, à valeurs dans un espace de Banach F. Il ne serait pas bien difficile de définir l'intégrale de Riemann dans ce cadre. Si f est continue de $[a, b]$ dans F, elle est uniformément continue puisque $[a, b]$ est compact, et on en déduit facilement que les sommes de Riemann (vectorielles) $\sum_{i=1}^m (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i)$ convergent dans F lorsque le pas de la subdivision $\pi = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b)$ de $[a, b]$ tend vers 0 (on commence par montrer que si (π_n) est une suite de subdivisions dont le pas tend vers 0, les sommes de Riemann correspondantes forment une suite de Cauchy, donc convergente puisque F est complet ; on montre ensuite que la limite ne dépend pas de la suite (π_n) choisie). Il est tout à fait raisonnable d'appeler $\int_a^b f(t)\, dt$ cette limite.

Remarque. Dans le cas où $\mathrm{E} = \mathbb{C}^n$ muni d'une certaine norme, et où $\mathrm{A} = \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est en fait l'algèbre $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices $n \times n$ à coefficients complexes, le théorème précédent 1 peut se démontrer un peu plus directement, mais la démonstration précédente n'est pas ridiculement compliquée dans ce cas. Le résultat est le suivant : pour toute norme sur les matrices qui provient d'une norme sur $\mathbb{C}^n$, le maximum des modules des valeurs propres d'une matrice M est égal à $\lim_n \|\mathrm{M}^n\|^{1/n}$.

Proposition 7.2.3. *Soit* H *un espace de Hilbert complexe ; le rayon spectral de tout élément normal* T *de* $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ *est égal à sa norme,* $\rho(\mathrm{T}) = \|\mathrm{T}\|$.

Démonstration. Soit d'abord A un élément hermitien ; on a $\|\mathrm{A}^2\| = \|\mathrm{A}^*\mathrm{A}\| = \|\mathrm{A}\|^2$ (proposition 6.1.2) ; on en déduit par récurrence que $\|\mathrm{A}^{2^n}\| = \|\mathrm{A}\|^{2^n}$ pour tout $n \geq 0$, donc $\rho(\mathrm{A}) = \|\mathrm{A}\|$. Soit maintenant T un élément normal de $\mathcal{L}(\mathrm{H})$; par récurrence sur n, on a $(\mathrm{T}^*\mathrm{T})^n = (\mathrm{T}^*)^n\mathrm{T}^n$ donc $\|(\mathrm{T}^*\mathrm{T})^n\| = \|\mathrm{T}^n\|^2$ et $\rho(\mathrm{T}^*\mathrm{T}) = \rho(\mathrm{T})^2$. Or $\mathrm{A} = \mathrm{T}^*\mathrm{T}$ est hermitien, donc $\rho(\mathrm{T})^2 = \rho(\mathrm{T}^*\mathrm{T}) = \|\mathrm{T}^*\mathrm{T}\| = \|\mathrm{T}\|^2$.

//

Le fait crucial dans la démonstration précédente est la relation $\|a^*a\| = \|a\|^2$; on appelle C^*-*algèbre* une algèbre de Banach unitaire complexe A muni d'une involution antilinéaire $a \in \mathrm{A} \to a^* \in \mathrm{A}$ telle que $\|a^*a\| = \|a\|^2$ pour tout $a \in \mathrm{A}$ et $(ab)^* = b^*a^*$. Dans ce cadre, on définit les éléments hermitiens ($a^* = a$), les éléments normaux ($a^*a = aa^*$), et le résultat précédent subsiste.

Exemple 7.2.2. Posons $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2([0,1])$; pour toute fonction $f \in \mathrm{H}$ et $s \in [0,1]$, on pose $\mathrm{V}(f)(s) = \int_0^s f(t)\,dt$. Puisque $\mathrm{L}_2([0,1]) \subset \mathrm{L}_1([0,1])$, la fonction f est intégrable et on en déduit que $\mathrm{V}(f)$ est continue (appliquer par exemple le théorème de Lebesgue à une suite de la forme $(\mathbf{1}_{[0,s_n]}f)$ pour une suite (s_n) tendant vers s). En appliquant Cauchy-Schwarz au produit $\mathbf{1}_{[0,s]}f$ on voit que $|\mathrm{V}(f)(s)| \leq \sqrt{s}\,\|f\|_2$, ce qui implique que

$$\|\mathrm{V}(f)\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 \int_0^1 s\,ds = \frac{1}{2}\,\|f\|_2^2,$$

donc V définit une application linéaire continue notée V_2 de $\mathrm{L}_2([0,1])$ dans lui-même.

Soit $f \in \mathrm{H}$ telle que $\|f\|_2 \leq 1$; on a montré que $|\mathrm{V}(f)(s)| \leq \sqrt{s}\,\|f\|_2 \leq 1$ pour tout réel $s \in [0,1]$; on en déduit que $|\mathrm{V}(\mathrm{V}(f))(s)| = |\int_0^s \mathrm{V}(f)(t)\,dt| \leq s$, puis, par récurrence sur n, que $|\mathrm{V}^{n+1}(f)(s)| \leq s^n/n!$ donc

$$\|\mathrm{V}^{n+1}(f)\|_2^2 \leq \frac{1}{(n!)^2}\int_0^1 s^{2n}\,ds \leq \frac{1}{(n!)^2},$$

ce qui donne $\|\mathrm{V}_2^{n+1}\| \leq (n!)^{-1}$. Comme $\lim_n (n!)^{-1/n} = 0$, il s'ensuit que le rayon spectral de V_2 est nul, donc $\mathrm{Sp}(\mathrm{V}_2) = \{0\}$.

Exercice. Retrouver le spectre de V en trouvant explicitement la résolvante $\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{V})$ pour tout $\lambda \neq 0$ (exercice d'équations différentielles !).

Changement d'algèbre, homomorphismes

Définition 7.2.3. Un *homomorphisme d'algèbres de Banach unitaires* est une application linéaire continue $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ entre deux algèbres de Banach unitaires A et B, telle que $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ pour tous $a, b \in \mathrm{A}$ et que $\varphi(1_\mathrm{A}) = 1_\mathrm{B}$.

Si a est inversible dans A, son image est inversible dans B et l'inverse de l'image est l'image de l'inverse. De plus $\varphi(a - \lambda 1_\mathrm{A}) = \varphi(a) - \lambda 1_\mathrm{B}$. Il en résulte que

$$\mathrm{Sp}(\varphi(a)) \subset \mathrm{Sp}(a).$$

On dira qu'on a un plongement isométrique de A dans B si φ est de plus isométrique. On écrira parfois $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ dans ce cas. Même dans ce cas de plongement, il est possible qu'un élément non inversible dans A devienne inversible dans B.
Exemple-exercice. Soit A la sous-algèbre de $\mathrm{B} = \mathrm{C}(\mathbb{T})$ engendrée par les fonctions $(z^n)_{n \geq 0}$; montrer que la fonction z n'est pas inversible dans A (alors qu'elle le devient dans B ; indication : utiliser la norme L_2 et la base de Fourier).

Il y a cependant un cas où un élément a non inversible dans A ne peut jamais avoir une image inversible $\varphi(a)$, par un plongement isométrique φ de A dans B : disons que a est un *diviseur de zéro approché* (à gauche) dans A s'il existe une suite (u_n) dans A telle que $\|u_n\| = 1$ pour tout n, mais $a\,u_n \to 0$ (on peut aussi considérer la propriété analogue à droite). Il est clair qu'un d.z.a. ne peut pas être inversible, et que l'image d'un d.z.a. par une isométrie est encore un d.z.a.

Dans l'algèbre C(K), il est facile de voir que les non-inversibles sont exactement les d.z.a. Il en résulte que pour tout homomorphisme isométrique φ de C(K) dans une algèbre de Banach B, on a $\mathrm{Sp}(\varphi(f)) = \mathrm{Sp}(f)$.

7.3. Décomposition du spectre d'un opérateur borné

Proposition 7.3.1. *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach et soit* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *; les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *l'application* T *est injective d'image fermée ;*
(ii) *il existe un nombre* $c > 0$ *tel que pour tout* $x \in \mathrm{E}$ *on ait* $\|\mathrm{T}(x)\| \geq c\,\|x\|$ *;*
(iii) *il n'existe pas de suite* (x_n) *dans* E *telle que* $\|x_n\| = 1$ *et* $\lim_n \|\mathrm{T}(x_n)\| = 0$.

Démonstration. Si (i) est satisfaite, T détermine une application continue bijective T_1 de E sur l'espace de Banach im(T). Par le théorème des isomorphismes (théorème 4.1.3), T_1 est un isomorphisme : on obtient (ii) avec $c = \|\mathrm{T}_1^{-1}\|^{-1}$. Il est évident que ($ii$) implique ($iii$) ; montrons que ($iii$) $\Rightarrow$ (ii) : si (ii) n'est pas satisfaite, il existe pour tout entier $n \geq 1$ un vecteur $y_n \in \mathrm{E}$ tel que $n^{-1}\,\|y_n\| > \|\mathrm{T}(y_n)\|$; si on pose $x_n = \|y_n\|^{-1} y_n$, on a $\|x_n\| = 1$ et $\|\mathrm{T}(x_n)\| < 1/n$, donc ($iii$) n'est pas satisfaite.

Si (ii) est satisfaite, il est clair que T est injective ; si (y_n) est une suite dans im(T) qui converge vers $y \in \mathrm{F}$, écrivons $y_n = \mathrm{T}(x_n)$ avec $x_n \in \mathrm{E}$; on a $\|x_n - x_m\| \leq c^{-1}\,\|y_n - y_m\|$, donc la suite (x_n) est de Cauchy, donc convergente vers $x \in \mathrm{E}$ puisque E est complet ; alors la suite $y_n = \mathrm{T}(x_n)$ converge vers $\mathrm{T}(x)$, donc $y = \mathrm{T}(x)$ est dans im(T), qui est donc fermée dans l'espace F.

//

Si un opérateur borné T de E dans F est inversible, il possède les deux propriétés suivantes :

A. Il existe une constante $c > 0$ telle que $\|\mathrm{T}x\| \geq c\,\|x\|$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.
B. On a $\overline{\mathrm{T(E)}} = \mathrm{F}$.

La deuxième propriété est une forme faible de surjectivité : l'image de T est dense dans F ; c'est évidemment vrai quand T est inversible, puisqu'alors T est surjectif. De plus, lorsque T est inversible, la propriété **A** est vraie avec $c = \|\mathrm{T}^{-1}\|^{-1} > 0$: en effet, on a pour tout $x \in \mathrm{E}$, lorsque T^{-1} existe dans $\mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{E})$

$$\|x\| = \|\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{T}(x))\| \leq \|\mathrm{T}^{-1}\|\,\|\mathrm{T}(x)\|.$$

Lemme 7.3.2. *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach ; un opérateur* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *est inversible si et seulement s'il vérifie* **A et B**.

Démonstration. On a déjà vu une des directions : si T est inversible, il vérifie les deux conditions. Inversement, supposons que **A** et **B** soient vraies ; on sait alors que $\mathrm{T}(\mathrm{E})$ est fermé par la proposition 1, et dense d'après **B**, donc $\mathrm{T}(\mathrm{E}) = \mathrm{F}$. Si $\mathrm{T}(x) = \mathrm{T}(x')$ on aura $x = x'$ puisque $0 = \|\mathrm{T}(x - x')\| \geq c\,\|x - x'\|$ d'après **A**. Cela permet de définir une application (linéaire) S de $\mathrm{F} = \mathrm{T}(\mathrm{E})$ sur E en posant $\mathrm{S}(y) = x \in \mathrm{E}$ si et seulement si $y \in \mathrm{F}$ et $\mathrm{T}(x) = y$. En traduisant **A**, on obtient $\|\mathrm{S}(y)\| \leq c^{-1}\,\|y\|$ pour tout $y \in \mathrm{F}$, ce qui montre que S est continue. Pour finir il est clair que S est l'inverse de T.

//

Spectre et transposition dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$

On va maintenant s'intéresser au rapport entre le spectre d'un opérateur borné $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et celui de son transposé ${}^t\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}^*)$. Ce rapport sera très simple : les deux spectres sont égaux.

Proposition 7.3.3. *Soient* E, F *deux espaces de Banach et soit* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *; l'opérateur transposé* ${}^t\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{F}^*, \mathrm{E}^*)$ *est inversible si et seulement* T *est inversible.*

Démonstration. Si T est inversible, comme $\mathrm{T}^{-1}\mathrm{T} = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ et $\mathrm{T}\mathrm{T}^{-1} = \mathrm{Id}_\mathrm{F}$, on trouve ${}^t\mathrm{T}\,{}^t(\mathrm{T}^{-1}) = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}^*}$ et ${}^t(\mathrm{T}^{-1})\,{}^t\mathrm{T} = \mathrm{Id}_{\mathrm{F}^*}$, donc ${}^t\mathrm{T}$ est inversible et $({}^t\mathrm{T})^{-1} = {}^t(\mathrm{T}^{-1})$. Supposons inversement que T ne soit pas inversible. On sait que, ou bien T ne vérifie pas la condition **B**, ou bien il ne vérifie pas **A**.

Si T ne vérifie pas **B**, l'image $\mathrm{T}(\mathrm{E})$ n'est pas dense, donc ${}^t\mathrm{T}$ n'est pas injective par le lemme 4.2.11, ce qui implique que ${}^t\mathrm{T}$ n'est pas inversible. Si T ne vérifie pas **A**, il existe d'après la proposition 1 une suite $(x_n) \subset \mathrm{E}$ de vecteurs de norme un telle que $\mathrm{T}(x_n) \to 0$. Considérons pour tout entier n l'opérateur R_n de $\mathbb{K}$ dans E, défini par $\mathrm{R}_n(\lambda) = \lambda x_n$. Sa norme est égale à $\|x_n\| = 1$, et $\mathrm{T} \circ \mathrm{R}_n$ tend vers 0. En transposant, ${}^t\mathrm{R}_n \circ {}^t\mathrm{T}$ tend vers 0, alors que $\|{}^t\mathrm{R}_n\| = \|\mathrm{R}_n\| = 1$ pour tout n, ce qui entraîne encore que ${}^t\mathrm{T}$ ne peut être inversible.

//

On en déduit immédiatement :

Corollaire 7.3.4. *Soient* E *un espace de Banach complexe et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *; on a*

$$\mathrm{Sp}({}^t\mathrm{T}) = \mathrm{Sp}(\mathrm{T}).$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que ${}^t(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}) = {}^t\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}^*}$ pour tout nombre complexe λ.

//

Dans le cas hilbertien, on préfère le plus souvent exprimer le résultat précédent en utilisant l'adjoint $\mathrm{T}^* \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ plutôt que la transposée ${}^t\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H}^*)$. Le seul petit piège à éviter est que $(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{H})^* = \mathrm{T}^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{Id}_\mathrm{H}$ (il y a une barre de conjugaison !).

Corollaire 7.3.5. *Soient* H *un espace de Hilbert complexe et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *; le spectre de l'adjoint* T^* *est formé des complexes conjugués des éléments du spectre de* T,

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{T}^*) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{T})\}.$$

On va maintenant distinguer plusieurs sous-ensembles intéressants du spectre d'un opérateur borné, correspondant à plusieurs façons pour $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ de ne pas être inversible. Soient E un espace de Banach complexe, $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$; nous distinguerons plusieurs cas pour l'opérateur $\mathrm{T}_\lambda = \mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$, correspondant au valeurs vrai-faux des trois critères suivants : propriété **A**, propriété d'injectivité et propriété **B**. On remarque que **A** implique injectif, et que si λ est dans le spectre on ne peut pas avoir à la fois **A** et **B** pour T_λ. Quand $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$, il reste donc les cas suivants :

- T_λ n'est pas injectif ;
- T_λ est injectif mais **B** n'est pas vraie
- T_λ est injectif et **B** est vraie (donc **A** est fausse).

Ces trois cas correspondent aux cas suivants.

1. Le scalaire λ est une valeur propre de T ; ceci équivaut à dire que $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ n'est pas injectif.

2. Le scalaire λ est une valeur propre du transposé ${}^t\mathrm{T}$, mais n'est pas une valeur propre de T ; autrement dit $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ est injectif et ${}^t(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E})$ n'est pas injectif ; d'après le lemme 4.2.11, cela se produit si et seulement si $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ est injectif mais n'a pas une image dense dans E.

3. Le scalaire λ n'est une valeur propre ni de T, ni de ${}^t\mathrm{T}$, mais λ est quand même dans le spectre de T. Alors, $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ est injectif, son image est dense mais n'est pas fermée.

Définition 7.3.1. Soient E un espace de Banach complexe et $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$; on appelle *spectre ponctuel* de T l'ensemble $\mathrm{Sp}_p(\mathrm{T})$ des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ ne soit pas injectif (c'est l'ensemble des valeurs propres de T). On appelle *spectre résiduel* de T l'ensemble $\mathrm{Sp}_r(\mathrm{T})$ des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ soit injectif, mais son image ne soit pas dense. On appelle *spectre continu* de T l'ensemble $\mathrm{Sp}_c(\mathrm{T})$ des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ soit injectif, à image dense mais pas fermée.

On voit que l'on a $\lambda \in \mathrm{Sp}_c(\mathrm{T})$ si et seulement si : $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$ **et** $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ est injectif à image dense ; en effet, l'image de $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ n'est alors pas fermée : si elle était fermée, elle serait égale à E, l'opérateur $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ serait un isomorphisme et λ ne serait pas dans le spectre de T.

Proposition 7.3.6. *Soient* E *un espace de Banach complexe et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *; on a*

$$\mathrm{Sp}_r(\mathrm{T}) = \mathrm{Sp}_p({}^t\mathrm{T}) \setminus \mathrm{Sp}_p(\mathrm{T}) \quad et \quad \mathrm{Sp}_c({}^t\mathrm{T}) \subset \mathrm{Sp}_c(\mathrm{T}).$$

Si E *est réflexif, on a l'égalité* $\mathrm{Sp}_c({}^t\mathrm{T}) = \mathrm{Sp}_c(\mathrm{T})$.

Démonstration. On a vu que λ est dans le spectre résiduel de T si et seulement si λ est une valeur propre de ${}^t\mathrm{T}$, mais n'est pas une valeur propre de T, d'où la première assertion. Si $\lambda \in \mathrm{Sp}_c({}^t\mathrm{T})$, on sait que ${}^t\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}^*}$ est injectif à image dense, donc $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ est injectif à image dense par le lemme 4.2.11, et puisque $\mathrm{Sp}_c({}^t\mathrm{T}) \subset \mathrm{Sp}({}^t\mathrm{T}) = \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$, on a $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$, par conséquent $\lambda \in \mathrm{Sp}_c(\mathrm{T})$.

Dans le cas où E est réflexif, T "s'identifie" à la transposée de ^{t}T, et il en résulte que $\mathrm{Sp}_c(\mathrm{T}) \subset \mathrm{Sp}_c({}^t\mathrm{T})$. Plus précisément, on vérifie que $\mathrm{T} = \mathrm{J}_\mathrm{E}^{-1} \circ {}^t({}^t\mathrm{T}) \circ \mathrm{J}_\mathrm{E}$, où J_E désigne l'isomorphisme de E sur E^{**} (on devra remarquer que si U est un isomorphisme de E sur F et si $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{F})$, toutes les notions de spectre introduites sont les mêmes pour les deux opérateurs T et $\mathrm{U}^{-1}\mathrm{TU} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$).

//

Dans le cas hilbertien, on a :

Proposition 7.3.7. *Soient* H *un espace hilbertien complexe et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *un opérateur borné ; on a* $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}^*) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{T})\}$ *et* $\mathrm{Sp}_r(\mathrm{T}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_p(\mathrm{T}) : \overline{\lambda} \in \mathrm{Sp}_p(\mathrm{T}^*)\}$.

Démonstration. La première assertion est un rappel. Par la proposition 6.1.3, l'image de $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{H}$ est dense si et seulement si $\mathrm{T}^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{Id}_\mathrm{H}$ est injectif. La deuxième assertion en résulte.

//

Lemme 7.3.8. *Si un opérateur normal* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *est injectif, il est à image dense. Si l'opérateur normal* T *vérifie* **A**, *il est inversible.*

Démonstration. Si T est normal et injectif, on a $\overline{\mathrm{T}(\mathrm{H})} = \mathrm{H}$ d'après la proposition 6.1.6, c'est à dire que l'image est dense. Si T vérifie la propriété **A**, il est injectif, donc on a **A** et **B**, par conséquent T est inversible.

//

Proposition 7.3.9. *Le spectre résiduel d'un opérateur normal est vide.*

Démonstration. Soit $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ un opérateur normal ; pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{T}_\lambda = \mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{H}$ est normal ; si λ est dans le spectre, ou bien T_λ n'est pas injectif et $\lambda \in \mathrm{Sp}_p(\mathrm{T})$, ou bien T_λ est injectif, donc à image dense et $\lambda \in \mathrm{Sp}_c(\mathrm{T})$.

//

Exemples 7.3.2.

a. Soient K un espace compact métrique, $\mathrm{E} = \mathrm{C}(\mathrm{K})$ et soit $f \in \mathrm{E}$; on a vu dans l'exemple 2.2 que l'application $\mathrm{T} = \mathrm{M}_f$ de multiplication par f vérifie $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) = f(\mathrm{K})$; on a vu aussi que s'il existe $s \in \mathrm{K}$ tel que $f(s) = \lambda$, l'image de $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ n'est pas dense, donc $\lambda \in \mathrm{Sp}_p(\mathrm{T}) \cup \mathrm{Sp}_r(\mathrm{T})$. Remarquons que λ est une valeur propre de T si et seulement s'il existe $g \in \mathrm{E}$ non nulle telle que $\mathrm{T}(g) = \lambda g$, c'est à dire $(f - \lambda)g = 0$. L'ensemble des $s \in \mathrm{K}$ tels que $g(s) \neq 0$ est alors un ouvert non vide U de K et f est égale à λ sur U. Supposons inversement qu'il existe un ouvert non vide U de K tel que f soit égale à λ sur U ; notons $g \in \mathrm{E}$ la fonction qui à $s \in \mathrm{K}$ associe sa distance au complémentaire de U. On a $(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E})(g) = 0$.

En résumé, le spectre de T est l'ensemble $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) = \{f(s) : s \in \mathrm{K}\}$, le spectre ponctuel de T est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que l'intérieur de $f^{-1}(\{\lambda\})$ soit non vide, le spectre continu de T est vide et le spectre résiduel de T est $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) \setminus \mathrm{Sp}_p(\mathrm{T})$.

b. Soit $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\ell_2)$ l'application de décalage à droite ; on a vu que $\mathrm{Sp}(\mathrm{S})$ est le disque unité fermé $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$. Soient $\xi = (x_n)_{n \geq 0} \in \ell_2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{S}(\xi) = \lambda\xi$;

on trouve alors $\lambda x_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$, $\lambda x_n = x_{n-1}$; si $\lambda \neq 0$, on trouve alors par récurrence sur n que $x_n = 0$ pour tout $n \geq 0$; si $\lambda = 0$, on trouve, pour tout $n \geq 1$, $x_{n-1} = 0$. Dans les deux cas, $\xi = 0$. Donc $\mathrm{Sp}_p(\mathrm{S}) = \emptyset$.

On a vu que tout λ tel que $|\lambda| < 1$ est valeur propre de ${}^t\mathrm{S}$. Supposons que $|\lambda| = 1$ et soit $\eta = (x_n)_{n \geq 0} \in \ell_2$ tel que ${}^t\mathrm{S}(\eta) = \lambda\eta$; alors, pour tout $n \geq 0$, on a $x_{n+1} = \lambda x_n$; il s'ensuit alors que $x_n = \lambda^n x_0$; comme la suite $(\lambda^n)_{n \geq 0}$ n'est pas dans ℓ_2 (vu que $|\lambda| = 1$), on a nécessairement $x_0 = 0$, et enfin, $\eta = 0$; donc $\mathrm{Sp}_p({}^t\mathrm{S}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. Il résulte alors de la proposition 7 que $\mathrm{Sp}_r(\mathrm{S}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$; on a alors pour terminer $\mathrm{Sp}_c(\mathrm{S}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

c. Posons $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2([0,1])$ et reprenons l'opérateur $\mathrm{V} = \mathrm{V}_2$ de l'exemple 2.2, défini par $\mathrm{V}(f)(s) = \int_0^s f(t)\,dt$ pour $f \in \mathrm{H}$ et $s \in [0,1]$. On a montré que le rayon spectral de V est nul, donc $\mathrm{Sp}(\mathrm{V}) = \{0\}$. Remarquons que l'application qui à une fonction continue associe sa classe dans $\mathrm{L}_2([0,1])$ est injective ; donc si $\mathrm{V}(f) = 0$, alors $\mathrm{V}(f)(s) = 0$ pour tout $s \in [0,1]$, ce qui signifie que f est orthogonale à toutes les fonctions $\mathbf{1}_{[0,s]}$, donc à toutes les fonctions en escalier. Comme celles-ci forment un sous-espace dense dans $\mathrm{L}_2([0,1])$ il s'ensuit que V est injective. Il est clair que l'image de V contient l'ensemble des fonctions continues, linéaires par morceaux nulles en 0. Or celles-ci forment un sous-espace dense de $\mathrm{L}_2([0,1])$. On a montré que $\mathrm{Sp}_p(\mathrm{V}) = \mathrm{Sp}_r(\mathrm{V}) = \emptyset$ et $\mathrm{Sp}_c(\mathrm{V}) = \mathrm{Sp}(\mathrm{V}) = \{0\}$.

Valeurs propres approchées

Lemme 7.3.10. *Soient* E *un espace de Banach complexe,* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *et soit* $\lambda \in \partial\,\mathrm{Sp}(\mathrm{T})$ *(la frontière du spectre de* T*). Il existe une suite* $(x_n) \subset \mathrm{E}$ *de vecteurs de norme* 1 *telle que* $(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id_E})(x_n)$ *tende vers* 0.

Démonstration. En posant $\mathrm{S} = \mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id_E}$, on se ramène à montrer que si $0 \in \partial\,\mathrm{Sp}(\mathrm{S})$, il existe une suite $(x_n) \subset \mathrm{E}$ de vecteurs de norme 1 telle que $\mathrm{S}(x_n)$ tende vers 0. Puisque Sp(S) est fermé, sa frontière est contenue dans Sp(S), donc $0 \in \mathrm{Sp}(\mathrm{S})$ et S n'est pas inversible. Si on ne pouvait pas trouver la suite (x_n), on aurait $\|\mathrm{S}(x)\| \geq c\,\|x\|$ pour un $c > 0$ et tout $x \in \mathrm{E}$ (proposition 1), donc S(E) serait fermé, et $\mathrm{S}(\mathrm{E}) \neq \mathrm{E}$ puisque S n'est pas inversible. On pourrait alors trouver $y \notin \mathrm{S}(\mathrm{E})$; puisque 0 est à la frontière du spectre de S, il existe une suite (μ_n) hors du spectre et qui tend vers 0 ; alors $\mathrm{S} - \mu_n\,\mathrm{Id_E}$ est inversible pour tout n. Il existe donc un vecteur $z_n \in \mathrm{E}$ tel que $(\mathrm{S} - \mu_n\,\mathrm{Id_E})(z_n) = y$. Si (z_n) était bornée, on aurait $\mu_n z_n \to 0$ et y serait limite de la suite $(\mathrm{S}(z_n)) \subset \mathrm{S}(\mathrm{E})$, ce qui est impossible puisque S(E) est supposé fermé et $y \notin \mathrm{S}(\mathrm{E})$. Il existe donc une sous-suite (z'_n) telle que $\|z'_n\|$ tende vers $+\infty$; en posant $x_n = \|z'_n\|^{-1} z'_n$, on voit que $\mathrm{S}(x_n) - \mu_n x_n = \|z'_n\|^{-1} y$ tend vers 0, donc $\mathrm{S}(x_n) \to 0$. //

Exemple 7.3.3. Exemple de valeurs propres approchées : soit S le shift à droite sur $\ell_2(\mathbb{N})$; on sait que le spectre de S est égal au disque unité fermé, sa frontière est donc le cercle unité $\mathbb{T}$. Soit λ de module 1 un point quelconque de $\partial\,\mathrm{Sp}(\mathrm{S})$; on considère pour tout $n \geq 1$ le vecteur de norme 1 de ℓ_2

$$x_n = n^{-1/2}(1, \lambda^{-1}, \lambda^{-2}, \ldots, \lambda^{-n+1}, 0, \ldots)$$

et on note que $\|\mathrm{S}(x_n) - \lambda x_n\| \leq 2n^{-1/2} \to 0$, ce qui donne des presque vecteurs propres pour la valeur $\lambda \in \mathbb{T}$.

Remarque 7.3.4. Voici une méthode plus orthodoxe pour traiter le cas hilbertien. Soient E un espace de Hilbert, T un opérateur normal et $\lambda \in \mathrm{Sp(T)}$; alors $\mathrm{S} = \mathrm{T} - \lambda\, \mathrm{Id_E}$ est normal non inversible, donc S ne vérifie pas **A** (lemme 8) : *toutes les valeurs spectrales d'un opérateur normal sont valeurs propres approchées.*

Proposition 7.3.11. *Soit* H *un espace de Hilbert complexe ; le spectre de tout élément hermitien de* $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ *est réel ; si de plus* T *est un opérateur positif, son spectre est contenu dans* $[0, +\infty[$. *Le spectre de tout élément unitaire de* $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ *est contenu dans le cercle unité.*

Démonstration. Soit β le max de $|b|$ pour $a + ib = \lambda$ dans le spectre de T hermitien, et soit $\lambda = a + ib \in \mathrm{Sp(T)}$ tel que $|b| = \beta$. Alors λ est point frontière du spectre, donc il existe une suite (x_n) de vecteurs de norme un telle que $\mathrm{T}(x_n) - \lambda x_n$ tende vers 0. On voit donc que

$$\langle \mathrm{T}(x_n) - \lambda x_n, x_n\rangle = \langle \mathrm{T}(x_n), x_n\rangle - \lambda\langle x_n, x_n\rangle = \langle \mathrm{T}(x_n), x_n\rangle - \lambda$$

tend vers 0, et $\langle \mathrm{T}(x_n), x_n\rangle = \langle x_n, \mathrm{T}(x_n)\rangle$ est réel, donc λ est réel, $b = \beta = 0$ et tout le spectre de T est réel. Si T est positif, son spectre est contenu dans $\mathbb{R}$, donc tous les points λ de $\mathrm{Sp(T)}$ sont points frontière et sont donc limite de suites de la forme $(\langle \mathrm{T}(x_n), x_n\rangle)$ comme on l'a vu ci-dessus. Mais quand T est positif, tous ces nombres sont ≥ 0, donc $\lambda \geq 0$.

Si $\mathrm{U} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ est unitaire, considérons de même τ, le min de $|r|$ pour $\lambda = r\, \mathrm{e}^{i\theta}$ dans le spectre de U. Par compacité, on peut trouver un point du spectre de la forme $\lambda = \tau\, \mathrm{e}^{i\theta}$; puisque U est inversible, $0 \notin \mathrm{Sp(U)}$ donc $\tau > 0$. Comme précédemment, λ est un point frontière et on peut trouver une suite (x_n) de vecteurs de norme un telle que $\mathrm{U}x_n - \lambda x_n \to 0$. Comme U est isométrique, il en résulte que $|\lambda| = 1$. Le spectre de U ne contient donc aucun point du disque unité ouvert. Par ailleurs, $\mathrm{Sp(U)}$ est contenu dans le disque unité puisque $\|\mathrm{U}\| = 1$. Le résultat annoncé en découle.

//

Le résultat sur les isométries bijectives est valable pour tout espace de Banach. Par ailleurs, on peut aussi le démontrer très simplement en remarquant que le spectre de U^{-1} est formé des inverses des éléments de $\mathrm{Sp(U)}$, et qu'il est lui aussi contenu dans le disque unité puisque $\|\mathrm{U}^{-1}\| = 1$.