11. Opérateurs autoadjoints non bornés

11.1. Opérateurs non bornés

Préliminaires algébriques

Dans cette sous-section il ne sera question que d'algèbre linéaire : pas un poil de topologie. Soient X et Y deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; une *application linéaire partiellement définie* (un peu plus loin, on dira un *opérateur*) T de X dans Y est donnée par un sous-espace vectoriel dom(T) de X appelé *domaine* de T et par une application linéaire (usuelle) $\mathrm{L_T}$ de dom(T) dans Y.

Autrement dit, la donnée T est celle de $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{dom(T)}, \mathrm{L_T})$. Le *graphe* de T est le sous-espace vectoriel du produit $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ égal à $\mathrm{Gr(T)} = \{(x, \mathrm{L_T}(x)) : x \in \mathrm{dom(T)}\}$. On va voir que T est complètement déterminé par Gr(T), qui est un sous-espace vectoriel G de $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$, avec la propriété $\big((0_\mathrm{X}, y) \in \mathrm{G}\big) \Rightarrow (y = 0_\mathrm{Y})$.

Dans la suite, pour tout $x \in \mathrm{dom(T)}$ on posera $\mathrm{T}(x) = \mathrm{L_T}(x)$ et on ne fera plus la distinction entre $\mathrm{L_T}(x)$ et $\mathrm{T}(x)$. On laissera donc tomber complètement $\mathrm{L_T}$. Si T est une application linéaire partiellement définie, le *graphe* de T est donc le sous-espace vectoriel du produit $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ égal à $\mathrm{Gr(T)} = \{(x, \mathrm{T}(x)) : x \in \mathrm{dom(T)}\}$. La restriction à Gr(T) de la première projection est injective. Réciproquement, appelons *graphe partiel* tout sous-espace vectoriel G de $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ tel que la restriction de la première projection à G soit injective. Autrement dit, si $(x, y) \in \mathrm{G}$ et $(x, y') \in \mathrm{G}$, alors $y = y'$; ou encore : si $(0, y) \in \mathrm{G}$, alors $y = 0$. On voit que tout graphe partiel est le graphe d'une unique application linéaire partiellement définie T. La correspondance qui à T associe son graphe est une correspondance bijective entre applications linéaires partiellement définies et graphes partiels :

> soit $\mathrm{G} \subset \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ un graphe partiel. Notons $p_1 : \mathrm{G} \to \mathrm{X}$ et $p_2 : \mathrm{G} \to \mathrm{Y}$ les projections et définissons un opérateur T en posant $\mathrm{dom(T)} = p_1(\mathrm{G})$ et $\mathrm{T}(p_1(x)) = p_2(x)$ pour tout $x \in \mathrm{G}$. Il est clair que $\mathrm{Gr(T)} = \mathrm{G}$. Comme le noyau de la première projection de $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ dans X est le sous-espace $\{0\} \times \mathrm{Y}$ de $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$, la correspondance entre opérateur et graphe partiel est bijective.

Désormais on dira *opérateur* au lieu d'application linéaire partiellement définie. On appelle *noyau* de T le sous-espace $\ker(\mathrm{T}) = \{x \in \mathrm{dom(T)} : \mathrm{T}(x) = 0\}$ de X et *image* de T le sous-espace $\mathrm{im(T)} = \mathrm{T(dom(T))}$ de Y. On appelle *extension* d'un opérateur T tout opérateur S tel que $\mathrm{Gr(T)} \subset \mathrm{Gr(S)}$. On écrit alors $\mathrm{T} \subset \mathrm{S}$.

Soient S et T deux opérateurs de X dans Y ; on définit l'opérateur $\mathrm{S} + \mathrm{T}$ en posant $\mathrm{dom(S + T)} = \mathrm{dom(S)} \cap \mathrm{dom(T)}$ et en posant $(\mathrm{S} + \mathrm{T})(x) = \mathrm{S}(x) + \mathrm{T}(x)$ pour tout vecteur $x \in \mathrm{dom(S + T)}$. Si R, S et T sont des opérateurs de X dans Y, on a clairement $\mathrm{R} + \mathrm{S} = \mathrm{S} + \mathrm{R}$ et $(\mathrm{R} + \mathrm{S}) + \mathrm{T} = \mathrm{R} + (\mathrm{S} + \mathrm{T})$.

Si S est une application linéaire usuelle de X dans Y, elle définit un opérateur de la façon la plus évidente : on pose $\mathrm{dom(S)} = \mathrm{X}$ et $\mathrm{S}(x) \in \mathrm{Y}$ aura le sens habituel pour tout $x \in \mathrm{X}$; si T est un opérateur de X dans Y, le domaine de $\mathrm{S} + \mathrm{T}$ sera égal à celui de l'opérateur T. Cette remarque sera utilisée lorsque $\mathrm{X} = \mathrm{Y}$ et $\mathrm{S} = \lambda\, \mathrm{Id_X}$, pour introduire l'opérateur $\mathrm{T} - \lambda\, \mathrm{Id_X}$, de même domaine que T.

Soient X, Y et Z des espaces vectoriels, T un opérateur de X dans Y et S un opérateur de Y dans Z ; on définit la composition ST de ces deux opérateurs en posant d'abord $\mathrm{dom(ST)} = \{x \in \mathrm{dom(T)} : \mathrm{T}(x) \in \mathrm{dom(S)}\}$ et en posant $(\mathrm{ST})(x) = \mathrm{S}(\mathrm{T}(x))$ pour tout $x \in \mathrm{dom(ST)}$. Si R est un opérateur de Z dans un quatrième espace vectoriel H, on a $(\mathrm{RS})\mathrm{T} = \mathrm{R}(\mathrm{ST})$. De plus, si T est un opérateur de X dans Y et si R et S sont des opérateurs de Y dans Z, on a $(\mathrm{R}+\mathrm{S})\mathrm{T} = \mathrm{RT} + \mathrm{ST}$.

L'attitude habituelle quand on travaille avec les opérateurs bornés continus est d'essayer de les prolonger le plus vite possible à l'espace complet convenable (penser à la transformation de Fourier, qui est définie sur $\mathrm{L}_1(\mathbb{R})$ par la formule intégrale usuelle ; on appelle aussi transformation de Fourier son extension par continuité à l'espace $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$). Pour comprendre les définitions de ce paragraphe, il faut se dire qu'on adopte l'attitude radicalement opposée : ici, on ne prend **aucune** initiative de prolongement ; si T_1 est défini sur D_1 et T_2 sur D_2, la seule chose que nous sommes obligés d'admettre est que les deux sont définis sur $\mathrm{D}_1 \cap \mathrm{D}_2$. On ne cherche surtout pas à aller plus loin.

Exemples 11.1.1.

A. On prend $\mathrm{X} = \mathrm{Y} = \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, dom(T) est l'espace des fonctions C^1 à support compact et on pose $\mathrm{T}(f) = f'$ pour $f \in \mathrm{dom(T)}$.

B. Cet exemple se décline en trois variantes.

– B1 : on prend $\mathrm{X} = \mathrm{Y} = \mathrm{L}_2([0,1])$, $\mathrm{dom}(\mathrm{T}_1)$ est l'espace des fonctions C^1 sur $[0,1]$ et $\mathrm{T}_1(f) = f'$ pour $f \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}_1)$.

– B2 : on prend $\mathrm{X} = \mathrm{Y} = \mathrm{L}_2([0,1])$, $\mathrm{dom}(\mathrm{T}_2)$ est l'espace des fonctions f qui sont C^1 sur $[0,1]$ et telles que $f(0) = f(1) = 0$, et $\mathrm{T}_2(f) = f'$ pour $f \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}_2)$.

– B3 : on prend $\mathrm{X} = \mathrm{Y} = \mathrm{L}_2([0,1])$, $\mathrm{dom}(\mathrm{T}_3)$ est l'espace des fonctions f qui sont C^1 sur $[0,1]$ et telles que $f(0) = f(1)$, et $\mathrm{T}_3(f) = f'$ pour $f \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}_3)$.

Ça a l'air de pinaillages ridicules, mais on verra plus loin à propos des adjoints qu'il y a des différences importantes dans les propriétés de T_1, T_2 et T_3.

Un opérateur T de X dans Y est dit *injectif* si l'application $\mathrm{T} : \mathrm{dom(T)} \to \mathrm{Y}$ est injective. Soit T un opérateur injectif de X dans Y ; le sous-ensemble de $\mathrm{Y} \times \mathrm{X}$ égal à $\{(y,x) \in \mathrm{Y} \times \mathrm{X} : (x,y) \in \mathrm{Gr(T)}\}$ est le graphe d'un opérateur T^{-1} (de domaine im(T)) appelé *inverse* de T. Clairement T^{-1} est injectif et $(\mathrm{T}^{-1})^{-1} = \mathrm{T}$. Si $\mathrm{T} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ et $\mathrm{S} : \mathrm{Y} \to \mathrm{G}$ sont injectifs, alors ST est injectif et $(\mathrm{ST})^{-1} = \mathrm{T}^{-1}\mathrm{S}^{-1}$.

Exemple 11.1.2. Considérons $\mathrm{X} = \mathrm{Y} = \mathrm{L}_2(0,1)$; soit V l'opérateur borné de “primitive nulle en 0”, $(\mathrm{V}f)(t) = \int_0^t f(s)\,ds$, et posons $\mathrm{D} = \mathrm{im(V)}$. On a vu que V est injectif (exemples 7.3.2). On peut donc définir l'opérateur $\mathrm{T} = \mathrm{V}^{-1}$ de domaine D en posant pour tout $g \in \mathrm{D}$

$$(\mathrm{T}g = f) \Leftrightarrow (\mathrm{V}f = g).$$

Cet opérateur T est donc injectif lui-aussi.

La topologie revient

Soient E et F deux espaces de Banach ; un opérateur T de E dans F est dit *densément défini* si son domaine dom(T) est dense dans E.

Définition 11.1.3. Soient E et F deux espaces de Banach ; un opérateur de E dans F est dit *fermé* si son graphe est un sous-espace fermé de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$. Un opérateur de E dans F est dit *fermable* s'il admet une extension fermée.

Exemple 11.1.4. Reprenons l'opérateur borné V de $\mathrm{L}_2([0,1])$ dans lui-même et son inverse non borné V^{-1} de l'exemple 2 ; le domaine de V^{-1} est $\mathrm{im(V)}$; on a vu que $\mathrm{im(V)}$ est dense (exemples 7.3.2), donc V^{-1} est densément défini. Puisque V est continu, son graphe est fermé, donc V^{-1} est fermé puisque son graphe s'obtient à partir de celui de V par l'homéomorphisme $(x,y) \to (y,x)$ de $\mathrm{L}_2 \times \mathrm{L}_2$ sur lui-même.

Soit S une extension fermée de l'opérateur T ; alors Gr(S) contient Gr(T), donc son adhérence $\overline{\mathrm{Gr(T)}}$. Il s'ensuit qu'un opérateur T est fermable si et seulement si $\overline{\mathrm{Gr(T)}}$ est le graphe d'un opérateur. On appellera *fermeture* de l'opérateur T l'opérateur $\overline{\mathrm{T}}$ tel que $\mathrm{Gr}(\overline{\mathrm{T}}) = \overline{\mathrm{Gr(T)}}$. En particulier, pour que l'opérateur T soit fermable il faut et il suffit que l'on ait $\overline{\mathrm{Gr(T)}} \cap (\{0\} \times \mathrm{F}) = \{(0,0)\}$. On en déduit immédiatement :

Proposition 11.1.1. *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach et* T *un opérateur de* E *dans* F *; pour que l'opérateur* T *soit fermable il faut et il suffit que pour toute suite* (x_n) *de* dom(T) *qui converge vers* 0 *dans* E *et telle que* $\mathrm{T}(x_n)$ *converge dans* F *vers un vecteur* y*, on ait* $y = 0$.

Exemple 11.1.5. Fermetures des opérateurs T, T_1, T_2 et T_3 de l'exemple 1. Commençons par l'opérateur T de l'exemple **A**, défini sur $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$. On va montrer que T est fermable et isoler un candidat pour la fermeture.

Supposons que (f,g) soit dans l'adhérence de Gr(T) ; il existe une suite $(f_n) \subset \mathrm{C}^1_{\mathrm{comp}}$ telle que $f_n \to f$ dans L_2 et $f'_n \to g$ dans L_2. Quitte à passer à une sous-suite on peut supposer qu'il existe $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{R} \setminus \mathrm{E}$ soit négligeable et tel que $f_n(t)$ converge vers $f(t)$ pour tout $t \in \mathrm{E}$. En particulier, E est non vide, et il est même dense dans $\mathbb{R}$. Fixons $a \in \mathrm{E}$, et soit $t \in \mathrm{E}$; pour tout n on a

$$f_n(t) = f_n(a) + \int_a^t f'_n(s)\,ds,$$

et la convergence dans L_2 implique la convergence des intégrales sur les segments bornés, donc compte tenu de tout

$$f(t) = f(a) + \int_a^t g(s)\,ds.$$

Il en résulte que f est continue, et qu'il existe une fonction $g \in \mathrm{L}_2$ telle que

$$\forall t < u, \quad f(u) = f(t) + \int_t^u g(s)\,ds.$$

On introduit l'ensemble

$$\mathrm{G}_{\mathbf{A}} = \{(f,g) \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{L}_2(\mathbb{R}) : \forall t < u, \quad f(u) = f(t) + \int_t^u g(s)\,ds\}$$

(pour être vraiment correct, on devrait dire : l'ensemble des couples (f,g) tels que la classe f admette un représentant $\tilde{f}$ pour lequel, pour tous $t < u$, on ait $\tilde{f}(u) = \ldots$). On vient de montrer que l'adhérence de Gr(T) est contenue dans $\mathrm{G}_{\mathbf{A}}$; pour savoir que T est fermable, il suffit de voir que $\mathrm{G}_{\mathbf{A}}$ est un graphe : c'est clairement un espace vectoriel, et si $(0,g) \in \mathrm{G}_{\mathbf{A}}$, on aura $\int_t^u g = 0$ pour tous $t < u$, ce qui signifie que g est orthogonale à toutes les fonctions en escalier, qui sont denses dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, donc $g = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 11.1.6. Montrer que l'adhérence du graphe de T est *égale* à $G_{\mathbf{A}}$.

On appelle $H_1(\mathbb{R})$ (espace de Sobolev) l'espace des fonctions $f \in L_2(\mathbb{R})$ telles qu'il existe $g \in L_2(\mathbb{R})$ telle que $(f, g) \in G_{\mathbf{A}}$. On dit que g est la *dérivée généralisée* de f, et on note simplement $g = f'$. La fermeture de T de l'exemple 1, **A** est donc l'opérateur $\overline{T}$ de $L_2(\mathbb{R})$ dans lui-même dont le domaine est $H_1(\mathbb{R})$ et qui est défini par $\overline{T}(f) = f'$ pour $f \in H_1(\mathbb{R})$.

On définit de même l'espace $H_1([0,1])$ des fonctions $f \in L_2([0,1])$ (en fait f sera continue) pour lesquelles existe une fonction $g \in L_2([0,1])$ telle que $f(t) = f(0) + \int_0^t g(s)\,ds$, pour tout $t \in [0,1]$. Si on se rappelle l'opérateur-exemple V de $L_2([0,1])$ dans lui-même qui associe à chaque $g \in L_2([0,1])$ sa “primitive” nulle en zéro, on voit que $H_1([0,1])$ est égal à $\mathrm{im}(V) + \mathbb{K}1$. On peut vérifier que les fermetures des variantes B1, B2, B3 sont définies sur les domaines

- 1 : $f \in H_1([0,1])$
- 2 : $f \in H_1([0,1])$ et $f(0) = f(1) = 0$
- 3 : $f \in H_1([0,1])$ et $f(0) = f(1)$.

Dans les trois cas $j = 1, 2, 3$ la valeur de l'extension $\overline{T}_j(f)$ est égale à f', la dérivée généralisée de f, quand f est dans le domaine de $\overline{T}_j$.

Revenons sur la notion de dérivée généralisée. Avec Fubini on montre que si $f \in H^1(\mathbb{R})$ et si φ est C^1 à support compact, on a

$$\text{(D)} \qquad \int_{\mathbb{R}} f\varphi' = -\int_{\mathbb{R}} f'\varphi.$$

En modifiant très légèrement ce qui précède, on obtient la formule d'intégration par parties dans $H^1([a,b])$: si $f, g \in H^1([a,b])$, on a

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = \Big[f(t)g(t)\Big]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt.$$

C'est la propriété (D) précédente qui permet d'étendre la définition de H^1 au cas de plusieurs dimensions. Par exemple, on dit que $f \in H^1(\mathbb{R}^2)$ si $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$ et s'il existe deux fonctions $g_1, g_2 \in L_2(\mathbb{R}^2)$ qui seront les *dérivées partielles faibles* de f, ce qui signifie que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^2} g_j(x)\varphi(x)\,dx$$

pour $j = 1, 2$ et pour toute fonction φ qui soit C^1 à support compact sur $\mathbb{R}^2$. Les fonctions de cet espace $H^1(\mathbb{R}^2)$ ne sont plus nécessairement continues, ni même bornées sur les compacts de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 11.1.2. *L'inverse d'un opérateur injectif fermé est fermé.*

Démonstration. Soient E et F deux espaces de Banach et T un opérateur fermé de E dans F ; on a $\mathrm{Gr}(T^{-1}) = \rho(\mathrm{Gr}(T))$ où $\rho : E \times F \to F \times E$ est l'homéomorphisme $(x, y) \to (y, x)$, donc $\mathrm{Gr}(T^{-1})$ est fermé.

//

Exemple 11.1.7. L'opérateur V^{-1} de l'exemple 2 est fermé et densément défini. Les opérateurs fermés et densément définis forment la classe la plus intéressante dans cette théorie.

11.2. Spectre des opérateurs fermés

Définition 11.2.1. Soient T un opérateur d'un espace de Banach complexe E dans lui même et $\lambda \in \mathbb{C}$; on dit que λ est une *valeur régulière* de T si $\mathrm{T} - \lambda \,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ est une application linéaire bijective de dom(T) sur E et si l'application linéaire réciproque définit une application linéaire *continue* de E dans lui même. On appelle *spectre* de T le complémentaire Sp(T) dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble des valeurs régulières de T.

Soit T un opérateur sur un espace de Banach complexe E; désignons par Ω_{T} l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ qui sont valeur régulière de T ; pour $\lambda \in \Omega_{\mathrm{T}}$, on pose

$$\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}) = (\mathrm{T} - \lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$$

et on appelle $\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T})$ la *résolvante* de T.

Seuls les opérateurs fermés sont intéressants pour la théorie spectrale : en effet, si T admet une valeur régulière λ, l'opérateur $(\mathrm{T} - \lambda \,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})^{-1}$ est continu donc à graphe fermé ; on en déduit que son inverse $\mathrm{T} - \lambda \,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ est fermé, et il en résulte facilement que T lui-même est fermé. Autrement dit : si T n'est pas fermé, T n'admet aucune valeur régulière, donc on a toujours $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) = \mathbb{C}$.

Soit T un opérateur fermé d'un espace de Banach E dans lui-même; remarquons que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'opérateur $\mathrm{T} - \lambda \,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ est fermé. Si $\mathrm{T} - \lambda \,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ est bijectif de dom(T) sur E, alors λ est une valeur régulière car $(\mathrm{T} - \lambda \,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})^{-1}$ est fermé (proposition 1.2), donc continu par le théorème du graphe fermé (théorème 4.1.6).

Exemples 11.2.2.

1. Soit μ une mesure sur $\mathbb{C}$, positive et non nulle, donnant une mesure finie à tout compact ; on considère dans $\mathrm{L}_2(\mu) = \mathrm{L}_2(\mathbb{C}, \mu)$ l'application de multiplication par z, définie sur le domaine

$$\mathrm{D} = \{f \in \mathrm{L}_2(\mu) : \int_{\mathbb{C}} |z|^2 \,|f(z)|^2 \,d\mu(z) < +\infty\},$$

ce qui donne un opérateur, en général non borné, qu'on notera M, qui agit sur $f \in \mathrm{D}$ par $(\mathrm{M}f)(z) = zf(z)$, et $\mathrm{M}f \in \mathrm{L}_2(\mu)$. On peut décrire l'appartenance de f au domaine D en une seule formule,

$$\int_{\mathbb{C}} (1 + |z|^2) \,|f(z)|^2 \,d\mu(z) < +\infty.$$

On suppose d'abord que $\lambda \in \mathbb{C}$ est tel que pour tout $\varepsilon > 0$, on ait que $\mathrm{B} = \mathrm{B}(\lambda, \varepsilon)$ vérifie $\mu(\mathrm{B}) > 0$. On peut considérer la fonction $f = \mathbf{1}_{\mathrm{B}}$, qui est dans le domaine D, et qui n'est pas dans la classe nulle de $\mathrm{L}_2(\mu)$ puisque $\mu(\mathrm{B}) > 0$. On a $|(\mathrm{M} - \lambda)f| = |z - \lambda| \,\mathbf{1}_{\mathrm{B}} \le \varepsilon \,\mathbf{1}_{\mathrm{B}}$. Ceci montre que $\|(\mathrm{M} - \lambda)f\|_2 \le \varepsilon \,\|f\|_2$; si l'inverse $\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{M})$ de $\mathrm{M} - \lambda \,\mathrm{Id}$ existait, il devrait vérifier $\|\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{M})\| \ge 1/\varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui est impossible. Il en résulte que $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$.

On suppose inversement que $\lambda \in \mathbb{C}$ est tel qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\mu(\mathrm{B}(\lambda, \varepsilon_0)) = 0$. Considérons la fonction mesurable bornée g définie sur $\mathbb{C}$ par $g(z) = (z - \lambda)^{-1}$ si $|z - \lambda| \ge$

ε_0 et $g(z) = 0$ sinon. La multiplication M_g est bornée sur $\mathrm{L}_2(\mu)$ puisque g est bornée, et on va voir que $\mathrm{M}_g = \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{M})$. Si $f \in \mathrm{dom}(\mathrm{M})$, on voit que $\mathrm{M}_g(\mathrm{M}(f) - \lambda f) = g(z-\lambda) f$ est égale à f en dehors de B, et à 0 dans B ; mais puisque $\mu(\mathrm{B}) = 0$, on a bien $\mathrm{M}_g(\mathrm{M}(f) - \lambda f) = f$ en tant que classe. Inversement, si $h \in \mathrm{L}_2(\mu)$, on vérifie que $\mathrm{M}_g(h) \in \mathrm{dom}(\mathrm{M})$ (en effet,

$$\int_{\mathbb{C}} |z|^2 \, |(\mathrm{M}_g h)(z)|^2 \, d\mu(z) = \int_{\mathbb{C}} |z|^2 \, |g(z)h(z)|^2 \, d\mu(z) = \int_{\mathbb{C}} |zg(z)|^2 \, |h(z)|^2 \, d\mu(z) < +\infty$$

parce que $zg(z)$ est bornée sur $\mathbb{C}$) et ensuite $(\mathrm{M} - \lambda \, \mathrm{Id})(\mathrm{M}_g(h)) = h$. On a bien montré que $\mathrm{M}_g = \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{M})$.

En bref, le spectre de M est exactement l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ décrit précédemment, c'est à dire les λ dont tout voisinage a une μ-mesure > 0.

Si $\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \delta_{z_n}$, où (z_n) est une suite quelconque de points de $\mathbb{C}$, on déduit de ce qui précède que le spectre de M est l'adhérence F de l'ensemble des points de la suite. Cela nous permet de dire que tout fermé non vide de $\mathbb{C}$ est le spectre d'un opérateur. C'est vrai aussi pour l'ensemble vide, comme on le verra avec l'exemple qui suit.

2. Nous allons donc montrer maintenant que le spectre de l'opérateur $\mathrm{T} = \mathrm{V}^{-1}$ de l'exemple 1.2 est vide :

évidemment, 0 est valeur régulière de T et $\mathrm{R}_0(\mathrm{T}) = \mathrm{V}$. Pour $\lambda \neq 0$, cherchons à résoudre l'équation $\mathrm{T}x - \lambda x = y$, pour $y \in \mathrm{E}$ donné (on cherche $x \in \mathrm{D}$). Puisque T est surjectif, on peut écrire $y = \mathrm{T}z$, avec $z = \mathrm{V}(y) \in \mathrm{D}$. En appliquant V on trouve $x - \lambda \mathrm{V}x = z$, soit $\mathrm{V}x - \lambda^{-1} x = -\lambda^{-1} z$. On sait que λ^{-1} n'est pas dans le spectre de V (qui est réduit à $\{0\}$) donc on peut résoudre,

$$x = \mathrm{R}_{\lambda^{-1}}(\mathrm{V})(-\lambda^{-1} z) = -\lambda^{-1} \mathrm{R}_{\lambda^{-1}}(\mathrm{V}) \, (\mathrm{V}y).$$

On vient donc d'identifier $\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}) = -\lambda^{-1} \mathrm{R}_{\lambda^{-1}}(\mathrm{V}) \, \mathrm{V}$. Finalement, on constate que tout nombre complexe est valeur régulière de T, donc le spectre de $\mathrm{T} = \mathrm{V}^{-1}$ est vide.

Le raisonnement utilisé dans l'exemple précédent montre que

Lemme 11.2.1. *Soient* T *un opérateur injectif fermé d'un espace de Banach* E *dans lui même et* λ *une valeur régulière de* T *non nulle ; alors* λ^{-1} *est une valeur régulière de* T^{-1} *et on a*

$$\mathrm{R}_{\lambda^{-1}}(\mathrm{T}^{-1}) = -\lambda \mathrm{T} \, \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}).$$

Proposition 11.2.2. *Le spectre d'un opérateur fermé* T *d'un espace de Banach complexe* E *dans lui même est une partie fermée de* $\mathbb{C}$*, et l'application* $\lambda \to \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T})$ *est continue du complémentaire du spectre dans* $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Démonstration. Désignons par Ω_T l'ensemble des valeurs régulières pour T, et montrons que cet ensemble est ouvert. Si Ω_T est vide, il est ouvert ; sinon, supposons que $\lambda_0 \in \Omega_\mathrm{T}$, et montrons que les valeurs voisines de λ_0 sont elles aussi régulières et $\lambda \to \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T})$ continue dans ce voisinage. En remplaçant T par $\mathrm{T}_0 = \mathrm{T} - \lambda_0 \, \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ on se ramène à $\lambda_0 = 0$. On supposera donc que $\mathrm{T} = \mathrm{T} - 0 \, \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ est une bijection de dom(T) sur E, d'inverse $\mathrm{S} = \mathrm{R}_0(\mathrm{T})$ continu ; on veut alors montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que λ soit valeur régulière de T quand $|\lambda| < \varepsilon$.

Etant donné $y \in \mathrm{E}$ quelconque, on veut résoudre en $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$, et avec solution unique, l'équation

$$\mathrm{T}(x) - \lambda x = y.$$

Posons $z = \mathrm{T}(x)$, ce qui équivaut à $x = \mathrm{S}(z)$. L'équation précédente devient alors $z - \lambda \mathrm{S}(z) = y$, ou encore $(\mathrm{S} - \lambda^{-1} \mathrm{Id_E})(z) = -\lambda^{-1} y$. Lorsque $|\lambda| < \rho(\mathrm{S})^{-1}$, on sait que $\mathrm{S} - \lambda^{-1} \mathrm{Id_E}$ est inversible, donc z est uniquement défini par

$$z = \mathrm{R}_{\lambda^{-1}}(\mathrm{S})(-\lambda^{-1} y),$$

et puisque $x = \mathrm{S}(z)$ ceci montre que $\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}) = -\lambda^{-1} \mathrm{S}\, \mathrm{R}_{\lambda^{-1}}(\mathrm{S})$ existe et est borné, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < \rho(\mathrm{T}^{-1})^{-1}$. Si on réécrit

$$\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}) = -\lambda^{-1} \mathrm{S}\, \mathrm{R}_{\lambda^{-1}}(\mathrm{S}) = -\mathrm{S}(\mathrm{Id_E} - \lambda \mathrm{S})^{-1}$$

on voit que $\lambda \to \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T})$ est continue au voisinage de $\lambda_0 = 0$; mais λ_0 est en fait un point quelconque de Ω_T.

//

Exemple 11.2.4. Opérateur diagonal. Pour toute suite scalaire $(\mu_n)_{n \geq 0}$, on définit un opérateur (en général non borné) sur $\ell_2(\mathbb{N})$ dont le domaine est

$$\mathrm{D} = \{x \in \ell_2 : \sum |\mu_n x_n|^2 < +\infty\}$$

et qui est défini pour $x \in \mathrm{D}$ par $(\mathrm{T}x)_n = \mu_n x_n$. Le spectre de T est l'adhérence dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble des valeurs $(\mu_n)_{n \geq 0}$. Comme toute partie fermée non vide F de $\mathbb{C}$ admet une suite dense, on retrouve le fait que pour toute partie fermée non vide F de $\mathbb{C}$, on peut construire un opérateur T d'un espace de Hilbert H dont le spectre $\mathrm{Sp}(\mathrm{T})$ soit égal à F. L'opérateur $\mathrm{T} = \mathrm{V}^{-1}$ de l'exemple 7.2.2 fournit un cas où $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) = \emptyset$.

11.3. Transposés et adjoints

Soient E et F deux espaces de Banach et T un opérateur densément défini de E dans F ; on définit *le transposé* de T, qui est un opérateur de F^* dans E^*, de la façon suivante : le domaine de ${}^t\mathrm{T}$ est l'ensemble des $y^* \in \mathrm{F}^*$ telles que la forme linéaire $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}) \to y^*(\mathrm{T}(x))$ soit continue (en ayant muni l'espace vectoriel $\mathrm{dom}(\mathrm{T})$ de la norme induite par celle de E). Dans le cas où $y^* \in \mathrm{dom}({}^t\mathrm{T})$, cette forme linéaire continue, définie sur le sous-espace dense $\mathrm{dom}(\mathrm{T}) \subset \mathrm{E}$, se prolonge de façon unique en une forme linéaire $x^* \in \mathrm{E}^*$ continue sur E. On pose alors ${}^t\mathrm{T}(y^*) = x^*$. On a donc

$$({}^t\mathrm{T})(y^*)(x) = y^*(\mathrm{T}(x))$$

pour tous $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ et $y^* \in \mathrm{dom}({}^t\mathrm{T})$.

Lorsque E et F sont deux espaces de Hilbert et T un opérateur densément défini de E dans F, on définit un opérateur T^* de F dans E de la façon suivante : on définit $\mathrm{T}^*(y) = x$ si la forme linéaire ℓ_y associée à $y \in \mathrm{H}$ est dans $\mathrm{dom}({}^t\mathrm{T})$, et si $\ell_x = x^* = {}^t\mathrm{T}(\ell_y)$. Le vecteur y est donc dans le domaine de T^* si et seulement si la forme linéaire $\ell : u \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}) \to \langle \mathrm{T}(u), y \rangle$ est continue sur $\mathrm{dom}(\mathrm{T})$ (muni de la norme de E), et le couple $(y, x) \in \mathrm{F} \times \mathrm{E}$ est dans le graphe de T^* si et seulement si

$$(*) \qquad \langle \mathrm{T}(u), y \rangle = \langle u, x \rangle$$

pour tout $u \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$, ce qui signifie que x représente la forme linéaire ℓ (et son prolongement continu à E). On a donc

$$\mathrm{Gr}(\mathrm{T}^*) = \{(y, x) \in \mathrm{F} \times \mathrm{E} : \forall z \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}),\ \langle x, z \rangle = \langle y, \mathrm{T}(z) \rangle\}.$$

En effet, la forme linéaire $u \to \langle \mathrm{T}(u), y\rangle$ est alors continue puisqu'elle est égale à $u \to \langle u, x\rangle$ et dans ce cas on a $x = \mathrm{T}^*(y)$ par définition de l'adjoint. Il est clair que la condition $(*)$ définit un ensemble fermé de couples (y, x), ce qui montre que T^* est toujours un opérateur fermé.

On dit que T (densément défini sur un Hilbert) est *symétrique* si

$$\langle x, \mathrm{T}(y)\rangle = \langle \mathrm{T}(x), y\rangle$$

pour tous $x, y \in \mathrm{dom(T)}$. Cela revient à dire que $\mathrm{T} \subset \mathrm{T}^*$. Un opérateur T de E dans lui même est dit *autoadjoint* si $\mathrm{T} = \mathrm{T}^*$. Tout autoadjoint est symétrique mais l'inverse n'est pas vrai.

Exemple 11.3.1. Donnons un exemple simple d'opérateur autoadjoint. On considère $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{D} = \{f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 \, dx < +\infty\}$ et on définit $\mathrm{M}f$ pour toute $f \in \mathrm{D}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\mathrm{M}f)(x) = x f(x).$$

On va vérifier que l'opérateur M est autoadjoint. On voit facilement que D est dense dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ (parce que D contient toutes les fonctions de $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ à support borné). Il est à peu près évident que M est symétrique,

$$\langle \mathrm{M}f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} \bigl(x f(x)\bigr) \overline{g(x)} \, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{x g(x)} \, dx = \langle f, \mathrm{M}g\rangle.$$

On en déduit $\mathrm{dom(M)} \subset \mathrm{dom(M^*)}$. Inversement, supposons que $g \in \mathrm{dom(M^*)}$, et considérons pour tout $n \ge 0$ la fonction $f_n \in \mathrm{dom(M)}$ définie par $f_n(x) = x \mathbf{1}_{[-n,n]}(x) g(x)$; puisque $g \in \mathrm{dom(M^*)}$, il existe une constante C telle que pour tout $n \ge 0$, on ait $|\langle \mathrm{M}f_n, g\rangle| \le \mathrm{C}\, \|f_n\|_2$, ce qui donne

$$\int_{-n}^{n} x^2 |g(x)|^2 \, dx \le \mathrm{C} \Bigl(\int_{-n}^{n} x^2 |g(x)|^2 \, dx \Bigr)^{1/2}$$

d'où résulte que $\int_{\mathbb{R}} x^2 |g(x)|^2 \, dx \le \mathrm{C}^2 < +\infty$, soit $g \in \mathrm{dom(T)}$. La vérification est finie.

Exercice 11.3.2. Adjoints des fermetures des exemples B1, B2, B3 de 1.1. Posons $\mathrm{E} = \mathrm{L}_2([0,1])$. La fermeture de l'exemple B3 est l'opérateur T_c dont le domaine est

$$\mathrm{D}_c = \{f \in \mathrm{H}^1([0,1]) : f(0) = f(1)\}$$

et qui est défini par $\mathrm{T}_c(f) = f'$ pour toute $f \in \mathrm{D}_c$; on va montrer que $\mathrm{S}_c = i\mathrm{T}_c$ est autoadjoint.

Avant tout on vérifie que D_c est dense dans E : les fonctions affines par morceaux, nulles en 0 et 1, sont dans D_c, et elles sont denses dans $\mathrm{L}_2(0,1)$; en effet, la fonction indicatrice de tout intervalle $]a, b[$ contenu dans $[0,1]$ peut être obtenue comme limite croissante d'une suite (f_n) de fonctions affines par morceaux, nulles en 0 et 1, et telles que $0 \le f_n \le 1$ pour tout n. Ensuite, les fonctions indicatrices d'intervalles forment une partie totale de $\mathrm{L}_2(0,1)$.

On montre maintenant que S_c est symétrique, c'est à dire que $\langle f_1, \mathrm{S}_c(f_2)\rangle = \langle \mathrm{S}_c(f_1), f_2\rangle$ pour toutes $f_1, f_2 \in \mathrm{D}_c$. On a en effet en utilisant l'intégration par parties dans $\mathrm{H}^1([0,1])$

$$\langle f_1, \mathrm{S}_c(f_2)\rangle = \int_0^1 f_1 \,\overline{(i f_2')} = \bigl[f_1 \,\overline{(i f_2)}\bigr]_0^1 - \int_0^1 f_1' \,\overline{(i f_2)} = \int_0^1 (i f_1')\, \overline{f}_2 = \langle \mathrm{S}_c(f_1), f_2\rangle$$

(le terme $\big[\,.\,\big]_0^1$ est nul parce que toutes les fonctions ont la même valeur en 0 et en 1 par définition de D_c). On montrerait de la même façon que l'exemple S_b correspondant à B2, défini sur $\mathrm{D}_b = \{f \in \mathrm{H}^1([0,1]) : f(0) = f(1) = 0\}$ est symétrique : c'est évident puisque $\mathrm{S}_b \subset \mathrm{S}_c$.

On sait donc déjà que $\mathrm{D}_c \subset \mathrm{dom}(\mathrm{S}_c^*)$, et que $\mathrm{S}_c^*(f) = \mathrm{S}_c(f) = if'$ pour $f \in \mathrm{D}_c$. Il reste à voir que $\mathrm{dom}(\mathrm{S}_c^*) \subset \mathrm{D}_c$. Dire que (g,h) est dans le graphe de S_c^* signifie que $g \in \mathrm{E}$ est dans le domaine de S_c^* et que $h = \mathrm{S}_c^*(g) \in \mathrm{E}$ vérifie

$$\langle f, h\rangle = \langle \mathrm{S}_c(f), g\rangle$$

pour toute fonction $f \in \mathrm{D}_c$. On a si $(g,h) \in \mathrm{Gr}(\mathrm{S}_c^*)$

$$\int_0^1 f\,\overline{h} = \int_0^1 (if')\,\overline{g}$$

pour toute $f \in \mathrm{D}_c$. Posons $\mathrm{H}(t) = \int_0^t h(s)\,ds$. On obtient par intégration par parties

$$\int_0^1 f\,\overline{h} = \big[f\,\overline{\mathrm{H}}\big]_0^1 - \int_0^1 f'\,\overline{\mathrm{H}} = f(1)\,\overline{\mathrm{H}}(1) - \int_0^1 f'\,\overline{\mathrm{H}},$$

ce qui donne

$$f(1)\,\overline{\mathrm{H}}(1) - \int_0^1 f'\,\overline{\mathrm{H}} = \int_0^1 (if')\,\overline{g} = -\int_0^1 f'\,\overline{(ig)}$$

ou encore $f(1)\,\overline{\mathrm{H}}(1) = \int_0^1 f'\,\overline{(\mathrm{H} - ig)}$ pour toute $f \in \mathrm{D}_c$. Puisque la fonction $f_0 = 1$ est dans D_c, on obtient puisque $f_0' = 0$ que $\mathrm{H}(1) = 0$. On remarque que l'ensemble des f', lorsque $f \in \mathrm{D}_c$, est exactement l'ensemble de toutes les fonctions k de $\mathrm{E} = \mathrm{L}_2$ qui sont d'intégrale nulle sur $[0,1]$. Cet ensemble des fonctions d'intégrale nulle est égal à $(\mathbb{C}1)^\perp$, et l'équation précédente indique que $\mathrm{H} - ig$ est orthogonale à $(\mathbb{C}1)^\perp$, donc $\mathrm{H} - ig \in (\mathbb{C}1)^{\perp\perp} = \mathbb{C}1$. On obtient que $\mathrm{H} - ig$ est une fonction constante, donc $g = -i\mathrm{H} + \mathrm{C}te$; comme $\mathrm{H}(0) = \mathrm{H}(1)$ et que H est une fonction de $\mathrm{H}^1([0,1])$, il en résulte que $g \in \mathrm{D}_c$. On a déjà vu que $\mathrm{D}_c \subset \mathrm{dom}(\mathrm{S}_c^*)$, et on a maintenant $\mathrm{dom}(\mathrm{S}_c^*) \subset \mathrm{D}_c$, donc $\mathrm{dom}(\mathrm{S}_c^*) = \mathrm{D}_c$ et pour $g \in \mathrm{dom}(\mathrm{S}_c^*)$ on a $\mathrm{S}_c^*(g) = ig' = \mathrm{S}_c(g)$, ce qui montre que S_c est autoadjoint.

Proposition 11.3.1. *Soient* E *et* F *deux espaces de Hilbert et* T *un opérateur densément défini de* E *dans* F *; alors* T^* *est fermé. Pour que* T *soit fermable, il faut et il suffit que* T^* *soit densément défini. Dans ce cas, on a* $\overline{\mathrm{T}} = (\mathrm{T}^*)^*$.

Démonstration. Sur l'espace $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ on introduit le produit scalaire

$$\langle (x,y), (x',y')\rangle = \langle x, x'\rangle + \langle y, y'\rangle$$

et on procède de même sur $\mathrm{F} \times \mathrm{E}$. Soit $\mathrm{U}_0 \in \mathcal{L}(\mathrm{F} \times \mathrm{E}, \mathrm{E} \times \mathrm{F})$ l'opérateur unitaire qui à $(y,x) \in \mathrm{F} \times \mathrm{E}$ associe $(x, -y)$; le graphe $\mathrm{Gr}(\mathrm{T}^*)$ de T^* est l'orthogonal dans l'espace de Hilbert $\mathrm{F} \times \mathrm{E}$ de $\mathrm{U}_0^*(\mathrm{Gr}(\mathrm{T}))$, donc $\mathrm{Gr}(\mathrm{T}^*)$ est fermé.

Supposons T fermable. Pour montrer que T^* est densément défini, on va montrer que $y = 0_\mathrm{F}$ est le seul vecteur de F orthogonal à $\mathrm{dom}(\mathrm{T}^*)$. Dans ce cas le couple $(y, 0_\mathrm{E})$ est orthogonal à $\mathrm{Gr}(\mathrm{T}^*)$, donc il est dans $\mathrm{U}_0^*(\mathrm{Gr}(\mathrm{T}))^{\perp\perp}$; mais puisque T est fermable, $\mathrm{Gr}(\mathrm{T}))^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{Gr}(\mathrm{T})}$ est le graphe d'un opérateur $\overline{\mathrm{T}}$, et on obtient $(y, 0_\mathrm{E}) \in \mathrm{U}_0^*(\mathrm{Gr}(\overline{\mathrm{T}}))$, c'est à dire $(0_\mathrm{E}, y) \in \mathrm{Gr}(\overline{\mathrm{T}})$, d'où $y = \overline{\mathrm{T}}(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{F}$.

Si T^* est densément défini, alors $\mathrm{T} \subset (\mathrm{T}^*)^*$ donc T est fermable. Dans ce cas, $\mathrm{Gr}(\overline{\mathrm{T}}) = \overline{\mathrm{Gr}(\mathrm{T})} = \mathrm{Gr}(\mathrm{T})^{\perp\perp} = \mathrm{Gr}((\mathrm{T}^*)^*)$. Soient $y \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}^*)^\perp$ et $(x,z) \in \mathrm{Gr}(\mathrm{T})^\perp$; alors $z \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}^*)$ donc $\langle 0, x\rangle + \langle y, z\rangle = 0$, donc $(0,y) \in \mathrm{Gr}(\mathrm{T})^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{Gr}(\mathrm{T})}$.

//

Proposition 11.3.2. *Soit* T *un opérateur densément défini d'un espace de Hilbert* E *dans un espace de Hilbert* F *; alors* $\ker(\mathrm{T}^*) = \mathrm{im}(\mathrm{T})^\perp$.

Démonstration. Soit $y \in \mathrm{F}$; on a $y \in \ker(\mathrm{T}^*)$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$, on a $\langle 0, x\rangle = \langle y, \mathrm{T}(x)\rangle$; cela a lieu si et seulement si $y \in \mathrm{im}(\mathrm{T})^\perp$.

//

Proposition 11.3.3. *Soient* E *et* F *deux espaces de Hilbert et* T *un opérateur densément défini, fermé de* E *dans* F *;*

(*i*) *pour tout* $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *on a* $(\mathrm{S}+\mathrm{T})^* = \mathrm{S}^* + \mathrm{T}^*$ *;*
(*ii*) *si* R *est une extension de* T, *alors* $\mathrm{R}^* \subset \mathrm{T}^*$ *;*
(*iii*) *si* T *est injectif et d'image dense, alors* $(\mathrm{T}^{-1})^* = (\mathrm{T}^*)^{-1}$.

Proposition 11.3.4. *Soient* E *et* F *deux espaces de Hilbert et* T *un opérateur fermé densément défini de* E *dans* F *; l'opérateur* $(\mathrm{Id}_\mathrm{E} + \mathrm{T}^*\mathrm{T})$ *est injectif, son image est égale à* E *et* $(\mathrm{Id}_\mathrm{E} + \mathrm{T}^*\mathrm{T})^{-1}$ *est un élément positif de* $\mathcal{L}(\mathrm{E})$. *L'opérateur* $\mathrm{T}^*\mathrm{T}$ *est autoadjoint et son spectre est contenu dans* $[0, +\infty[$.

11.4. Théorème de représentation. Décomposition spectrale

Exemple 11.4.1. Soit (Ω, μ) un espace mesuré et soit $\mathrm{L}_0(\Omega, \mu)$ l'ensemble des classes d'équivalence de fonctions mesurables complexes pour la relation d'égalité μ-presque partout ; si $f, g \in \mathrm{L}_0(\Omega, \mu)$, on voit facilement que la classe de $\widetilde{f}\,\widetilde{g}$ ne dépend pas des représentants $\widetilde{f}$, $\widetilde{g}$ des deux classes, ce qui permet de parler du produit ponctuel de deux classes. On peut alors définir un opérateur M_f dont le domaine est l'ensemble des $g \in \mathrm{L}_2(\Omega, \mu)$ telles que $fg \in \mathrm{L}_2(\Omega, \mu)$ et tel que $\mathrm{M}_f(g) = fg$ pour tout $g \in \mathrm{dom}(\mathrm{M}_f)$.

Pour tout $g \in \mathrm{L}_2(\Omega, \mu)$ et tout $n > 0$, la fonction $g_n = \big(n/(n + |f|)\big)\, g$ est dans le domaine de M_f ; de plus la suite (g_n) converge partout vers g et est dominée par $|g|$. Il résulte alors du théorème de convergence dominée que le domaine de M_f est dense dans L_2. Soient $\xi, \eta \in \mathrm{L}_2(\Omega, \mu)$ tels que $f\xi \in \mathrm{L}_2(\Omega, \mu)$ et $\overline{f}\eta \in \mathrm{L}_2(\Omega, \mu)$; on a

$$\langle f\xi, \eta\rangle = \int f(t)\xi(t)\overline{\eta(t)}\, d\mu(t) = \langle \xi, \overline{f}\eta\rangle.$$

On en déduit que $\mathrm{M}_{\overline{f}} \subset \mathrm{M}_f^*$. Enfin, soient $\xi, \eta \in \mathrm{L}_2(\Omega, \mu)$; posons $\xi_1 = (\xi + \overline{f}\eta)(1 + |f|^2)^{-1}$ et $\eta_1 = (\eta - f\xi)(1 + |f|^2)^{-1}$; clairement $f\xi_1 \in \mathrm{L}_2(\Omega, \mu)$, $\overline{f}\eta_1 \in \mathrm{L}_2(\Omega, \mu)$ et on voit que $(\xi, \eta) = (\xi_1, f\xi_1) + (-\overline{f}\eta_1, \eta_1)$. On en déduit que

$$\mathrm{L}_2(\Omega, \mu) \times \mathrm{L}_2(\Omega, \mu) = \mathrm{Gr}(\mathrm{M}_f) + \{(-z, y) : (y, z) \in \mathrm{Gr}(\mathrm{M}_{\overline{f}})\}.$$

Comme $\{(-z, y) : (y, z) \in \mathrm{Gr}(\mathrm{M}_{\overline{f}})\} \subset \mathrm{Gr}(\mathrm{M}_f)^\perp$, on en déduit l'égalité de ces deux sous-espaces ; il en résulte que M_f et $\mathrm{M}_{\overline{f}}$ sont fermés et adjoint l'un de l'autre.

Posons $h = (1 + |f|)^{-1}$. Remarquons que $\mathrm{M}_h \in \mathcal{L}(\mathrm{L}_2(\Omega, \mu))$ est injective, que le domaine de M_f est l'image de M_h et que $\mathrm{M}_f\mathrm{M}_h = \mathrm{M}_{fh}$. On en déduit que $\mathrm{M}_f - \lambda\, \mathrm{Id}_{\mathrm{L}_2(\Omega,\mu)}$ et $\mathrm{M}_{fh - \lambda h}$ ont même image. Le noyau de M_f est l'ensemble des fonctions $g \in \mathrm{L}_2(\Omega, \mu)$ telles que fg soit μ-négligeable. Il coïncide avec celui de M_{fh}. Par la proposition 10.2.1, le spectre de M_f est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que, pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $\{s \in \Omega : |f(s) - \lambda| < \varepsilon\}$ ne soit pas μ-négligeable.

Remarquons que M_f est injectif si et seulement si l'ensemble $\{s \in \Omega : f(s) = 0\}$ est μ-négligeable ; dans ce cas $\mathrm{im}(\mathrm{M}_f)$ est dense et $\mathrm{M}_f^{-1} = \mathrm{M}_{f^{-1}}$.

Théorème 11.4.1. *Soient* H *un espace de Hilbert complexe et* T *un opérateur autoadjoint sur* H *; le spectre de* T *est réel :* $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) \subset \mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$; notons b sa partie imaginaire, non nulle. Pour tout $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$, on a $\langle \mathrm{T}(x), x\rangle = \langle x, \mathrm{T}(x)\rangle$ donc $\langle \mathrm{T}(x), x\rangle \in \mathbb{R}$; la partie imaginaire de $\langle (\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id_H})(x), x\rangle$ est donc $-b\|x\|^2$. On en déduit que

$$|b|\,\|x\|^2 \le |\langle (\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id_H})(x), x\rangle| \le \|(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id_H})(x)\|\,\|x\|,$$

donc $\|(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id_H})(x)\| \ge |b|\,\|x\|$, pour tout $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$. Il en résulte que l'image $(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id_H})(\mathrm{dom}(\mathrm{T}))$ est fermée dans H : supposons en effet que $(x_n) \subset \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ et que $(\mathrm{T}x_n - \lambda x_n)$ converge vers $y \in \mathrm{H}$; d'après ce qui précède,

$$\|x_n - x_m\| \le |b|^{-1}\|(\mathrm{T}x_n - \lambda x_n) - (\mathrm{T}x_m - \lambda x_m)\| \to 0$$

donc (x_n) est de Cauchy, donc converge vers un $x \in \mathrm{H}$; par conséquent, $\mathrm{T}x_n$ converge vers $y+\lambda x$; puisque T est fermé (parce qu'il est autoadjoint) et puisque $(x_n, \mathrm{T}(x_n)) \in \mathrm{Gr}(\mathrm{T})$, on en déduit que $(x, y+\lambda x) \in \mathrm{Gr}(\mathrm{T})$, donc $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ et $y = (\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id_H})(x)$.

Pour finir, on va voir que l'image $(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id_H})(\mathrm{dom}(\mathrm{T}))$ est dense dans H, en vérifiant que $y = 0_\mathrm{H}$ est le seul vecteur de H orthogonal à cette image ; si y est orthogonal à l'image, on aura

$$\langle \mathrm{T}x - \lambda x, y\rangle = 0$$

pour tout $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$, ce qui montre que la forme linéaire $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}) \to \langle \mathrm{T}x, y\rangle$ est continue, puisqu'elle est égale à $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}) \to \lambda\langle x, y\rangle = \langle x, \overline{\lambda}y\rangle$; on en déduit que $y \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}^*) = \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ et $\mathrm{T}(y) = \mathrm{T}^*(y) = \overline{\lambda}y$; mais $\langle \mathrm{T}(y), y\rangle = \langle y, \mathrm{T}(y)\rangle = \lambda\langle y, y\rangle$ doit être réel, ce qui n'est possible que si $y = 0_\mathrm{H}$.

Il résulte de tout ce qui précède que $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id_H}$ est bijective de dom(T) sur H, et que l'inverse est continue, de norme $\le 1/|b|$.

//

Exercice 11.4.2. On considère l'opérateur autoadjoint S sur $\mathrm{L}_2(0,1)$ dont le domaine est $\mathrm{dom}(\mathrm{S}) = \mathrm{H}^1(0,1) \cap \{f : f(0) = f(1)\}$, et qui est défini par $\mathrm{S}f = -if'$ pour $f \in \mathrm{dom}(\mathrm{S})$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on définit la fonction e_n par $e_n(t) = \mathrm{e}^{2\pi i n t}$; montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction e_n est dans le domaine de S et vérifie $\mathrm{S}(e_n) = 2\pi n\, e_n$. Vérifier ensuite que le spectre de S est exactement égal à $2\pi\mathbb{Z}$, en calculant la résolvante $\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{S})$ pour tout $\lambda \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

Produit de résolvantes

Proposition 11.4.2. *Soient* H *un espace de Hilbert complexe,* T *un opérateur fermé sur* H *et* $\lambda, \mu \notin \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$ *; posons* $r_\lambda = \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T})$, $r_\mu = \mathrm{R}_\mu(\mathrm{T})$ *; l'image* $r_\lambda r_\mu(\mathrm{H})$ *est égale au domaine de* T^2, *et* $r_\lambda r_\mu = r_\mu r_\lambda$.

Démonstration. Rappelons que

$$\mathrm{dom}(\mathrm{T}^2) = \{x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}) : \mathrm{T}x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})\}.$$

Considérons $x = r_\lambda(r_\mu(y))$, pour un $y \in \mathrm{H}$ quelconque. Par définition, on a $r_\lambda(\mathrm{H}) = \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ donc $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ et $\mathrm{T}x - \lambda x = r_\mu(y) \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$; par linéarité, $\mathrm{T}x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ donc $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}^2)$.

Inversement supposons $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}^2)$; alors $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ et $x_1 = \mathrm{T}x - \lambda x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$, ce qui permet de calculer $y = \mathrm{T}x_1 - \mu x_1$; on aura alors $r_\mu y = x_1$, puis $r_\lambda r_\mu y = x$.

Si $x \in \operatorname{dom}(\mathrm{T}^2)$, on vérifie immédiatement en développant que

$$(\mathrm{T}-\lambda)(\mathrm{T}-\mu)x = \mathrm{T}^2(x) - \lambda \mathrm{T}(x) - \mu \mathrm{T}(x) + \lambda\mu x = (\mathrm{T}-\mu)(\mathrm{T}-\lambda)x.$$

En prenant l'inverse de cette relation sur l'image commune $\operatorname{dom}(\mathrm{T}^2) = r_\lambda r_\mu(\mathrm{H}) = r_\mu r_\lambda(\mathrm{H})$ on obtient $r_\lambda r_\mu = r_\mu r_\lambda$.

//

Proposition 11.4.3. *Soient* H *un espace de Hilbert complexe et* T *un opérateur auto-adjoint sur* H *; alors* $\mathrm{R}_i(\mathrm{T}) = (\mathrm{T} - i\,\mathrm{Id}_\mathrm{H})^{-1}$ *est un opérateur borné normal, et son adjoint est égal à* $\mathrm{R}_{-i}(\mathrm{T})$.

Démonstration. D'après le théorème 1, les opérateurs $\mathrm{R}_i(\mathrm{T})$ et $\mathrm{R}_{-i}(\mathrm{T})$ existent et sont bornés. D'après la proposition précédente il suffit de savoir que $\mathrm{R}_{-i}(\mathrm{T})$ est l'adjoint de $\mathrm{R}_i(\mathrm{T})$. Soient y, v deux vecteurs quelconques dans H et posons $x = \mathrm{R}_i(\mathrm{T})(y)$ et $u = \mathrm{R}_{-i}(\mathrm{T})(v)$. On a

$$\langle \mathrm{R}_i(\mathrm{T})(y), v\rangle = \langle x, (\mathrm{T}+i)(u)\rangle = \langle \mathrm{T}x - ix, u\rangle = \langle y, \mathrm{R}_{-i}(\mathrm{T})(v)\rangle.$$

//

Théorème 11.4.4. *Soient* H *un espace de Hilbert séparable et* T *un opérateur auto-adjoint de* H *dans* H *; il existe un espace mesuré* (Ω, μ)*, une fonction* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *mesurable et un isomorphisme* $u : \mathrm{L}_2(\Omega, \mu) \to \mathrm{H}$ *d'espaces de Hilbert tels que* $\mathrm{T} = u\,\mathrm{M}_f\,u^*$.

On donne à l'opérateur M_f son domaine naturel (de l'exemple 1) ; la relation ci-dessus sous-entend que u et son inverse u^* échangent les domaines de T et de M_f, c'est à dire qu'on a l'égalité $u(\operatorname{dom}(\mathrm{M}_f)) = \operatorname{dom}(\mathrm{T})$ (et inversement, $u^*(\operatorname{dom}(\mathrm{T})) = \operatorname{dom}(\mathrm{M}_f)$).

Démonstration. On va se servir de l'opérateur normal $\mathrm{S} = (\mathrm{T} - i\,\mathrm{Id}_\mathrm{H})^{-1}$ et de sa représentation obtenue au chapitre 9. Il existe un espace mesuré σ-fini $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, un unitaire U de $\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}$ sur $\mathrm{H}_2 = \mathrm{L}_2(\Omega, \mu)$, une fonction $h \in \mathrm{L}_\infty(\Omega, \mu)$ tels que

$$\mathrm{S} = \mathrm{U}^*\,\mathrm{M}_h\,\mathrm{U},$$

où M_h désigne l'opérateur borné sur $\mathrm{L}_2(\Omega, \mu)$ défini par la multiplication par h,

$$\forall g \in \mathrm{L}_2(\Omega, \mu), \quad \mathrm{M}_h(g) = hg.$$

Puisque S est injectif, il en résulte que M_h est injectif aussi ; cela implique que l'ensemble $\mathrm{A} = \{h = 0\}$ est μ-négligeable (sinon on pourrait trouver, puisque μ est σ-finie, un $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$ tel que $0 < \mu(\mathrm{B}) < +\infty$, et alors $\mathbf{1}_\mathrm{B} \in \mathrm{L}_2(\Omega, \mu)$ vérifierait $\mathrm{M}_h(\mathbf{1}_\mathrm{B}) = 0$ et $\|\mathbf{1}_\mathrm{B}\| > 0$, ce qui n'est pas possible).

Si on comprend la traduction de S sur $\mathrm{L}_2(\Omega, \mu)$, il n'est pas bien difficile de comprendre celle de $(\mathrm{T} - i)$ puis celle de T. L'opérateur $(\mathrm{T} - i)$, qui est l'inverse de $\mathrm{S} = \mathrm{R}_i(\mathrm{T})$, se traduit sur $\mathrm{L}_2(\Omega, \mu)$ par l'inverse de la traduction de S : c'est l'opérateur M_2 de multiplication par la fonction $1/h$ (fonction qui est μ-presque partout définie). Le domaine D_2 de M_2 est l'image de M_h, l'ensemble des fonctions g de la forme $g = hk$ pour une $k \in \mathrm{L}_2$. Comme $h \neq 0$ presque partout, cela revient à dire que

$$\mathrm{D}_2 = \{g \in \mathrm{L}_2 : \int_\Omega |g/h|^2\,d\mu < +\infty\}.$$

Pour finir on définit l'opérateur non borné T_2 sur $L_2(\Omega, \mu)$ par son domaine D_2 et la formule

$$\forall g \in D_2, \quad T_2(g) = g/h + ig.$$

Autrement dit, si on pose $f = i + 1/h$ et $u = U^*$, on obtient bien la représentation voulue : l'opérateur de multiplication $M_f = T_2$ vérifie $T = u\, M_f\, u^*$.

//

Exemple 11.4.3. Soit $H = L_2(\mathbb{R})$ et définissons T sur H par $\mathrm{dom}(T) = H^1(\mathbb{R})$ et $Tf = -if'$ pour toute $f \in H^1(\mathbb{R})$. On vérifie que T est autoadjoint. Sa représentation par une multiplication est obtenue au moyen de la transformation de Fourier sur $L_2(\mathbb{R})$. On va obtenir ainsi que T est conjugué à l'opérateur M de multiplication par $t \to t$ sur $L_2(\mathbb{R})$. Si on pose pour $f \in L_1(\mathbb{R})$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (\mathcal{F}f)(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ixt}\, f(x)\, dx$$

on obtient par une intégration par parties facile que pour f à support compact de classe C^1, on a $\mathcal{F}(-if')(t) = t\,\mathcal{F}(f)(t)$. Par ailleurs on sait montrer que $U = (2\pi)^{-1/2}\,\mathcal{F}$ se prolonge en opérateur unitaire de $L_2(\mathbb{R})$, et on a alors la représentation

$$T = U^* \circ M \circ U.$$

Remarque 11.4.4. Si H est un espace de Hilbert séparable et T un opérateur autoadjoint de H dans H, l'opérateur $U = (T - i\,\mathrm{Id}_H)(T + i\,\mathrm{Id}_H)^{-1}$ est un élément unitaire de $\mathcal{L}(H)$. Cette transformation, appelée *transformation de Cayley*, permet de relier les autoadjoints non bornés aux unitaires.

11.5. Le théorème de Stone

Soit H un espace de Hilbert ; on appelle *groupe à un paramètre d'unitaires* une famille $(v_t)_{t\in\mathbb{R}}$ d'éléments unitaires de $\mathcal{L}(H)$ telle que :

(*i*) pour tous $s, t \in \mathbb{R}$ on a $v_{s+t} = v_s v_t$;
(*ii*) pour tout $x \in H$ l'application $t \to v_t(x)$ est continue.

On a vu dans le chapitre sur le calcul fonctionnel continu une façon d'obtenir des exemples particuliers de tels groupes d'opérateurs. En effet, étant donné un opérateur hermitien borné A sur un espace de Hilbert *complexe* H, on considère la famille $(f_s)_{s\in\mathbb{R}}$ de fonctions continues sur $\mathrm{Sp}(T) \subset \mathbb{R}$ donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_s(t) = \mathrm{e}^{ist}\,.$$

On voit immédiatement que $f_{s_1} f_{s_2} = f_{s_1+s_2}$ pour tous s_1, s_2 réels, $f_0 = 1$, et toutes les fonctions sont de module un sur le spectre de A. D'après le corollaire 9.2.5 et les propriétés d'homomorphisme du calcul fonctionnel, la famille

$$v_s = f_s(A) = \mathrm{e}^{isA}$$

fournit un groupe d'unitaires, qui a en fait une propriété plus forte que la propriété (*ii*) de la définition ci-dessus : on a ici

$$\forall s, t \in \mathbb{R}, \quad \|v_s - v_t\| = \|f_s - f_t\|_{C(\mathrm{Sp}(A))} \le \|A\|\, |s - t|.$$

Le théorème qui suit permet d'aller beaucoup plus loin.

Théorème 11.5.2 : Théorème de Stone. *Soit* H *un espace de Hilbert complexe séparable ;*

(*i*) *soit* $(v_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *un groupe à un paramètre d'opérateurs d'unitaires ; il existe un opérateur autoadjoint* T *sur* H *dont le graphe est l'ensemble des couples* $(x, y) \in \mathrm{H} \times \mathrm{H}$ *tels que la fonction* $t \to v_t(x)$ *soit dérivable en* 0*, de dérivée* iy*. Pour* $x \in \mathrm{dom(T)}$ *et* t *réel, on a* $v_t(x) \in \mathrm{dom(T)}$ *et* $\mathrm{T}(v_t(x)) = v_t(\mathrm{T}(x))$.

On dit que T *est le générateur infinitésimal de* $(v_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *;*

(*ii*) *tout opérateur autoadjoint* T *est le générateur infinitésimal d'un unique groupe à un paramètre d'unitaires* $(v_t)_{t\in\mathbb{R}}$.

Index

Index des notations