ANALYSE FONCTIONNELLE ET THÉORIE SPECTRALE

MT404

Année 2001-2002

Sommaire

Chapitre 0. Introduction 1
Chapitre 1. Espaces normés et applications linéaires continues 3
1.1. Normes, semi-normes ; espaces de Banach 3
1.2. Applications linéaires continues 7
1.3. Produits et quotients 10
1.4. Principe de prolongement. Complété d'un espace normé 11
1.5. Complexifié d'un espace normé réel 12
1.6. Dual d'un espace normé, application transposée 12
1.7. Parties totales. Séparabilité 13
Chapitre 2. Espaces de Hilbert 15
2.1. Produits scalaires 15
2.2. Espaces de Hilbert, orthogonalité, bases 17
2.3. Théorème de projection 21
Chapitre 3. Les espaces de Banach classiques 25
3.1. Espaces de fonctions continues ou intégrables 25
3.2. Résultats de densité 27
3.3. Hölder et dualité des espaces ℓ_p 28
3.4. Théorème de Radon-Nikodym et dual de L_p 30
3.5. Dual de C(K) 35
3.6. Séries de Fourier 36
3.7. Transformation de Fourier 38
Chapitre 4. Les théorèmes fondamentaux 41
4.1. Le théorème de Baire et ses conséquences 41
4.2. Théorème de Hahn-Banach 44
4.3. Bidual d'un espace normé. Espaces de Banach réflexifs 49
4.4. Théorème de Riesz 51
Chapitre 5. Topologies faibles 53
5.1. Topologies initiales 53
5.2. Topologie faible sur un espace normé 53
5.3. Suites faiblement convergentes 55
Chapitre 6. Opérateurs bornés sur les espaces de Hilbert 59
6.1. Applications linéaires continues entre Hilbert 59
6.2. Familles sommables dans un espace de Banach 61
6.3. Bases hilbertiennes 62
6.4. L'espace hilbertien $\ell^2(\mathrm{I})$ 64
Chapitre 7. Algèbres de Banach et théorie spectrale 65
7.1. Algèbres de Banach, spectre et résolvante 65
7.2. Rayon spectral 69
7.3. Décomposition du spectre d'un opérateur borné 71
Chapitre 8. Quelques classes d'opérateurs 77
8.1. Compacité dans un espace de Banach 77
8.2. Applications linéaires compactes 79
8.3. Théorie spectrale des opérateurs compacts 82
8.4. Opérateurs de Hilbert-Schmidt 86

Chapitre 9. Calcul fonctionnel continu 89
9.1. Calcul fonctionnel polynomial 89
9.2. Calcul fonctionnel continu pour les opérateurs hermitiens 90
9.3. Application aux hermitiens positifs. La racine carrée 95
9.4. Le cas général : opérateurs normaux 96
Chapitre 10. Décomposition spectrale des opérateurs normaux 99
10.1. Opérateurs unitairement équivalents 99
10.2. Opérateurs de multiplication et spectre 100
10.3. Théorème de représentation. Décomposition spectrale 100
Chapitre 11. Opérateurs autoadjoints non bornés 103
11.1. Opérateurs non bornés 103
11.2. Spectre des opérateurs fermés 107
11.3. Transposés et adjoints 109
11.4. Théorème de représentation. Décomposition spectrale 112
11.5. Le théorème de Stone 115
Index terminologique
Index des notations

0. Introduction

L'Analyse Fonctionnelle est née au début du 20ème siècle pour fournir un cadre abstrait et général à un certain nombre de problèmes, dont beaucoup sont issus de la physique, et où la question posée est la recherche d'une *fonction* vérifiant certaines propriétés, par exemple une équation aux dérivées partielles. La théorie moderne de l'intégration (Lebesgue, un peu après 1900) et la théorie des espaces de Hilbert se sont rejointes pour créer l'un des objets les plus importants, l'espace L_2 des fonctions de carré sommable, qui a permis en particulier de placer la théorie des séries de Fourier dans un cadre conceptuellement beaucoup plus clair et plus simple que celui qui était en vigueur à la fin du 19ème siècle.

La première partie du poly contient les éléments de base de l'Analyse Fonctionnelle : espaces normés et espaces de Banach, espaces de Hilbert, applications linéaires continues, dualité, topologies faibles. La seconde partie concerne la théorie spectrale. En très gros, il s'agit de la généralisation au cadre infini-dimensionnel de la théorie de la diagonalisation. La notion fondamentale est la notion de *spectre* d'une application linéaire continue d'un espace de Banach dans lui-même. Le *calcul fonctionnel* sera l'occasion de mettre en action nombre d'objets vus en licence.

Ce polycopié provient en grande partie du polycopié de Georges Skandalis pour l'édition 1998-1999 du même enseignement. Je le remercie vivement de m'avoir transmis ses fichiers, ce qui m'a considérablement allégé la tâche. J'encourage très vivement les étudiants à lire de vrais et bons *livres* d'Analyse Fonctionnelle, par exemple ceux de Brézis, Reed et Simon, Rudin, qui sont indiqués dans la brochure de la maîtrise.

La plupart des points du cours sont numérotés, par chapitre-section-type, par exemple le "théorème 2.3.4" serait le quatrième énoncé (théorème, proposition, lemme, corollaire) de la section 3 du chapitre 2 ; à l'intérieur de cette section, le théorème sera appelé "théorème 4", ailleurs dans le chapitre 2 il sera désigné par "théorème 3.4" et dans un autre chapitre "théorème 2.3.4". Les passages écrits en petits caractères contiennent des informations qui peuvent être omises en première lecture. Le poly se termine par un index terminologique et un index des notations.

Il existe une version longue de ce poly, disponible sur le web (voir plus loin). J'ai gardé ici la numérotation de ce poly *long*, pour des raisons évidentes de compatibilité. Certaines sections, et surtout certains théorèmes, remarques, etc... ont été supprimés dans la présente version. Il en résulte que la numérotation de cette version pourra sembler bizarre et pleine de trous par endroits.

Depuis deux ans, j'ai fait une tentative pour utiliser les "nouvelles technologies" en plaçant un certain nombre d'informations sur un site Web,

`http://www.math.jussieu.fr/~maurey/ths.html`

en particulier le texte de ce poly, des résumés de cours, etc... Je suis toujours content de recevoir des suggestions constructives pour améliorer l'efficacité de cet outil.

B. Maurey

Quelques notations : si X est un ensemble, on note Id_{X} *l'application identité* de X, c'est à dire l'application de X dans X telle que $\mathrm{Id}_{\mathrm{X}}(x) = x$ pour tout $x \in \mathrm{X}$. Si A est un sous-ensemble de X, on notera A^c le complémentaire de A. On notera $\mathbf{1}_{\mathrm{A}}$ la *fonction indicatrice* de A, qui est égale à 1 en tout point de A et à 0 en tout point de A^c. Si f est une fonction réelle définie sur l'ensemble X, il est parfois rapide et agréable d'utiliser la notation des probabilistes $\{f > t\} = \{x \in \mathrm{X} : f(x) > t\}$. De temps en temps on notera 0_{X} le vecteur nul d'un espace vectoriel X, quand il semblera que cette notation lourde lève toute ambiguïté.

Chapitre 1. Espaces normés et applications linéaires continues

1.1. Normes, semi-normes ; espaces de Banach

On note $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les espaces vectoriels considérés dans ce cours seront toujours des espaces vectoriels réels ou complexes.

Définition 1.1.1. Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$; on appelle *semi-norme* sur X une application $p : \mathrm{X} \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) pour tout $x \in \mathrm{X}$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$;
(ii) pour tous $x, y \in \mathrm{X}$, on a $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

Si pour tout vecteur x non nul de X on a $p(x) > 0$, on dit que p est une *norme* sur X.

La propriété $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ s'appelle *l'inégalité triangulaire* pour la semi-norme p. De l'inégalité triangulaire ci-dessus, on déduit :

Lemme 1.1.1. *Si p est une semi-norme sur* X, *on a $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y)$ pour tous vecteurs $x, y \in \mathrm{X}$.*

Rappelons qu'un sous-ensemble C d'un espace vectoriel X est dit *convexe* si pour tout couple (x, y) d'éléments de C, le *segment* $[x, y]$ est tout entier contenu dans C ; le segment $[x, y]$ est formé des *combinaisons convexes* des deux points x et y, c'est à dire tous les points de la forme $z = (1-t)x + ty$, où t varie dans $[0, 1]$. Une fonction réelle f définie sur un sous-ensemble convexe C de X est dite *fonction convexe sur* C si

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)\, f(x) + t\, f(y)$$

pour tous $x, y \in \mathrm{C}$ et tout $t \in [0, 1]$. On dira qu'une fonction réelle q sur X est *positivement homogène* si elle vérifie que $q(\mu x) = \mu\, q(x)$ pour tout $x \in \mathrm{X}$ et tout nombre réel $\mu \geq 0$. Si q est positivement homogène et *sous-additive*, c'est à dire que $q(x+y) \leq q(x) + q(y)$ pour tous $x, y \in \mathrm{X}$, alors q est une fonction convexe sur X, puisqu'on aura alors

$$q((1-t)x + ty) \leq q((1-t)x) + q(ty) = (1-t)q(x) + tq(y).$$

En particulier, les semi-normes sur X sont des fonctions convexes. Lorsque f est une fonction convexe définie sur un ensemble convexe $\mathrm{C} \subset \mathrm{X}$, les ensembles de la forme $\mathrm{C}_t = \{x \in \mathrm{C} : f(x) \leq t\}$ sont des ensembles convexes, pour tout t réel (la réciproque n'est pas vraie).

Corollaire 1.1.3. *Pour que la fonction $p \geq 0$ soit une semi-norme sur l'espace vectoriel* X, *il faut et il suffit que $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$ pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ et pour tout vecteur $x \in \mathrm{X}$ et que l'ensemble $\{x \in \mathrm{X} : p(x) \leq 1\}$ soit convexe.*

Démonstration. Supposons que $\mathrm{C}_p = \{x \in \mathrm{X} : p(x) \leq 1\}$ soit convexe, et déduisons la sous-additivité de p ; soient x et y deux vecteurs de X, $a > p(x)$ et $b > p(y)$;

considérons les deux vecteurs $x_1 = a^{-1}x$ et $y_1 = b^{-1}y$; l'homogénéité de p implique que $p(x_1) < 1$ et $p(y_1) < 1$; formons ensuite la combinaison convexe

$$z = \frac{a}{a+b}\, x_1 + \frac{b}{a+b}\, y_1,$$

qui est dans C_p d'après l'hypothèse de convexité, c'est à dire que $p(z) \leq 1$. Mais on vérifie immédiatement que $z = (a+b)^{-1}(x+y)$, et l'homogénéité de p transforme alors l'inégalité $p(z) \leq 1$ en $p(x+y) \leq a+b$. En faisant tendre a vers $p(x)$ et b vers $p(y)$ on obtient $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

//

Exemple 1.1.2. Pour $1 \leq r < +\infty$, soit $\mathcal{L}_r = \mathcal{L}_r([0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions f complexes définies sur $[0,1]$ telles que f soit mesurable et $\int_0^1 |f(s)|^r\, ds < +\infty$; la quantité

$$p(f) = \Big(\int_0^1 |f(s)|^r\, ds \Big)^{1/r}$$

est une semi-norme sur $\mathcal{L}_r$;

pour le vérifier, on voit d'abord que $p(\lambda f) = |\lambda|\, p(f)$ (facile), puis on montre que l'ensemble $\{f \in \mathcal{L}_r : p(f) \leq 1\}$ est convexe. Cela provient de la convexité sur $[0, +\infty[$ de la fonction $u \to u^r$; on a alors si f, g sont deux éléments de $\mathcal{L}_r$ tels que $p(f) \leq 1$, $p(g) \leq 1$ et si $0 \leq t \leq 1$,

$$|(1-t)f(s) + tg(s)|^r \leq \big((1-t)|f(s)| + t|g(s)|\big)^r \leq (1-t)|f(s)|^r + t|g(s)|^r$$

pour tout $s \in [0,1]$, donc

$$\int_0^1 \big|(1-t)f(s) + tg(s)\big|^r\, ds \leq (1-t) \int_0^1 |f(s)|^r\, ds + t \int_0^1 |g(s)|^r\, ds \leq (1-t) + t = 1.$$

On appelle *espace normé* un espace vectoriel X muni d'une norme p. Si (X, p) est un espace normé, nous en ferons un *espace métrique* en définissant la distance d sur X par $d(x,y) = p(x-y)$, et nous munirons X de la topologie associée à cette métrique, que nous appellerons *topologie de la norme*. Soient $x \in \mathrm{X}$ et $r > 0$; on appelle *boule ouverte* de centre x et de rayon r le sous-ensemble $\mathrm{B}_p(x,r) = \{y \in \mathrm{X} : p(y-x) < r\}$ de X. Rappelons que dans la topologie de la norme sur X, les parties ouvertes sont les réunions de boules ouvertes ; une partie U de X est un voisinage de $x \in \mathrm{X}$ si et seulement s'il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(x,r) \subset \mathrm{U}$. La *boule fermée* de centre x et de rayon $r > 0$ est l'ensemble $\{y \in \mathrm{X} : p(y-x) \leq r\}$. Par convention, la *boule unité* d'un espace normé X sera la boule *fermée* de centre 0_{X} et de rayon 1 ; on la notera B_{X}.

Proposition 1.1.4. *Soit (X, p) un espace normé ; l'application $p : \mathrm{X} \to \mathbb{R}_+$ est continue pour la topologie de la norme.*

Cela résulte immédiatement du lemme 1. En effet, si la suite $(x_n) \subset \mathrm{X}$ tend vers y, on aura

$$|p(x_n) - p(y)| \leq p(x_n - y) = d(x_n, y) \to 0.$$

En général, nous noterons $\|x\|$ la norme d'un vecteur x d'un espace normé X, ou bien $\|x\|_{\mathrm{X}}$ s'il y a un risque de confusion ; parfois il sera encore commode de désigner la

fonction norme par un symbole littéral, comme dans la notation (X, p) utilisée jusqu'ici.

La topologie et la structure d'espace vectoriel d'un espace normé sont compatibles, autrement dit, un espace normé est un espace vectoriel topologique au sens suivant :

Définition 1.1.3. Un *espace vectoriel topologique* est un espace vectoriel X sur $\mathbb{K}$ muni d'une topologie pour laquelle les deux applications $(x, y) \to x + y$ de $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ dans X et $(\lambda, x) \to \lambda x$ de $\mathbb{K} \times \mathrm{X}$ dans X sont continues.

Proposition 1.1.5. *Un espace normé, muni de la topologie de la norme, est un espace vectoriel topologique.*

Démonstration. Soit X un espace normé ; démontrons la continuité de l'application $(x, y) \to x + y$. Puisque la topologie provient d'une métrique, nous pouvons utiliser des suites convergentes. Soient donc (x_n) une suite qui converge vers x et (y_n) une suite qui converge vers y ; on aura

$$d(x_n + y_n, x + y) = \|x_n + y_n - x - y\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\|$$

qui tend bien vers 0. La continuité de l'application $(\lambda, x) \to \lambda\, x$ se démontre de façon analogue : si (λ_n) converge vers $\lambda \in \mathbb{K}$ et si (x_n) converge vers $x \in \mathrm{X}$, on écrira

$$d(\lambda_n x_n, \lambda\, x) \leq d(\lambda_n x_n, \lambda_n x) + d(\lambda_n x, \lambda\, x) = |\lambda_n|\, \|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda|\, \|x\|$$

qui tend vers 0 (noter que la suite (λ_n) est bornée puisqu'elle est convergente).

//

Exercice 1.1.4. Si C est un sous-ensemble convexe d'un espace normé X, montrer que son adhérence est convexe. Montrer que l'adhérence d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.

Définition 1.1.5. Un *espace de Banach* est un espace vectoriel normé, complet pour la distance associée à la norme.

Si F est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Banach E, il est lui aussi complet pour la norme induite par celle de E, donc F est un espace de Banach.

Exemples 1.1.6.

1. L'espace $\mathrm{C}[0, 1]$ (réel ou complexe) des fonctions scalaires continues sur $[0, 1]$, muni de la *norme uniforme*,

$$\|f\|_\infty = \max_{t \in [0,1]} |f(t)|,$$

est un espace de Banach. Le fait qu'il soit complet est une traduction du théorème selon lequel une limite uniforme d'une suite de fonctions continues est une fonction continue.

2. Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace $\mathrm{L}_p = \mathrm{L}_p([0, 1])$ des *classes de fonctions* f complexes sur $[0, 1]$ telles que f soit mesurable et $\int_0^1 |f(s)|^p\, ds < +\infty$ est normé par

$$\|f\|_p = \Big(\int_0^1 |f(s)|^p\, ds \Big)^{1/p}.$$

On a déjà vu que $f \to \|f\|_p$ est une semi-norme. Si $\|f\|_p = 0$ et si $f_1 \in \mathcal{L}_p$ est un représentant quelconque de f, on a $\int_0^1 |f_1(s)|^p\, ds = 0$. Comme la fonction $|f_1|^p$ est

≥ 0, cela entraîne que $f_1 = 0$ presque partout, donc f est la classe nulle, c'est à dire que $f = 0_{\mathrm{L}_p}$. On a ainsi montré que $f \to \|f\|_p$ est une norme sur L_p.

Cet espace L_p est de plus complet (voir le chapitre 3).

3. De façon analogue, on désigne par $\ell_p = \ell_p(\mathbb{N})$ l'espace vectoriel des suites scalaires $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum |x_n|^p < +\infty$. C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p\Big)^{1/p}.$$

L'espace ℓ_∞ est l'espace des suites scalaires $x = (x_n)$ bornées, normé par

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|.$$

L'espace ℓ_∞ est complet pour cette norme. L'espace c_0 est l'espace des suites scalaires (x_n) telles que $\lim x_n = 0$. C'est un sous-espace fermé de ℓ_∞, donc un espace de Banach.

Séries de vecteurs

Une série de vecteurs $\sum u_k$ dans un espace normé X est dite *convergente dans* X si la suite des sommes partielles (U_n) est convergente dans X, où la somme partielle U_n est définie pour tout $n \geq 0$ par

$$\mathrm{U}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \in \mathrm{X}.$$

Si la série converge dans X, la *somme de la série* est un vecteur de X, qui est la limite de la suite (U_n), et on note

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_n \mathrm{U}_n \in \mathrm{X}.$$

Il faut bien comprendre que la notion de somme de la série n'a aucun sens si on ne mentionne pas la topologie qui a été utilisée pour définir la notion de limite.

Un cas particulier est celui des séries $\sum u_k$ telles que $\sum \|u_k\| < +\infty$, que l'on peut appeler *absolument convergentes* ou bien *normalement convergentes*.

Sous la condition $\sum \|u_k\| < +\infty$, le reste de la série des normes

$$r_n = \sum_{k>n} \|u_k\|$$

est une suite numérique qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$, et on peut écrire pour tous $\ell, m \geq n$, en supposant $\ell < m$ pour fixer les idées

$$\mathrm{U}_m - \mathrm{U}_\ell = u_{\ell+1} + \cdots + u_m,$$

$$\|\mathrm{U}_m - \mathrm{U}_\ell\| \leq \|u_{\ell+1}\| + \cdots + \|u_m\| \leq \sum_{k>n} \|u_k\| = r_n,$$

ce qui montre que la suite (U_n) est alors de Cauchy.

Quand X est complet, la condition $\sum \|u_k\| < +\infty$ garantit donc la convergence dans X de la série $\sum u_k$. En fait, on a

Proposition 1.1.6. *Soit* X *un espace normé ; pour que* X *soit complet, il faut et il suffit que pour toute série* $\sum u_k$ *de vecteurs de* X, *la condition* $\sum \|u_k\| < +\infty$ *entraîne que la série* $\sum u_k$ *est convergente dans* X.

Démonstration. On a déjà vu que si X est complet, les séries absolument convergentes sont convergentes dans X ; montrons la réciproque : soit (x_n) une suite de Cauchy de vecteurs de X ; pour tout entier $k \geq 0$, on peut trouver un entier N_k tel que $\|x_m - x_n\| < 2^{-k}$ pour tous entiers $m, n \geq \mathrm{N}_k$, et on peut supposer que $\mathrm{N}_{k+1} > \mathrm{N}_k$. Posons alors $u_0 = x_{\mathrm{N}_0}$ et

$$u_{k+1} = x_{\mathrm{N}_{k+1}} - x_{\mathrm{N}_k}$$

pour tout $k \geq 0$. Par construction, on a $\|u_{k+1}\| < 2^{-k}$, donc la série $\sum u_k$ converge dans X d'après l'hypothèse. Mais les sommes partielles (U_k) de cette série sont égales aux vecteurs (x_{N_k}), donc la sous-suite (x_{N_k}) converge vers le vecteur $\mathrm{U} \in \mathrm{X}$ somme de la série $\sum u_k$. Puisque la suite (x_n) est de Cauchy, on en déduit facilement que la suite entière (x_n) converge vers U, donc X est complet.

//

Notons que lorsque la série $\sum u_k$ converge dans X, on a l'inégalité

$$\Big\| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \Big\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\|,$$

en convenant que la somme de la série des normes vaut $+\infty$ lorsqu'elle est divergente. Cette inégalité est obtenue en passant à la limite dans la suite des inégalités triangulaires $\| \sum_{k=0}^{n} u_k \| \leq \sum_{k=0}^{n} \|u_k\|$.

Exemple 1.1.7. Pour tout $n \geq 0$, désignons par $\mathbf{e}_n$ le vecteur de ℓ_p, ou de c_0, dont les coordonnées sont $\mathbf{e}_{n,i} = 0$ si $i \neq n$ et $\mathbf{e}_{n,n} = 1$. On appellera $(\mathbf{e}_n)_{n \geq 0}$ la *suite canonique*. Soit $x = (x_n)$ un élément de c_0 ; le vecteur x est la somme (dans l'espace normé c_0) de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k \mathbf{e}_k$ (petit exercice pour le lecteur ; le même résultat vaut pour tous les espaces ℓ_p avec $p < +\infty$).

1.2. Applications linéaires continues

Théorème 1.2.1. *Soient* X *et* Y *deux espaces normés et* $\mathrm{T} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *une application linéaire ; les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(*i*) *l'application* T *est continue sur* X ;

(*ii*) *l'application* T *est continue au point* 0_{X} ;

(*iii*) *il existe un nombre* $\mathrm{M} \geq 0$ *tel que, pour tout* $x \in \mathrm{X}$ *on ait*

$$\|\mathrm{T}(x)\|_{\mathrm{Y}} \leq \mathrm{M} \, \|x\|_{\mathrm{X}}.$$

Démonstration. Il est clair que (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*). Si T est continue en 0, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que pour tout $u \in \mathrm{X}$, la condition $d_{\mathrm{X}}(u, 0) \leq \delta$ implique $d_{\mathrm{Y}}(\mathrm{T}(u), \mathrm{T}(0)) \leq 1$; autrement dit, $\|u\|_{\mathrm{X}} \leq \delta$ implique $\|\mathrm{T}(u)\|_{\mathrm{Y}} \leq 1$. Etant donné un vecteur x non nul quelconque dans X, le vecteur $u = \delta \, \|x\|_{\mathrm{X}}^{-1} x$ vérifie $\|u\|_{\mathrm{X}} \leq \delta$, donc $\|\mathrm{T}(u)\|_{\mathrm{Y}} \leq 1$, ce qui revient à dire que $\|\mathrm{T}(x)\|_{\mathrm{Y}} \leq \delta^{-1} \, \|x\|_{\mathrm{X}}$. On a ainsi montré que (*iii*) est vraie,

avec $M = \delta^{-1}$. Enfin, supposons (iii) vérifiée ; si une suite (x_n) de X tend vers un vecteur $x \in X$, on aura

$$d(T(x_n), T(x)) = \|T(x_n) - T(x)\|_Y = \|T(x_n - x)\|_Y \leq M \|x_n - x\|_X \to 0,$$

ce qui montre que T est continue au point x, et ceci pour tout $x \in X$.

//

Soient p et q deux semi-normes sur un espace vectoriel X ; on dit que p et q sont *équivalentes* s'il existe deux nombres réels $m > 0$ et $M \geq 0$ tels que $m\,p \leq q \leq M\,p$.

Corollaire 1.2.2. *Deux normes p et q sur un espace vectoriel* X *définissent la même topologie si et seulement si elles sont équivalentes.*

Soient X et Y deux espaces normés et S, T deux applications linéaires continues de X dans Y ; on sait que l'application $S+T$, qui associe à tout $x \in X$ l'image $S(x)+T(x) \in Y$, est linéaire. Vérifions rapidement sa continuité en 0 : si (x_n) tend vers 0 dans X, alors $(S(x_n))$ et $(T(x_n))$ tendent vers 0 dans Y donc $(S+T)(x_n) = S(x_n) + T(x_n)$ tend vers 0 par la propriété d'espace vectoriel topologique.

L'ensemble des applications linéaires continues de X dans Y est donc un sous-espace vectoriel noté $\mathcal{L}(X, Y)$ de l'ensemble des applications linéaires de X dans Y. On appelle aussi *opérateur borné* une application linéaire continue entre deux espaces normés. Dans le cas où $Y = X$, on note simplement $\mathcal{L}(X)$ l'espace des endomorphismes continus de X.

Soit $T : X \to Y$ une application linéaire continue ; d'après le théorème 1, il existe une constante M telle que $\|T(x)\|_Y \leq M$ pour tout vecteur x de X tel que $\|x\|_X \leq 1$. On peut donc considérer la quantité (finie)

$$\|T\| = \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup\{\|T(x)\|_Y : \|x\|_X \leq 1\}$$

qui s'appelle la *norme de l'application linéaire* T.

Proposition 1.2.3. *Soient* X *et* Y *deux espaces normés et* $T : X \to Y$ *une application linéaire continue ; on pose*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup\{\|T(x)\|_Y : \|x\|_X \leq 1\}.$$

Pour tout $x \in X$, on a

$$\|T(x)\|_Y \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x\|_X.$$

La constante $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ est le plus petit nombre M *tel que l'inégalité $\|T(x)\|_Y \leq M \|x\|_X$ soit vraie pour tout $x \in X$. L'application $T \to \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ est une norme sur $\mathcal{L}(X, Y)$.*

Démonstration. Vérifions que $T \to \|T\|$ est une norme. Il est d'abord évident que $\|T\| = 0$ implique que $\|T(x)\| = 0$ pour tout $x \in X$, c'est à dire $T(x) = 0_Y$ pour tout $x \in X$ puisque Y est normé, donc T est l'application nulle. Montrons ensuite que $T \to \|T\|$ est une semi-norme ; il est facile de vérifier que $\|\lambda T\| = |\lambda| \, \|T\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$; ensuite, pour tout x tel que $\|x\| \leq 1$,

$$\|(S+T)(x)\| = \|S(x) + T(x)\| \leq \|S(x)\| + \|T(x)\| \leq \|S\| + \|T\|,$$

d'où l'inégalité $\|S+T\| \leq \|S\| + \|T\|$, obtenue en passant au sup sur x dans la boule unité de X.

//

Exemples 1.2.1.

1. Si X est un espace normé non nul, on a toujours $\| \mathrm{Id}_{\mathrm{X}} \| = 1$.

2. Soit $f \in \mathrm{C}([0,1])$ fixée ; on définit un endomorphisme M_f de $\mathrm{C}([0,1])$, l'application de multiplication par f, en posant $\mathrm{M}_f(g) = fg$ pour toute $g \in \mathrm{C}([0,1])$. On montre que $\|\mathrm{M}_f\| = \|f\|_\infty$.

La proposition suivante est facile mais importante.

Proposition 1.2.4. *Soient* X, Y *et* Z *des espaces normés,* $\mathrm{S} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *et* $\mathrm{T} : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ *des applications linéaires continues ; on a*

$$\|\mathrm{T} \circ \mathrm{S}\| \leq \|\mathrm{S}\| \, \|\mathrm{T}\|.$$

Démonstration. Soit x un vecteur de X ; on peut écrire

$$\|(\mathrm{T} \circ \mathrm{S})(x)\|_{\mathrm{Z}} = \|\mathrm{T}(\mathrm{S}(x))\|_{\mathrm{Z}} \leq \|\mathrm{T}\| \, \|\mathrm{S}(x)\|_{\mathrm{Y}} \leq \|\mathrm{T}\| \, \|\mathrm{S}\| \, \|x\|_{\mathrm{X}},$$

ce qui entraîne l'inégalité voulue.

//

Proposition 1.2.5. *Soient* X *et* Y *deux espaces normés ; si* Y *est un espace de Banach, l'espace* $\mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *est un espace de Banach.*

Démonstration. Supposons que Y soit un espace de Banach. Soit $\sum u_k$ une série normalement convergente dans $\mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$; pour tout vecteur $x \in \mathrm{X}$, on a $\|u_k(x)\| \leq \|u_k\| \, \|x\|$, donc la série $\sum u_k(x)$ est normalement convergente dans Y. Puisque Y est complet, cette série converge dans Y et on peut poser pour tout $x \in \mathrm{X}$

$$\mathrm{U}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) \in \mathrm{Y}.$$

Il est facile de vérifier que l'application U ainsi définie de X dans Y est linéaire, et de plus pour tout $x \in \mathrm{X}$ on a $\|\mathrm{U}(x)\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k(x)\| \leq \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\|\right) \|x\|$, ce qui montre que U est continue et

$$(*) \qquad \|\mathrm{U}\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\|.$$

Il reste à voir que U est la limite dans $\mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ de la suite (U_n) des sommes partielles. On a

$$(\mathrm{U} - \mathrm{U}_n)(x) = \sum_{j>n} u_j(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k(x)$$

où on a posé $v_k = u_{n+k+1}$ pour tout $k \geq 0$; en appliquant l'inégalité $(*)$ à la série $\sum v_k$ on obtient $\|\mathrm{U} - \mathrm{U}_n\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|v_k\| = \sum_{k>n} \|u_k\|$, et cette quantité tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

//

Image d'une série convergente. Soit $\sum u_k$ une série convergente de vecteurs dans l'espace normé X et soit $T : X \to Y$ une application linéaire continue. Alors la série $\sum T(u_k)$ converge dans Y et

$$T\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\Big) = \sum_{k=0}^{+\infty} T(u_k).$$

Démonstration. La suite des sommes partielles $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ converge dans X vers la somme U de la série, on a $T(U_n) = \sum_{k=0}^{n} T(u_k)$ par linéarité de T, et $T(U_n)$ tend vers l'image T(U) de U, par la continuité de T.

//

1.3. Produits et quotients

Proposition 1.3.1. *Soient* X *et* Y *deux espaces normés ; il existe une norme sur* $X \times Y$ *qui définit la topologie produit.*

Remarque 1.3.1. On vérifie sans peine que $X \times Y$ est un espace de Banach si et seulement si X et Y sont des espaces de Banach.

Soient X un espace vectoriel et Y un sous-espace de X ; rappelons que X/Y est le quotient de X pour la relation d'équivalence R_Y telle que $x \, R_Y \, y \iff y - x \in Y$. Le quotient X/Y est muni de l'unique structure d'espace vectoriel pour laquelle l'application quotient $X \to X/Y$ est linéaire. La classe de 0_X est égale à Y, et c'est le vecteur nul de l'espace quotient X/Y ; les autres classes sont les translatés de Y (ce sont les sous-espaces affines $Y + x$, parallèles à Y).

Proposition 1.3.2. *Soient* X *un espace normé et* Y *un sous-espace vectoriel fermé de* X ; *notons* $\pi : X \to X/Y$ *l'application quotient. La fonction* $q : X/Y \to \mathbb{R}_+$ *définie par*

$$q(\xi) = \inf\{\|x\| : x \in X,\, \pi(x) = \xi\}$$

est une norme sur X/Y.

Démonstration. Supposons que $q(\xi) = 0$ et montrons que ξ est la classe nulle dans X/Y, c'est à dire la classe d'équivalence égale au sous-espace Y ; c'est ici que l'hypothèse Y fermé est cruciale : dire que $q(\xi) = 0$ signifie qu'il existe des vecteurs x_n tels que $\pi(x_n) = \xi$ et tels que $\|x_n\| \to 0$. Si $y \in \xi$, la suite $(y - x_n)$ est dans la classe de 0, c'est à dire dans Y, et converge vers y ; il en résulte que $y \in Y$ puisque Y est fermé, donc $\xi \subset Y$ ce qui implique en fait $\xi = Y = 0_{X/Y}$.

Montrons que q est une semi-norme. Il est clair que $q(\lambda\xi) = |\lambda| \, q(\xi)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $\xi \in X/Y$. Soient $\xi, \xi' \in X/Y$ et $\varepsilon > 0$; on peut trouver $x, x' \in X$ tels que $\pi(x) = \xi$, $\pi(x') = \xi'$ et $\|x\| \le q(\xi) + \varepsilon$, $\|x'\| \le q(\xi') + \varepsilon$; on a

$$q(\xi + \xi') \le \|x + x'\| \le \|x\| + \|x'\| \le q(\xi) + q(\xi') + 2\varepsilon,$$

d'où $q(\xi + \xi') \le q(\xi) + q(\xi')$ en faisant tendre ε vers 0.

//

La projection π vérifie $\|\pi\| \le 1$. Notons encore que l'image par π de la boule unité ouverte $B_X(0,1)$ de X est exactement la boule unité ouverte du quotient X/Y.

Proposition 1.3.3. *Soient* X, Z *deux espaces normés,* Y *un sous-espace fermé de* X *et* $g \in \mathcal{L}(X, Z)$ *nulle sur* Y *; il existe une unique* $h \in \mathcal{L}(X/Y, Z)$ *telle que* $g = h \circ \pi$ *(où* $\pi : X \to X/Y$ *est l'application quotient) ; on a* $\|h\| = \|g\|$.

Proposition 1.3.4. *Soient* X *un espace de Banach et* Y *un sous-espace fermé ; alors* X/Y *est un espace de Banach.*

Démonstration. On va utiliser le critère de la proposition 1.6. Soit $\sum \xi_k$ une série normalement convergente dans le quotient. Pour tout entier $k \geq 0$ on peut trouver un représentant $u_k \in \xi_k$ tel que $\|u_k\| \leq 2\|\xi_k\|$; la série $\sum u_k$ est elle aussi normalement convergente, donc convergente dans X puisque X est complet. Finalement, la série $\sum \xi_k$, image par l'application linéaire continue π de la série convergente $\sum u_k$, est convergente dans X/Y, ce qui termine la démonstration.

//

1.4. Principe de prolongement. Complété d'un espace normé

Lemme 1.4.1. *Soient* X *un espace normé,* X_0 *un sous-espace vectoriel de* X, *dense dans* X *et* F *un espace de Banach ; toute application linéaire continue* $T : X_0 \to F$ *se prolonge de façon unique en application linéaire continue* $\widetilde{T} : X \to F$, *et* $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

C'est par ce procédé que l'on définit par exemple la transformée de Fourier sur $X = F = L_2(\mathbb{R})$, à partir de sa définition intégrale sur le sous-espace dense $X_0 = L_1 \cap L_2$.

Démonstration. Soient $x \in X$ et $n \geq 0$; d'après la densité de X_0 dans X, l'ensemble

$$A_n = \{y \in X_0 : \|y - x\| < 2^{-n}\}$$

est non vide ; si $y, y' \in A_n$, on a $\|y' - y\| \leq \|y' - x\| + \|y - x\| \leq 2^{-n+1}$, donc le diamètre de A_n tend vers 0 (l'ensemble A_n devrait s'appeler $A_n(x)$, mais ce serait vraiment trop lourd). Puisque T est linéaire bornée, la suite $(T(A_n))$ est une suite décroissante de sous-ensembles non vides de F, de diamètres tendant vers 0. Précisément, on déduit de ce qui précède que si $v, w \in \overline{T(A_n)}$, on a $\|v - w\| \leq \|T\|\, 2^{-n+1}$. Puisque F est complet, on sait que $\bigcap_n \overline{T(A_n)}$ contient exactement un point. Appelons $S(x)$ cet unique point.

Soit $(y_k)_k \subset X_0$ une suite quelconque telle que $y_k \to x$, et soit n_0 quelconque ; on aura $y_k \in A_{n_0}$ pour tout $k \geq k_0$, donc $\|T(y_k) - S(x)\| \leq 2^{-n_0+1}\, \|T\|$ pour $k \geq k_0$; ceci montre que $S(x) = \lim_k T(y_k)$ pour toute suite $(y_k) \subset X_0$ telle que $x = \lim_k y_k$. Il est facile de vérifier que $x \to S(x)$ est linéaire de X dans F, à partir de cette remarque (prendre $y_k \to x$ et $y'_k \to x'$). On a aussi

$$\|S(x)\| = \lim_k \|T(y_k)\| \leq \|T\| \lim_k \|y_k\| = \|T\|\, \|x\|,$$

ce qui montre que S est continue et $\|S\| \leq \|T\|$. Si $x \in X_0$, il est clair que $T(x)$ est l'unique point commun aux ensembles $T(A_n)$, donc $S(x) = T(x)$ dans ce cas, ce qui montre que S prolonge T ; il en résulte que $\|T\| \leq \|S\|$, donc $\|T\| = \|S\|$. Si S_1 est une autre application continue qui prolonge T, on aura $S_1(x) = \lim_k S_1(y_k)$ par continuité de S_1, mais $S_1(y_k) = T(y_k)$ par hypothèse, donc $S_1(x) = \lim_k T(y_k) = S(x)$ pour tout $x \in X$, ce qui montre l'unicité de S. Il nous suffit pour finir de prendre $\widetilde{T} = S$.

//

Lemme 1.4.2. *Soient* X *un espace normé,* X_0 *un sous-espace vectoriel de* X, *dense dans* X *et* F *un espace de Banach ; si* (T_n) *est une suite d'applications linéaires de* X *dans* F, *telle que* $M = \sup_n \|T_n\| < +\infty$ *et telle que* $\lim_n T_n(x)$ *existe dans* F *pour tout* $x \in X_0$, *alors* $T(x) = \lim_n T_n(x)$ *existe dans* F *pour tout* $x \in X$, *et l'application* T *est linéaire continue de* X *dans* F, *avec* $\|T\| \leq M$.

1.5. Complexifié d'un espace normé réel

Voir le poly long.

1.6. Dual d'un espace normé, application transposée

Rappelons que $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit X un espace normé sur $\mathbb{K}$; on appelle *dual* (topologique) de X et on note X^* l'espace de Banach $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$. Cet espace est complet par la proposition 2.5.

Exemple 1.6.1. Si $x = (x_n)$ est un élément de ℓ_1, on lui associe une forme linéaire continue f_x sur c_0 en posant

$$\forall y = (y_n) \in c_0, \quad f_x(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k y_k.$$

De plus, la norme de f_x dans le dual de c_0 est égale à la norme de x dans ℓ_1.

L'application $x \to f_x$ est donc une application linéaire isométrique de ℓ_1 dans $(c_0)^*$. Elle est aussi surjective, donc bijective. D'une certaine façon, le dual de c_0 "*est*" égal à ℓ_1.

Soit X un espace normé complexe ; c'est, en particulier, un espace normé réel. Il y a deux notions distinctes de dual pour X : le dual en tant qu'espace réel $X^*_{\mathbb{R}} = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(X, \mathbb{R})$ et le dual en tant qu'espace complexe $X^*_{\mathbb{C}} = \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X, \mathbb{C})$. En fait, on peut identifier ces deux espaces. Notons $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ l'application $\mathbb{R}$-linéaire qui à un nombre complexe $a + ib$ associe sa partie réelle a (pour $a, b \in \mathbb{R}$).

Proposition 1.6.1. *L'application* $g \to \mathrm{Re} \circ g$ *est une bijection isométrique de* $X^*_{\mathbb{C}}$ *sur l'espace* $X^*_{\mathbb{R}}$.

Démonstration. Soit $g \in X^*_{\mathbb{C}}$; alors $x \to \mathrm{Re}\, g(x)$ est $\mathbb{R}$-linéaire, et $|\mathrm{Re}\, g(x)| \leq |g(x)|$ pour tout $x \in X$, donc $\|\mathrm{Re} \circ g\| \leq \|g\|$. Par ailleurs, pour tout x dans la boule unité de X, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$ et $\lambda g(x) = |g(x)|$, donc

$$|g(x)| = \lambda g(x) = g(\lambda x) = (\mathrm{Re} \circ g)(\lambda x) \leq \|\mathrm{Re} \circ g\|,$$

par conséquent $\|g\| = \|\mathrm{Re} \circ g\|$. Par ailleurs, soit $\ell \in X^*_{\mathbb{R}}$, notons $g : x \to \ell(x) - i\ell(ix)$; on vérifie sans peine que g est $\mathbb{C}$-linéaire, et $\mathrm{Re}\, g = \ell$. On a donc prouvé que $g \to \mathrm{Re} \circ g$ est surjective ; comme elle est isométrique, elle est injective donc bijective.

//

Définition 1.6.2. Soient X et Y deux espaces normés et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$; on appelle *transposée topologique* de T (ou juste *transposée*) l'application ${}^tT : y^* \to y^* \circ T$ de Y^* dans X^*.

Regroupons dans la proposition suivante des propriétés élémentaires de la transposition :

Proposition 1.6.2. *Soient* X, Y *et* Z *des espaces normés ;*

(*i*) *pour tout* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, *l'application* ${}^tT$ *est linéaire et continue et* $\|{}^tT\| \leq \|T\|$;

(*ii*) *l'application* $T \to {}^tT$ *est linéaire de* $\mathcal{L}(X, Y)$ *dans* $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$;

(*iii*) *pour tout* $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ *et tout* $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$, *on a* ${}^t(T \circ S) = {}^tS \circ {}^tT$ *(bien noter l'interversion de* S *et* T*).*

Vérifions que $\|{}^tT\| \leq \|T\|$. Soit $y^* \in Y^*$ tel que $\|y^*\| \leq 1$. Pour tout vecteur $x \in X$ tel que $\|x\| \leq 1$ on a

$$|{}^tT(y^*)(x)| = |y^*(T(x))| \leq \|y^*\| \, \|T(x)\| \leq \|y^*\| \, \|T\| \, \|x\| \leq \|T\|,$$

d'où il résulte que $\|{}^tT(y^*)\| \leq \|T\|$ en prenant le sup sur x dans la boule unité de X, puis $\|{}^tT\| \leq \|T\|$ en prenant le sup sur y^* dans la boule unité de Y^*. La démonstration des autres points est laissée en exercice.

1.7. Parties totales. Séparabilité

Définition 1.7.1. On dit qu'un espace topologique Z est *séparable* s'il existe une partie *dénombrable* $D \subset Z$ qui soit dense dans Z.

– 1. Les espaces $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont séparables (par exemple, $\mathbb{Q}$ est un sous-ensemble dénombrable dense dans $\mathbb{R}$). Plus généralement, tout fermé de $\mathbb{C}$ est séparable (exercice).

– 2. Tout espace normé de dimension finie est séparable : si F est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de F, l'ensemble dénombrable $D = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : \lambda_i \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans F.

Proposition 1.7.1. *Pour que* X *normé soit séparable, il faut et il suffit qu'il existe une suite croissante* (F_n) *de sous-espaces de dimension finie de* X *telle que* $\bigcup_n F_n$ *soit dense dans* X. *Si* X *est un espace normé séparable de dimension infinie, on peut trouver une suite croissante* (F_n) *de sous-espaces vectoriels de* X *telle que* $\dim F_n = n$ *pour tout* $n \geq 0$ *et telle que la réunion* $F = \bigcup_n F_n$ *soit dense dans* X.

En effet, si $D = \{d_0, d_1, \ldots, d_n, \ldots\}$ est dense et si $F_n = \mathrm{Vect}(d_0, \ldots, d_{n-1})$, il est évident que $\bigcup_n F_n$ est dense dans X puisque cet ensemble contient D. Inversement si $\bigcup F_n$ est dense, on choisit D_n dénombrable dense dans F_n, et $D = \bigcup_n D_n$ sera dénombrable et dense dans X.

Pour établir la deuxième partie il suffit de modifier légèrement l'argument ci-dessus, en ne prenant le vecteur d_{n+1} *que s'il* n'est pas déjà dans $\mathrm{Vect}(d_0, \ldots, d_n)$: on pose $F_0 = \{0\}$ et pour tout $n \geq 0$, en supposant F_n déjà défini, de dimension n, on désigne par k_n le plus petit indice m tel que $d_m \notin F_n$ (s'il n'y avait pas de tel indice m, tous les vecteurs (d_m) seraient dans F_n, donc on aurait $X = F_n$ de dimension finie, contradiction). On pose $F_{n+1} = \mathrm{Vect}(F_n, d_{k_n})$. On vérifie que F_{n+1} contient $d_0, \ldots, d_{k_n}$, donc à la fin $\bigcup_n F_n$ contient l'ensemble dense D.

Exemples 1.7.2.

1. Les espaces ℓ_p et les espaces $\mathrm{L}_p([0,1])$ sont séparables pour $1 \leq p < \infty$.

   Pour tout $n \geq 0$, désignons par $\mathbf{e}_n$ le $n$ième vecteur de la *suite canonique* définie par $\mathbf{e}_n(k) = \delta_{n,k}$ pour tous $n, k \geq 0$. Le sous-espace $\mathrm{F}_n = \mathrm{Vect}(\mathbf{e}_0, \ldots, \mathbf{e}_{n-1})$ est formé des vecteurs y de ℓ_p dont les coordonnées y_j, $j \geq n$ sont nulles. Il est facile de voir que tout $x \in \ell_p$ est limite d'une suite de tels vecteurs y.

2. En revanche, ℓ_∞ et $\mathrm{L}_\infty([0,1])$ ne sont pas séparables.

   Pour $t \in [0,1]$, soit f_t la fonction indicatrice de $[0,t]$; alors $\|f_s - f_t\|_\infty = 1$ si $s \neq t$, et la famille (f_t) est non-dénombrable ; si (x_n) était dense dans L_∞, il existerait pour tout $t \in [0,1]$ un indice *unique* n tel que $\|f_t - x_n\|_\infty < 1/4$, ce qui donnerait une injection de $[0,1]$ dans $\mathbb{N}$.

Soient X un espace normé et D un sous-ensemble de X ; on dit que D est *total* dans X si le sous-espace vectoriel L (algébrique) engendré par D est dense dans X (ce sous-espace L est l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de D).

Par exemple, la suite canonique $(\mathbf{e}_n)_{n\geq 0}$ est totale dans ℓ_p pour tout $p < \infty$. Elle n'est pas totale dans ℓ_∞, mais elle est totale dans c_0.

Proposition 1.7.2. *Pour qu'un espace normé* X *soit séparable, il faut et il suffit qu'il admette une partie dénombrable totale.*

Démonstration. Soit X un espace normé tel qu'il existe une suite (x_n) d'éléments totale dans X ; l'espace vectoriel L engendré par la suite est dense dans X, et il est égal à la réunion croissante des sous-espaces L_n de dimension finie définis par $\mathrm{L}_n = \mathrm{Vect}(x_0, \ldots, x_{n-1})$. On sait alors que X est séparable puisque $\bigcup_{n\geq 0} \mathrm{L}_n$ est dense dans X (appliquer la proposition 1). Dans l'autre direction c'est trivial.

//