3. Les espaces de Banach classiques

3.1. Espaces de fonctions continues ou intégrables

Soit K un espace topologique compact ; l'espace $\mathrm{C}(\mathrm{K})$ (réel ou complexe) est l'espace vectoriel des fonctions scalaires continues sur K. On sait que toute fonction réelle f continue sur K est bornée (et atteint ses bornes), ce qui permet de définir la *norme uniforme* de la fonction f en posant

$$\|f\|_\infty = \max_{t \in \mathrm{K}} |f(t)|.$$

Muni de cette norme, $\mathrm{C}(\mathrm{K})$ est un espace de Banach. Le fait qu'il soit complet est une traduction du théorème selon lequel une limite uniforme d'une suite de fonctions continues est une fonction continue.

Soit (K, d) un espace *métrique* compact. Si U est un ouvert quelconque de K, la fonction f définie par $f(s) = d(s, \mathrm{U}^c) = \inf\{d(s,t) : t \notin \mathrm{U}\}$ est une fonction réelle continue sur K qui est non nulle exactement sur U. Si (U_i) est un recouvrement ouvert fini de K, on peut donc trouver des fonctions continues ψ_i telles que ψ_i soit nulle en dehors de U_i et $\psi_i > 0$ sur U_i ; alors $\psi = \sum_j \psi_j$ est > 0 sur K (donc minorée par un $\delta > 0$). Les fonctions continues $\varphi_i = \psi_i / \psi$ réalisent une *partition de l'unité*, subordonnée au recouvrement (U_i), ce qui signifie que $\sum_j \varphi_j = 1$ sur K, $\varphi_j = 0$ hors de U_j et $0 \le \varphi_j \le 1$ pour chaque j. C'est un outil très commode pour beaucoup de questions.

Voici un exemple d'application de la notion de partition de l'unité. On dit qu'un espace topologique X est *métrisable* lorsqu'il existe une distance d sur X qui définit la topologie de X.

Théorème. *Quand* K *est un compact métrisable, l'espace de Banach* $\mathrm{C}(\mathrm{K})$ *est séparable.*

En réalité, la réciproque est vraie : si K est un espace topologique compact et si $\mathrm{C}(\mathrm{K})$ est séparable, on peut définir la topologie de K par une distance.

Démontrons le théorème. On se donne un compact métrique (K, d). Pour toute fonction continue f sur K, on introduit le *module de continuité de* f, qui est une fonction notée ω_f, définie pour tout $\delta > 0$ par

$$\omega_f(\delta) = \sup\{|f(s) - f(t)| : s, t \in \mathrm{K},\ d(s,t) \le \delta\}.$$

Dire que f est uniformément continue sur K revient à dire que $\lim_{\delta \to 0} \omega_f(\delta) = 0$. Fixons $\delta > 0$ et considérons un recouvrement fini de K par des boules ouvertes $(\mathrm{B}(s_j, \delta))_{j=1,\ldots,\mathrm{N}}$ (existence par Borel-Lebesgue). Soit $\varphi_1, \ldots, \varphi_\mathrm{N}$ une partition de l'unité associée au recouvrement de K par les ouverts $\omega_j = \mathrm{B}(s_j, \delta)$; soit F_δ le sous-espace de dimension finie de $\mathrm{C}(\mathrm{K})$ engendré par $\varphi_1, \ldots, \varphi_\mathrm{N}$.

Pour toute fonction continue f *sur* K, *on a* $\mathrm{dist}(f, \mathrm{F}_\delta) \le \omega_f(\delta)$.

On pose $g = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} f(s_j)\, \varphi_j \in \mathrm{F}_\delta$; on voit que pour tout $s \in \mathrm{K}$,

$$f(s) - g(s) = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \varphi_j(s) (f(s) - f(s_j)).$$

Si $\varphi_j(s)(f(s)-f(s_j)) \neq 0$ pour un certain indice j, on a $\varphi_j(s) \neq 0$, donc $s \in \mathrm{B}(s_j, \delta)$, donc $|f(s)-f(s_j)| \leq \omega_f(\delta)$, donc pour tout $j = 1, \ldots, \mathrm{N}$ on a

$$\varphi_j(s)|f(s)-f(s_j)| \leq \omega_f(\delta)\, \varphi_j(s)\,;$$

en sommant en j on obtient l'inégalité $|f(s)-g(s)| \leq \omega_f(\delta)$ pour tout $s \in \mathrm{K}$, c'est à dire

$$\text{(P)} \qquad \mathrm{dist}(f, \mathrm{F}_\delta) \leq \omega_f(\delta).$$

Si on prend $\delta = 2^{-n}$ pour $n = 0, 1, \ldots$ et si (F_n) sont des sous-espaces de dimension finie correspondants, on aura pour toute fonction continue f

$$\mathrm{dist}(f, \mathrm{F}_n) \leq \omega_f(2^{-n}) \to 0.$$

Il en résulte que $\bigcup_n \mathrm{F}_n$ est dense dans $\mathrm{C(K)}$, donc $\mathrm{C(K)}$ est séparable d'après la proposition 1.7.1.

Beaucoup d'exemples d'espaces de Banach proviennent de la théorie de l'intégration. Un *espace mesurable* $(\Omega, \mathcal{A})$ est la donnée d'un ensemble Ω et d'une tribu $\mathcal{A}$ de parties de l'ensemble Ω. Nous supposerons donné un espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, où $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace mesurable et μ une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Rappelons que μ est une application de $\mathcal{A}$ dans $[0, +\infty]$ telle que $\mu(\emptyset) = 0$ et

$$\mu\big(\bigcup_{n \geq 0} \mathrm{A}_n\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(\mathrm{A}_n)$$

chaque fois que les ensembles $(\mathrm{A}_n)_{n \geq 0}$ de la tribu $\mathcal{A}$ sont deux à deux disjoints (avec des conventions évidentes pour les séries dont les termes peuvent prendre la valeur $+\infty$).

Pour éviter certains désagréments nous supposerons que la mesure est *σ-finie*, ce qui veut dire qu'il existe une partition (Ω_n) de Ω en une *suite* de parties $\Omega_n \in \mathcal{A}$ telles que $\mu(\Omega_n) < +\infty$. Un exemple typique est fourni par la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ (muni de la tribu borélienne), ou bien par la *mesure de comptage* μ sur $\mathbb{N}$, qui associe à tout $\mathrm{A} \subset \mathbb{N}$ le nombre $\mu(\mathrm{A})$ (fini ou $+\infty$) de ses éléments.

Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace $\mathrm{L}_p = \mathrm{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ des (classes de) fonctions f réelles ou complexes sur Ω telles que f soit mesurable et $\int_\Omega |f|^p \, d\mu < +\infty$ est normé par

$$\|f\|_p = \Big(\int_\Omega |f(s)|^p \, d\mu(s)\Big)^{1/p}.$$

On a vu dans l'exemple 1.1.2 que la quantité ci-dessus définit une semi-norme sur $\mathcal{L}_p$, puis dans l'exemple 1.1.6 que l'on obtient une norme sur L_p en passant au quotient. Cet espace L_p est de plus complet : on peut utiliser le critère des séries normalement convergentes de la proposition 1.1.6 et quelques arguments d'intégration pour retrouver ce théorème du cours d'Intégration (appelé souvent *théorème de Fisher-Riesz*).

On a vu dans l'exemple 1.1.6 l'espace ℓ_p, qui est l'espace des suites scalaires $x = (x_n)$ telles que $\sum |x_n|^p < +\infty$. Pour unifier les arguments, on peut dire que ℓ_p est l'espace $\mathrm{L}_p(\Omega, \mu)$ pour la mesure de comptage μ sur $\Omega = \mathbb{N}$. L'espace ℓ_∞ est l'espace de Banach des suites scalaires bornées. Il existe un analogue de ℓ_∞ en théorie de l'intégration : c'est l'espace $\mathrm{L}_\infty(\Omega, \mu)$ des classes de fonctions mesurables bornées sur Ω (c'est à dire des classes qui contiennent un représentant borné). La norme $\|f\|_\infty$ est la plus petite constante M telle que l'on ait $|f(s)| \leq \mathrm{M}$ pour μ-presque tout $s \in \Omega$. L'espace L_∞ est complet pour cette norme.

3.2. Résultats de densité

On utilise très souvent le résultat suivant : les fonctions continues et à support compact sont denses dans l'espace $L_1(\mathbb{R})$. Nous allons rappeler une des voies qui conduit à ce résultat. Nous supposons que $L_1(\mathbb{R})$ a été introduit à partir de la théorie de la mesure, en commençant avec les fonctions étagées et en construisant l'intégrale de Lebesgue.

Commençons par une remarque simple. Soit $f \in L_p(\mathbb{R})$, avec $1 \le p < +\infty$; pour chaque entier $n \ge 1$, désignons par f_n la fonction $\mathbf{1}_{[-n,n]} f$, égale à f sur l'intervalle $[-n, n]$ et nulle en dehors. Il est clair que f_n tend simplement vers f sur $\mathbb{R}$, et de plus $|f(t) - f_n(t)|^p \le |f(t)|^p$ pour tout $t \in \mathbb{R}$; on a donc convergence simple vers 0 de la suite $(|f - f_n|^p)$, convergence dominée par la fonction intégrable fixe $|f|^p$. D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t) - f_n(t)|^p \, dt \to 0$$

ce qui signifie que $\|f_n - f\|_p \to 0$. On obtient ainsi

Pour tout $p \in [1, +\infty[$, le sous-espace vectoriel de $L_p(\mathbb{R})$ formé des fonctions g nulles en dehors d'un compact (dépendant de g) est dense dans $L_p(\mathbb{R})$.

Soient maintenant K un espace métrique compact, $\mathcal{B}$ sa tribu borélienne et μ une mesure ≥ 0 finie sur l'espace mesurable $(K, \mathcal{B})$.

Théorème 3.2.1. *L'espace $C(K)$ est dense dans $L_p(K, \mathcal{B}, \mu)$, lorsque $1 \le p < +\infty$.*

Démonstration. On montre que les ensembles $A \in \mathcal{B}$ tels que $\mathbf{1}_A$ soit limite dans L_p d'une suite (f_n) de fonctions continues sur K telles que $0 \le f_n \le 1$, forment une tribu $\mathcal{A}$ de parties de K.

Si $A \in \mathcal{A}$ et $\mathbf{1}_A = \lim f_n$, alors $\mathbf{1}_{A^c} = 1 - \mathbf{1}_A = \lim(1 - f_n)$ montre que $A^c \in \mathcal{A}$; on a $K \in \mathcal{A}$ puisque $\mathbf{1}_K = 1$ est continue sur K. Si $A \in \mathcal{A}$ et $\mathbf{1}_A = \lim f_n$, $B \in \mathcal{A}$ et $\mathbf{1}_B = \lim g_n$, alors la suite des produits $(f_n g_n)$ tend vers $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$ dans L_p (petit exercice ; utiliser le fait que les fonctions sont toutes bornées par 1 sur K). Si (A_n) est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{A}$ et si A désigne sa réunion, la fonction $\mathbf{1}_A$ est limite simple de la suite des $(\mathbf{1}_{A_n})$ et la convergence de $|\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_{A_n}|^p$ vers 0 est dominée par la fonction intégrable fixe $\mathbf{1}_A$, donc $\mathbf{1}_{A_n}$ tend vers $\mathbf{1}_A$ dans L_p ; par hypothèse, chaque fonction $\mathbf{1}_{A_n}$ peut être approchée par une fonction continue f_n, de façon que $\|\mathbf{1}_{A_n} - f_n\|_p < 2^{-n}$ par exemple. On a alors $\mathbf{1}_A = \lim f_n$ dans L_p, donc $A \in \mathcal{A}$.

On vérifie ensuite que cette tribu $\mathcal{A}$ contient les ouverts de K : si U est un ouvert de K, on définit f_n en posant $f_n(t) = \min\{1, n\, d(t, U^c)\}$ pour tout $t \in K$; cette suite de fonctions continues tend simplement vers $\mathbf{1}_U$, et on montre que $\mathbf{1}_U = \lim f_n$ dans L_p par convergence dominée. Puisque $\mathcal{A}$ est une tribu contenant les ouverts de K, on a $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, donc $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Pour tout borélien $B \in \mathcal{B}$, on sait maintenant que $B \in \mathcal{A}$, donc il existe une suite de fonctions continues qui tend vers $\mathbf{1}_B$ en norme L_p ; par linéarité, il en résulte que toute fonction $\mathcal{B}$-étagée est limite de fonctions continues pour la norme L_p, d'où le résultat parce que les fonctions étagées sont denses dans L_p (par la construction usuelle de l'intégrale).

//

Corollaire 3.2.2. *Lorsque (K, d) est un espace métrique compact et $1 \le p < +\infty$, l'espace $L_p(K, \mathcal{B}, \mu)$ est séparable.*

Revenons maintenant à $L_p(\mathbb{R})$, $1 \le p < +\infty$. Si $f \in L_p(\mathbb{R})$, on peut déjà trouver $a > 0$, une fonction g_1 nulle en dehors de $[-a, a]$ et telle que $\|f - g_1\|_p < \varepsilon$; en appliquant le théorème qui précède au compact $[-a, a]$ et à la mesure de Lebesgue, on trouve une fonction g_2 sur $\mathbb{R}$, continue sur $[-a, a]$, nulle en dehors et telle que $\|g_1 - g_2\|_p < \varepsilon$. Si $g_2(-a) = g_2(a) = 0$, la fonction g_2 est continue sur $\mathbb{R}$ et on a atteint notre objectif. Sinon, il faut encore une petite approximation pour obtenir g_3, continue sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de $[-a-1, a+1]$ et telle que $\|g_3 - g_2\|_p < \varepsilon$.

Théorème 3.2.3. *L'espace vectoriel des fonctions continues et à support compact sur* $\mathbb{R}$ *est dense dans* $\mathrm{L}_p(\mathbb{R})$ *lorsque* $1 \le p < +\infty$. *Le même résultat est vrai pour* $\mathbb{R}^d$, *pour tout* $d \ge 1$.

Nous appelons *fonction en escalier* une fonction f sur $\mathbb{R}$ (ou sur un intervalle de $\mathbb{R}$) qui est combinaison linéaire de fonctions indicatrices d'intervalles. On dira que f est à support borné si elle est nulle en dehors d'un intervalle borné.

Corollaire 3.2.4. *L'espace vectoriel des fonctions en escalier à support borné sur* $\mathbb{R}$ *est dense dans* $\mathrm{L}_p(\mathbb{R})$ *lorsque* $1 \le p < +\infty$.

Démonstration. Il suffit de vérifier qu'on peut approcher, en norme L_p, toute fonction continue à support compact f sur $\mathbb{R}$ par des fonctions en escalier à support borné. C'est très facile en utilisant la continuité uniforme de f.

//

3.3. Hölder et dualité des espaces ℓ_p

Pour $p \in [1, +\infty]$, on appelle *exposant conjugué* de p le nombre $q \in [1, +\infty]$ tel que $1/p + 1/q = 1$. Cette relation est symétrique ; on dit que (p, q) est un couple *d'exposants conjugués*. On notera que si $1 < p < +\infty$, cela implique que $q(p-1) = p$ et de façon symétrique, $p(q-1) = q$; on pourra aussi noter que $(p-1)(q-1) = 1$.

Théorème 3.3.1 : inégalité de Hölder. *Soient* $p, q \in [1, +\infty]$ *tels que* $1/p + 1/q = 1$ *; si* $x = (x_n) \in \ell_p$ *et* $y = (y_n) \in \ell_q$, *alors* $(x_n y_n) \in \ell_1$ *et*

$$\Bigl|\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n\Bigr| \le \|x\|_p \, \|y\|_q.$$

Si $f \in \mathrm{L}_p(\Omega, \mu)$ *et* $g \in \mathrm{L}_q(\Omega, \mu)$, *la fonction produit* fg *est intégrable et*

$$\Bigl|\int_\Omega f g \, d\mu\Bigr| \le \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

Démonstration. On écrira la démonstration dans le cas des fonctions, où les notations sont plus agréables. Pour alléger un peu plus, on écrira simplement $\int f$ au lieu de $\int_\Omega f(s)\, d\mu(s)$ chaque fois que possible. Si $p = \infty$, alors $q = 1$; la fonction f est (presque-sûrement) bornée par $\mathrm{M} = \|f\|_\infty$ et g est intégrable ; le produit fg est mesurable et $|fg| \le \mathrm{M}\,|g|$, donc fg est intégrable et

$$\Bigl|\int fg\Bigr| \le \int |fg| \le \mathrm{M} \int |g| = \|f\|_\infty \, \|g\|_1.$$

Supposons maintenant $1 < p < +\infty$. Pour tous nombres réels $t, u \geq 0$, on a la relation
$$tu \leq \frac{1}{p}\, t^p + \frac{1}{q}\, u^q$$
(pour le voir, on pourra maximiser la fonction $t \to tu - t^p/p$). Il en résulte que pour tout $s \in \Omega$
$$|f(s)g(s)| \leq \frac{1}{p}\, |f(s)|^p + \frac{1}{q}\, |g(s)|^q,$$
ce qui montre que fg est intégrable, et que
$$\Bigl|\int fg\Bigr| \leq \frac{1}{p} \int |f|^p + \frac{1}{q} \int |g|^q.$$
L'inégalité cherchée est positivement homogène par rapport à f et à g, donc il suffit de la démontrer lorsque $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$. Mais dans ce cas, $\int |f|^p = 1$ et $\int |g|^q = 1$, donc l'inégalité précédente donne $|\int fg| \leq 1/p + 1/q = 1$, ce qui est le résultat voulu. //

Corollaire 3.3.2. *Soient $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $1/p + 1/q = 1$ et $x = (x_n) \in \ell_p$; on a*
$$\|x\|_p = \sup\{\Bigl|\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n\Bigr| : y = (y_n) \in \ell_q,\ \|y\|_q \leq 1\}.$$
Si $f \in \mathrm{L}_p(\Omega, \mu)$,
$$\|f\|_p = \sup\{\Bigl|\int_\Omega fg\, d\mu\Bigr| : \|g\|_q \leq 1\}.$$

Démonstration. L'inégalité de Hölder nous dit déjà que
$$\|f\|_p \geq \sup\{\Bigl|\int_\Omega fg\, d\mu\Bigr| : \|g\|_q \leq 1\},$$
le problème est de montrer l'autre direction. On va voir qu'en fait le *maximum* est atteint pour une certaine fonction $g \in \mathrm{L}_q$, $\|g\|_q \leq 1$, lorsque $1 \leq p < +\infty$. Si $f = 0$, le résultat est évident, on supposera donc $f \neq 0$, et par homogénéité on peut se ramener à $\|f\|_p = 1$. Soit $\widetilde{f}$ une "vraie" fonction mesurable de la classe f, et définissons une fonction mesurable g sur l'ensemble Ω en posant $g(s) = |\widetilde{f}(s)|^p / \widetilde{f}(s)$ sur l'ensemble mesurable $\mathrm{A} = \{s \in \Omega : \widetilde{f}(s) \neq 0\}$, et $g(s) = 0$ lorsque $s \notin \mathrm{A}$. Alors $|g(s)| = |f(s)|^{p-1}$ pour tout $s \in \mathrm{A}$; pour $p > 1$, on a $|g|^q = |f|^p$, donc $\int |g|^q = 1$, soit encore $\|g\|_q = 1$; pour $p = 1$, $g(s)$ est de module 1 quand $s \in \mathrm{A}$ donc $\|g\|_\infty = 1$. D'autre part
$$\int_\Omega fg\, d\mu = \int_\mathrm{A} |f(s)|^p\, d\mu(s) = \int_\Omega |f|^p\, d\mu = 1 = \|f\|_p.$$
//

Soit $v = (v_n) \in \ell_q$, où q est l'exposant conjugué de $p \in [1, +\infty]$. D'après ce qui précède, on peut définir une forme linéaire continue f_v sur ℓ_p en posant

$$\forall u \in \ell_p, \quad f_v(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n.$$

De plus, $\|f_v\|_{\ell_p^*} = \|v\|_q$. On a ainsi défini une isométrie linéaire J_q de ℓ_q dans le dual de ℓ_p. On va maintenant voir que cette isométrie est surjective lorsque $p < +\infty$.

Notons $(\mathbf{e}_n)_{n\geq 0}$ la *suite canonique* (voir l'exemple 1.1.7). Si $x = (x_n)$ est un élément de ℓ_p, on va vérifier que la série de vecteurs $\sum x_k \mathbf{e}_k$ converge dans ℓ_p, et que sa somme $\sum_{k=0}^{+\infty}$ est le vecteur x. La somme partielle $\mathrm{U}_n = \sum_{k=0}^{n} x_k \mathbf{e}_k$ est le vecteur $\mathrm{U}_n = (x_0, x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots)$; on voit donc que $\|x - \mathrm{U}_n\|_p^p = \sum_{k>n} |x_k|^p$, reste d'ordre n de la série numérique convergente $\sum |u_k|^p$; il en résulte que $\|x - \mathrm{U}_n\|_p$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, ce qui signifie précisément que $x = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \mathbf{e}_k$.

Soit f une forme linéaire continue sur ℓ_p, et posons $v_k = f(\mathbf{e}_k)$ pour tout $k \geq 0$; on sait que l'image linéaire continue d'une série convergente est la série convergente des images,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(x_k \mathbf{e}_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \, v_k,$$

et $|f(x)| \leq \|f\| \, \|x\|_p$. Si on choisit comme vecteur $x = x^{(n)}$ particulier celui dont les coordonnées vérifient $x_k = |v_k|^q / v_k$ si $v_k \neq 0$, $0 \leq k \leq n$ et $x_k = 0$ sinon, on obtiendra

$$\sum_{k=0}^{n} |v_k|^q = f(x^{(n)}) \leq \|f\| \, \|x^{(n)}\|_p = \|f\| \Bigl(\sum_{k=0}^{n} |v_k|^q \Bigr)^{1/p},$$

ce qui montre que $\bigl(\sum_{k=0}^{n} |v_k|^q\bigr)^{1-1/p} \leq \|f\|$ pour tout n, donc $\bigl(\sum_{k=0}^{+\infty} |v_k|^q\bigr)^{1/q} \leq \|f\|$. La suite $v = (v_n)$ est donc dans ℓ_q, et $f = f_v$.

En d'autres termes,

Théorème 3.3.4. *Si $1 \leq p < +\infty$ le dual de ℓ_p s'identifie à ℓ_q : l'application J_q qui associe à chaque $v \in \ell_q$ la forme linéaire $f_v \in (\ell_p)^*$ définit une bijection isométrique de ℓ_q sur le dual de ℓ_p ; de plus, J_1 définit une bijection isométrique de ℓ_1 sur le dual de c_0.*

Dans le cas des espaces L_p, l'inégalité de Hölder et son corollaire donnent aussi une isométrie j_q de L_q dans le dual de L_p ; nous allons montrer qu'elle est bijective dans certains cas. Pour cette étude, nous aurons besoin du théorème de Radon-Nikodym.

3.4. Théorème de Radon-Nikodym et dual de L_p

Une *mesure réelle* sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ (pas de valeur infinie ici !) qui est σ-additive, c'est à dire que $\mu(\emptyset) = 0$ et $\mu(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(\mathrm{A}_n)$ pour toute suite (A_n) d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{A}$. Une *mesure complexe* μ est une application σ-additive $\mathcal{A} \to \mathbb{C}$. Dans ce cas $\mathrm{A} \in \mathcal{A} \to \mathrm{Re}\, \mu(\mathrm{A})$ est une mesure réelle, donc une mesure complexe μ est tout simplement de la forme $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, où μ_1 et μ_2 sont deux mesures réelles. Un résultat moins évident, le *théorème de décomposition de Hahn*, dit qu'une mesure réelle est la différence de deux mesures positives bornées.

Si μ est une mesure réelle ou complexe, elle est bornée sur $\mathcal{A}$.

Soit μ une mesure réelle ou complexe sur $(\Omega, \mathcal{A})$; on définit une nouvelle fonction $|\mu|$ sur $\mathcal{A}$ en posant pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$

$$|\mu|(\mathrm{A}) = \sup\Bigl\{\sum |\mu(\mathrm{A}_k)| : (\mathrm{A}_k) \ \text{ disjoints et } \ \subset \mathrm{A}\Bigr\}.$$

On dit que $|\mu|$ est la *variation totale* de μ. On peut montrer (exercice) que $|\mu|$ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$, évidemment positive, et de plus cette mesure est **finie**.

Lemme 3.4.1. *Si μ est une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{A})$, f une fonction réelle μ-intégrable et si $\int_{\mathrm{A}} f \, d\mu \ge 0$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, la fonction f est ≥ 0 μ-presque partout.*

Proposition 3.4.2. *Si ν est une mesure réelle ou complexe sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et si μ est une mesure positive finie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que*

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \quad |\nu(\mathrm{A})| \le \mu(\mathrm{A}),$$

il existe une fonction f mesurable bornée, réelle ou complexe, telle que

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \quad \nu(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} f \, d\mu.$$

On a $|f| \le 1$ μ-presque partout ; si ν est une mesure réelle, f est réelle μ-presque partout ; si ν est réelle positive, on a $0 \le f \le 1$ μ-presque partout.

Démonstration. Pour toute fonction $\mathcal{A}$-étagée $g = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{1}_{\mathrm{A}_i}$ on vérifie que l'expression $\sum_{i=1}^n c_i \, \nu(\mathrm{A}_i)$ ne dépend pas de la représentation de g (petit exercice fastidieux) ; on pose alors

$$\ell(g) = \sum_{i=1}^n c_i \, \nu(\mathrm{A}_i).$$

On vérifie que ℓ est une forme linéaire sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ des fonctions $\mathcal{A}$-étagées, et en supposant qu'on avait utilisé une représentation de g par des ensembles (A_i) disjoints, on aura

$$|\ell(g)| \le \sum_{i=1}^n |c_i| \, |\nu(\mathrm{A}_i)| \le \sum_{i=1}^n |c_i| \, \mu(\mathrm{A}_i) = \int |g| \, d\mu \le \sqrt{\mu(\Omega)} \, \|g\|_{\mathrm{L}_2(\mu)}.$$

Cette forme linéaire continue sur le sous-espace dense $\mathcal{E} \subset \mathrm{L}_2(\mu)$ se prolonge à $\mathrm{L}_2(\mu)$, donc il existe une fonction $f_1 \in \mathrm{L}_2(\mu)$ telle que $\nu(\mathrm{A}) = \int \mathbf{1}_{\mathrm{A}} \, \overline{f}_1 \, d\mu$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$. Posons $f = \overline{f}_1$: on a bien la représentation annoncée, $\nu(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} f \, d\mu$.

//

Théorème 3.4.3 : théorème de décomposition de Hahn. *Soit μ une mesure réelle sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$; il existe un ensemble $\mathrm{B}^+ \in \mathcal{A}$ tel qu'en posant $\mathrm{B}^- = \Omega \setminus \mathrm{B}^+$ on ait :*

pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, $\mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}^+) \ge 0$ et $\mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}^-) \le 0$.

On déduit immédiatement de l'énoncé une décomposition de μ comme différence $\mu^+ - \mu^-$ de deux mesures positives finies μ^+ et μ^-, qui sont définies par

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \quad \mu^+(\mathrm{A}) = \mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}^+), \quad \mu^-(\mathrm{A}) = -\mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}^-).$$

Il en résulte facilement que μ^+ et μ^- peuvent être définies par des formules qui ne mentionnent pas l'ensemble B^+,

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \quad \mu^+(\mathrm{A}) = \sup\{\mu(\mathrm{A}') : \mathrm{A}' \subset \mathrm{A}, \mathrm{A}' \in \mathcal{A}\}$$

et de même $\mu^-(\mathrm{A}) = \sup\{-\mu(\mathrm{A}') : \mathrm{A}' \subset \mathrm{A}, \mathrm{A}' \in \mathcal{A}\}$.

Démonstration. On applique la proposition 2 aux mesures ν et $\mu = |\nu|$; on obtient ainsi une fonction réelle f, et on pose $\mathrm{B}^+ = \{f > 0\}$.

//

Si μ, ν sont deux mesures positives sur $(\Omega, \mathcal{A})$, on dit que ν est *absolument continue* par rapport à μ, et on note $\nu << \mu$, si pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ la condition $\mu(\mathrm{A}) = 0$ implique $\nu(\mathrm{A}) = 0$.

Par exemple, la probabilité δ (Dirac de zéro) n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$ puisque si $\mathrm{A} = \{0\}$, on a $\lambda(\mathrm{A}) = 0$ mais $\delta(\mathrm{A}) = 1$. Si $d\nu(x) = f(x)\,dx$ où f est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$, la mesure finie ν sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ est absolument continue par rapport à λ. Le théorème suivant donne la réciproque.

Théorème 3.4.4 : théorème de Radon-Nikodym. *Si μ, ν sont deux mesures positives σ-finies sur $(\Omega, \mathcal{A})$, et si $\nu << \mu$, il existe une fonction mesurable $f \geq 0$ sur Ω telle que*

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \quad \nu(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} f\,d\mu.$$

On dit que f est la *densité de Radon-Nikodym* de ν par rapport à μ.

Démonstration. Il suffit de démontrer ce résultat quand μ et ν sont finies : si μ et ν sont σ-finies, on peut trouver une partition de Ω en ensembles $(\mathrm{B}_n)_{n \geq 0}$ de la tribu $\mathcal{A}$ tels que $\nu(\mathrm{B}_n) < \infty$ et $\mu(\mathrm{B}_n) < \infty$. Si on pose $\mu_n = \mathbf{1}_{\mathrm{B}_n}\mu$ et $\nu_n = \mathbf{1}_{\mathrm{B}_n}\nu$, on a encore $\nu_n << \mu_n$ pour tout $n \geq 0$, et les mesures sont finies. Si on a démontré le théorème de Radon-Nikodym dans le cas fini, on sait qu'il existe une fonction mesurable $f_n \geq 0$ telle que

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \quad \nu_n(\mathrm{A}) = \nu_n(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}_n) = \int_{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}_n} f_n\,d\mu_n = \int_{\mathrm{A}} \mathbf{1}_{\mathrm{B}_n} f_n\,d\mu$$

ce qui montre que $\mathbf{1}_{\mathrm{B}_n} f_n$ convient aussi comme densité de ν_n par rapport à μ. Maintenant, en utilisant les axiomes des mesures, Beppo-Levi et en posant $f = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{\mathrm{B}_n} f_n$, on a pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$

$$\nu(\mathrm{A}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \nu(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int \mathbf{1}_{\mathrm{A}}\,\mathbf{1}_{\mathrm{B}_n} f_n\,d\mu = \int \mathbf{1}_{\mathrm{A}} \Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{\mathrm{B}_n} f_n\Bigr)\,d\mu = \int_{\mathrm{A}} f\,d\mu,$$

ce qui montre que f est la densité cherchée.

Montrons donc Radon-Nikodym avec l'hypothèse supplémentaire que μ et ν sont finies. La mesure positive ν est plus petite que la mesure finie $\xi = \nu + \mu$; d'après la proposition 2 appliquée à ν et ξ, il existe une fonction bornée f telle que

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \quad \nu(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} f\,d\xi = \int_{\mathrm{A}} f\,d\nu + \int_{\mathrm{A}} f\,d\mu$$

et $0 \le f \le 1$ ξ-presque partout ; quitte à modifier f sans changer les intégrales (en ν et en μ) on supposera $0 \le f \le 1$ partout. On a pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$

$$\int_{\mathrm{A}} (1-f)\, d\nu = \int_{\mathrm{A}} f\, d\mu$$

et en passant par fonctions étagées et suites croissantes on obtient

$$\int (1-f) g\, d\nu = \int fg\, d\mu$$

pour toute fonction mesurable positive g. L'ensemble $\mathrm{B} = \{f = 1\}$ est μ-négligeable puisque

$$\int (1-f)\mathbf{1}_{\mathrm{B}}\, d\nu = 0 = \int f\mathbf{1}_{\mathrm{B}}\, d\mu = \mu(\mathrm{B})$$

donc il est aussi ν-négligeable d'après l'hypothèse d'absolue continuité. Si on prend $g_0 = 1/(1-f)$ hors de B on aura pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$

$$\nu(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} (1-f) g_0\, d\nu = \int_{\mathrm{A}} \frac{f}{1-f}\, d\mu,$$

ce qui donne le résultat.

//

Le dual de $\mathrm{L}_p(\Omega, \mu)$

Commençons par le cas le plus simple, celui du dual de $\mathrm{L}_1(0,1)$. On montre d'abord que toute fonction $g \in \mathrm{L}_\infty(0,1)$ permet de définir une forme linéaire continue ℓ_g sur $\mathrm{L}_1(0,1)$ en posant

$$\ell_g(f) = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt.$$

On sait que $\|\ell_g\|_{\mathrm{L}_1^*} = \|g\|_\infty$; on rappelle que la norme de g dans $\mathrm{L}_\infty(0,1)$ est la plus petite constante M telle que l'on ait $|g| \le \mathrm{M}$ presque-partout.

Inversement, si ℓ est une forme linéaire continue sur $\mathrm{L}_1(0,1)$, on obtient par restriction à $\mathrm{L}_2(0,1) \subset \mathrm{L}_1(0,1)$ une forme linéaire continue $\widetilde{\ell}$ sur L_2, qui peut donc se représenter au moyen d'une fonction $g_1 \in \mathrm{L}_2$. On a donc en posant $g = \overline{g}_1$,

$$\forall f \in \mathrm{L}_2(0,1), \quad \widetilde{\ell}(f) = \ell(f) = \int_0^1 f(t)\overline{g_1(t)}\, dt = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt$$

mais on sait que $|\ell(f)| \le \|\ell\|\, \|f\|_{\mathrm{L}_1}$ parce que ℓ est continue sur L_1. Cela donne pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, en appliquant à $f = \mathbf{1}_{\mathrm{A}}$

$$\Big| \int_{\mathrm{A}} g(t)\, dt \Big| \le \|\ell\| \int_{\mathrm{A}} dt$$

et implique que $|g| \le \|\ell\|$ presque partout d'après le lemme 1 appliqué à $\|\ell\| - g$ et $\|\ell\| + g$.

On a alors deux formes linéaires continues sur L_1, la forme ℓ et la forme ℓ_g, qui coïncident sur le sous-ensemble dense L_2 de L_1. Il en résulte que $\ell = \ell_g$.

Proposition. *L'application $g \to \ell_g$ est une isométrie linéaire surjective de* $\mathrm{L}_\infty(0,1)$ *sur le dual de* $\mathrm{L}_1(0,1)$.

Soit q le nombre tel que $1/q + 1/p = 1$; d'après l'inégalité de Hölder, on a pour toutes fonctions $f \in \mathrm{L}_p$, $g \in \mathrm{L}_q$

$$\Big| \int_\Omega f g \, d\mu \Big| \le \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

Ceci signifie que si g est fixée dans L_q, on peut définir une forme linéaire continue ℓ_g sur L_p par la formule

$$\ell_g(f) = \int_\Omega f g \, d\mu.$$

De plus on a vu que

$$\|\ell_g\|_{\mathrm{L}_p^*} = \|g\|_q.$$

On a donc une isométrie $j_q : \mathrm{L}_q \to (\mathrm{L}_p)^*$. On a en fait le résultat suivant.

Théorème 3.4.5. *Lorsque $1 \le p < +\infty$ et que μ est σ-finie, l'application j_q est une isométrie surjective de $\mathrm{L}_q(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sur le dual de $\mathrm{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.*

Démonstration. On suppose que $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré σ-fini et que x^* est une forme linéaire continue sur $\mathrm{L}_p = \mathrm{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Puisque μ est σ-finie, on peut trouver une suite croissante d'ensembles $\mathrm{B}_n \in \mathcal{A}$ tels que $\mu(\mathrm{B}_n) < \infty$; on va fixer l'un de ces ensembles, disons $\mathrm{C} = \mathrm{B}_{n_0}$ et on va définir une mesure réelle ou complexe γ par

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \quad \gamma(\mathrm{A}) = x^*(\mathbf{1}_{\mathrm{A} \cap \mathrm{C}})$$

(petit exercice : vérifier que γ vérifie les axiomes d'une mesure complexe). On va montrer que la variation totale $|\gamma|$ est absolument continue par rapport à μ. Si les (A_k) sont des sous-ensembles de $\mathrm{B} \in \mathcal{A}$, deux à deux disjoints, on écrira

$$\sum_k |\gamma(\mathrm{A}_k)| = \sum_k u_k \gamma(\mathrm{A}_k) = x^*(\sum_k u_k \mathbf{1}_{\mathrm{A}_k})$$

où les u_k sont des complexes de module 1 convenablement choisis ; la fonction $\sum_k u_k \mathbf{1}_{\mathrm{A}_k}$ est donc plus petite en module que $\mathbf{1}_\mathrm{B}$, et il en résulte que

$$\sum_k |\gamma(\mathrm{A}_k)| = x^*(\sum_k u_k \mathbf{1}_{\mathrm{A}_k}) \le \|x^*\| \, \|\mathbf{1}_\mathrm{B}\|_{\mathrm{L}_p(\mu)}.$$

On en déduit $|\gamma|(\mathrm{B}) \le \|x^*\| \, \mu(\mathrm{B})^{1/p}$, pour tout $\mathrm{B} \in \mathcal{A}$, ce qui implique l'absolue continuité. Il existe donc une fonction μ-intégrable $g_1 \ge 0$ telle que

$$\int f \, d|\gamma| = \int f g_1 \, d\mu$$

pour toute f mesurable bornée. De plus d'après la proposition 2 il existe une fonction g_0 de module 1 telle que $\gamma(\mathrm{A}) = \int_\mathrm{A} g_0 \, d|\gamma|$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$. Finalement

$$x^*(\mathbf{1}_{\mathrm{A} \cap \mathrm{C}}) = \int_\mathrm{A} g_0 g_1 \, d\mu$$

pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$. On passe par linéarité aux fonctions étagées positives f,

$$x^*(\mathbf{1}_\mathrm{C} \, f) = \int f \, g_0 g_1 \, d\mu$$

puis par limite croissante (qu'il faut justifier du côté de x^*) aux fonctions f mesurables ≥ 0 et bornées.

En recollant les morceaux sur les différents ensembles $\mathrm{C} = \mathrm{B}_n$ dont la réunion croissante est égale à Ω, on obtient une fonction mesurable $g \ge 0$ sur Ω telle que

$$x^*(f) = \int f\, g\, d\mu$$

pour toute fonction mesurable bornée f telle que $f = \mathbf{1}_{\mathrm{B}_n} f$ pour un certain n. On montre maintenant que $\int |g|^q < +\infty$. Posons $\mathrm{A}_n = \mathrm{B}_n \cap \{|g| \le n\}$ et soit $f_n = \mathbf{1}_{\mathrm{A}_n} |g|^{q-1}\,\mathrm{sign}(g)$. On vérifie que $|f_n|^p = f_n g = \mathbf{1}_{\mathrm{A}_n}|g|^q$ est une fonction mesurable bornée, nulle en dehors de B_n, donc $f_n \in \mathrm{L}_p$ et on obtient

$$\int_{\mathrm{A}_n} |g_n|^q\, d\mu = \int f_n g\, d\mu = x^*(f_n) = |x^*(f_n)| \le \|x^*\|\, \|f_n\|_p = \|x^*\|\, \Bigl(\int_{\mathrm{A}_n} |g_n|^q\, d\mu\Bigr)^{1/p},$$

ce qui donne $\bigl(\int_{\mathrm{A}_n} |g|^q\, d\mu\bigr)^{1/q} \le \|x^*\|$. Il ne reste plus qu'à observer que (A_n) tend en croissant vers Ω pour obtenir que $\bigl(\int |g|^q\, d\mu\bigr)^{1/q} \le \|x^*\|$. On sait maintenant que la forme linéaire ℓ_g définie sur L_p par $\ell_g(f) = \int f g\, d\mu$ existe, est continue, et elle coïncide avec x^* sur le sous-espace vectoriel F formé des fonctions mesurables bornées nulles en dehors d'un certain B_n ; comme F est dense dans L_p, on en déduit que $x^* = \ell_g$, et de plus $\|x^*\| = \|\ell_g\| = \|g\|_{\mathrm{L}_q}$ par Hölder.

//

En revanche, le dual de L_∞ est en général “plus grand” que L_1.

3.5. Dual de C(K)

Pour décrire le dual de C(K) il faut utiliser les mesures réelles ou complexes introduites dans la section précédente. On considérera ici le cas d'un espace **métrique** compact (K, d). Rappelons que la *tribu borélienne* $\mathcal{B}$ de K est la tribu de parties de K engendrée par les ouverts de K.

Premier exemple : mesure de Dirac. Fixons un point t_0 de K et définissons une forme linéaire continue ℓ sur C(K) (réel ou complexe) par

$$\forall f \in \mathrm{C}(\mathrm{K}), \quad \ell(f) = f(t_0).$$

Cette forme linéaire est *l'évaluation au point* t_0. On a $|\ell(f)| \le \max_{t\in\mathrm{K}} |f(t)| = \|f\|_{\mathrm{C}(\mathrm{K})}$, donc ℓ est continue et $\|\ell\|_{\mathrm{C}(\mathrm{K})^*} \le 1$. En fait $\|\ell\| = 1$ (considérer la fonction constante $f = 1$). On peut décrire cette forme linéaire ℓ comme intégrale par rapport à une mesure bien particulière, la *mesure de Dirac du point* t_0, notée δ_{t_0}. Cette mesure sur $(\mathrm{K}, \mathcal{B})$ est définie pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{B}$ par

$$\delta_{t_0}(\mathrm{A}) = 1 \ \text{ si } \ t_0 \in \mathrm{A}, \quad \delta_{t_0}(\mathrm{A}) = 0 \ \text{ si } \ t_0 \notin \mathrm{A}.$$

Définir la mesure δ_{t_0} consiste à placer une masse 1 au point t_0. La théorie de l'intégration par rapport à cette mesure est un peu bizarre, mais le lecteur pourra se convaincre, en passant rapidement en revue les étapes de la définition de l'intégrale par rapport à une mesure positive, que

$$\int_{\mathrm{K}} f(s)\, d\delta_{t_0}(s) = f(t_0) = \ell(f)$$

pour toute fonction continue f. On peut donc *représenter* la forme linéaire ℓ au moyen d'une mesure sur K,

$$\forall f \in \mathrm{C}(\mathrm{K}), \quad \ell(f) = \int f\, d\delta_{t_0}.$$

On verra un peu plus loin que c'est un résultat général.

A chaque mesure réelle ou complexe μ sur un espace $(\Omega, \mathcal{A})$ on a associé sa variation totale, ou valeur absolue $|\mu|$ qui est une mesure positive finie. On posera $\|\mu\| = |\mu|(\Omega)$. Cette expression définit une norme sur l'espace vectoriel $\mathrm{M}(\Omega, \mathcal{A})$ des mesures réelles ou complexes sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Soit μ une mesure réelle ou complexe sur $(\mathrm{K}, \mathcal{B})$; on a vu qu'il existe une fonction f bornée par 1 en module telle que

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{B}, \quad \mu(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} f \, d|\mu|.$$

Si g est une fonction étagée $\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{1}_{\mathrm{A}_i}$ on pourra poser

$$\ell(g) = \int g \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(\mathrm{A}_i) = \int g f \, d|\mu|.$$

On a $|\int g d\mu| \le \int |gf| \, d|\mu| \le \int |g| \, d|\mu| = \|g\|_{\mathrm{L}_1}$ ce qui permet de prolonger la définition précédente précédente de $\ell(g)$ aux fonctions $g \in \mathrm{L}_1(|\mu|)$, et en particulier à $g \in \mathrm{C}(\mathrm{K})$. Dans ce cas on écrira $|\int g d\mu| \le \int |gf| \, d|\mu| \le \|g\|_\infty \int d|\mu| = \|g\|_\infty \, \|\mu\|$. On a donc associé une forme linéaire continue $\ell = \ell_\mu$ sur $\mathrm{C}(\mathrm{K})$ à la mesure réelle ou complexe μ sur $(\mathrm{K}, \mathcal{B})$. On vient de voir que la norme de dual est majorée par la norme de μ. En réalité, la norme de dual de $\mathrm{C}(\mathrm{K})$ est *égale* à la norme de mesure définie plus haut.

Les formes linéaires sur $\mathrm{C}(\mathrm{K})$ s'identifient aux mesures réelles sur $(\mathrm{K}, \mathcal{B})$ dans le cas réel, aux mesures complexes dans le cas complexe. Nous venons d'expliquer une direction. Dans l'autre direction, il faut montrer que toute forme linéaire continue sur $\mathrm{C}(\mathrm{K})$ provient d'une mesure μ sur $(\mathrm{K}, \mathcal{B})$. Ce théorème est assez long à démontrer (voir Rudin, Analyse réelle et complexe, par exemple). On indiquera seulement le premier pas, qui consiste en général à trouver d'abord la mesure positive $|\mu|$: on suppose donnée une forme linéaire continue ℓ sur $\mathrm{C}(\mathrm{K})$; on commence par définir la $|\mu|$-mesure d'un ouvert ω de K en posant

$$|\mu|(\omega) = \sup\{|\ell(f)| : |f| \le \mathbf{1}_\omega\}.$$

Enonçons le résultat.

Théorème 3.5.1. *Soit* K *un espace métrique compact ; toute forme linéaire continue* ℓ *sur* $\mathrm{C}(\mathrm{K})$ *provient d'une mesure* μ *sur* $(\mathrm{K}, \mathcal{B})$*, et de plus*

$$\|\ell\| = \|\mu\| = |\mu|(\mathrm{K}).$$

3.6. Séries de Fourier

Considérons l'espace de Hilbert $\mathrm{L}_2(0, 2\pi)$ des fonctions complexes de carré sommable pour la mesure $dx/2\pi$. Pour chaque entier relatif $n \in \mathbb{Z}$, désignons par e_n la fonction définie par

$$e_n(s) = \mathrm{e}^{ins}$$

pour tout $s \in [0, 2\pi]$. La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de $\mathrm{L}_2(0, 2\pi)$. Il est facile de vérifier que les fonctions $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ forment une suite orthonormée dans $\mathrm{L}_2(0, 2\pi)$. En revanche, il faut une petite démonstration pour voir que ce système est total. Il s'agit donc d'une base orthonormée de $\mathrm{L}_2(0, 2\pi)$. Pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_2(0, 2\pi)$, les coefficients du développement de f dans cette base sont les coefficients de Fourier complexes

$$c_n(f) = \langle f, e_n \rangle = \int_0^{2\pi} f(s)\,\mathrm{e}^{-ins}\,\frac{ds}{2\pi}.$$

D'après Parseval, on a $\|f\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |f(s)|^2\,ds/2\pi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$. Cette identité est la source d'une multitude d'exercices calculatoires, tels que par exemple le calcul de la somme de la série numérique $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$.

Quand on travaille avec des fonctions réelles, on préfère parfois écrire le développement en utilisant les fonctions réelles $t \to \cos(nt)$, pour $n = 0, 1, \ldots$ et $t \to \sin(nt)$, pour $n = 1, 2, \ldots$ (pour $n = 0$, le cosinus donne la fonction constante 1). On définit classiquement les coefficients de Fourier réels de la façon suivante :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt; \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt,$$

et la série de Fourier de f prend la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \bigl(a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)\bigr).$$

La bizarrerie du traitement de a_0 vient du fait que la fonction constante 1 n'a pas la même norme que les fonctions $t \to \cos(nt)$ pour $n \geq 1$.

On écrit souvent le développement de Fourier d'une fonction $f \in \mathrm{L}_2$ sous la forme

$$f(s) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\,\mathrm{e}^{ins},$$

mais cette écriture est *a priori* incorrecte, car rien ne nous dit que la série numérique ci-dessus converge vers $f(s)$: ce que nous savons est que f est la somme de la série de fonctions au sens de L_2. En fait, un théorème très difficile démontré vers 1960 par le mathématicien suédois L. Carleson justifie l'écriture précédente : pour presque tout s, la série de Fourier converge au point s et sa somme est égale à $f(s)$. La convergence ponctuelle est assez facile à obtenir lorsque f est de classe C^1, et dans ce cas elle est valable pour tout s. On va obtenir un tout petit peu mieux ; rappelons qu'on dit qu'une fonction f est *lipschitzienne* s'il existe une constante M telle que $|f(t) - f(s)| \leq \mathrm{M}\,|t - s|$ pour tous $s, t \in \mathbb{R}$.

Théorème 3.6.1. *Soit f une fonction 2π-périodique et lipschitzienne. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a*

$$f(s) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\,\mathrm{e}^{ins}\,.$$

Démonstration. Posons

$$f_\mathrm{N}(s) = \mathrm{S}_\mathrm{N}(f)(s) = \sum_{n=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} c_n(f)\,\mathrm{e}^{ins} = \int_0^{2\pi} \sum_{n=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} \mathrm{e}^{in(s-t)}\,f(t)\,\frac{dt}{2\pi}.$$

Posons

$$\mathrm{K_N}(t) = \sum_{n=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} \mathrm{e}^{int} = \mathrm{K_N}(-t) = \mathrm{e}^{-i\mathrm{N}t}\ \frac{1-\mathrm{e}^{i(2\mathrm{N}+1)t}}{1-\mathrm{e}^{it}}.$$

Comme $\int_0^{2\pi} \mathrm{K_N}(t)\,(dt/2\pi) = 1$, on aura, pour $s = 0$

$$f_n(0) - f(0) = \int_0^{2\pi} \mathrm{K_N}(t)\,(f(t) - f(0))\,\frac{dt}{2\pi} =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\mathrm{e}^{-i\mathrm{N}t} - \mathrm{e}^{i(\mathrm{N}+1)t})\,\frac{f(t)-f(0)}{1-\mathrm{e}^{it}}\,\frac{dt}{2\pi}.$$

Posons $g(t) = (f(t) - f(0))/(1 - \mathrm{e}^{it})$. Comme f est Lipschitz et $|1 - \mathrm{e}^{it}\,| \ge 2t/\pi$, la fonction g est bornée, donc $g \in \mathrm{L}_2$, ce qui entraîne que les coefficients de Fourier de g tendent vers 0. Or nous avions

$$f_\mathrm{N}(0) - f(0) = c_\mathrm{N}(g) - c_{-\mathrm{N}-1}(g)$$

qui tend donc vers 0 quand $\mathrm{N} \to +\infty$. Le raisonnement est identique pour montrer que $f_\mathrm{N}(s) \to f(s)$, pour tout $s \in \mathbb{R}$.

//

3.7. Transformation de Fourier

Pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R})$ on définit la transformée de Fourier $\widehat{f}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(t) = \int_\mathbb{R} f(x)\,\mathrm{e}^{-ixt}\ dx.$$

On définit ainsi une fonction $\widehat{f}$ sur $\mathbb{R}$; il est clair que $\widehat{f}$ est bornée ($|\widehat{f}(t)| \le \|f\|_1$) et il est facile de voir que $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (employer le théorème de convergence dominée).

On va voir comment cette transformation se comporte quand on modifie f au moyen de certaines opérations élémentaires. Si $a \in \mathbb{R}$ et si on remplace f par la fonction translatée f_a définie par $f_a(x) = f(x-a)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, un changement de variable immédiat donne

$$\text{(T)} \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f_a}(t) = \mathrm{e}^{-iat}\,\widehat{f}(t).$$

Si on remplace f par la dilatée $f_{[\lambda]}$ définie pour $\lambda > 0$ par $f_{[\lambda]}(x) = f(\lambda x)$, on obtient par un autre changement de variable évident

$$\text{(D)} \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f_{[\lambda]}}(t) = \frac{1}{\lambda}\,\widehat{f}\Big(\frac{t}{\lambda}\Big).$$

Ces opérations de dilatation s'appellent aussi *changement d'échelle.*

On a le résultat suivant (préliminaire à la formule d'inversion de Fourier) :

Lemme 3.7.1. *Si $a > 0$, si f est continue à support compact sur $\mathbb{R}$, et si f est linéaire sur chacun des intervalles $[(j-1)a, ja]$ pour $j \in \mathbb{Z}$, alors $\widehat{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et on a*

$$\text{(I)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)\, \mathrm{e}^{ixt}\, dt.$$

Démonstration. On vérifie facilement que si une fonction f vérifie la formule (I), alors les translatées de f, les dilatées de f et les combinaisons linéaires de translatées ou dilatées de f vérifient encore la formule (I). Pour démontrer le lemme, on peut d'abord se ramener à $a = 1$ par dilatation. Pour chaque $j \in \mathbb{Z}$ soit f_j la fonction continue nulle hors de $[j-1, j+1]$, égale à 1 au point j et linéaire sur les deux intervalles $[j-1, j]$ et $[j, j+1]$ (on a donc $f_j(x) = 1 - |j - x|$ sur $[j-1, j+1]$). On observe que toute fonction f continue à support compact sur $\mathbb{R}$, linéaire sur chaque intervalle $[j-1, j]$ est combinaison linéaire des fonctions f_j ; par linéarité et translation il suffit finalement de montrer le lemme pour f_0. Un calcul élémentaire (avec intégration par parties) montre que

$$\widehat{f}_0(t) = 2 \int_0^1 (1-x)\cos(xt)\, dx = 4\, \frac{\sin^2(t/2)}{t^2} \cdot$$

On voit que $\widehat{f}_0$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et la même chose sera vraie pour toutes les combinaisons linéaires de translatées ou dilatées, d'après les formules (T) et (D). On vérifie ensuite, par des calculs de résidus, ou bien par des calculs trigonométriques un peu pénibles, que

$$\int_{\mathbb{R}} 4\, \frac{\sin^2(t/2)}{t^2}\, \mathrm{e}^{ixt}\, dt = 2\pi f_0(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

//

On déduit du lemme, sous la même hypothèse sur f, en appliquant Fubini, justifié par l'intégrabilité sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction $(x, t) \to \overline{f(x)}\, \widehat{f}(t)$:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f(x)}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)\, \mathrm{e}^{ixt}\, \overline{f(x)}\, dx\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)\overline{\widehat{f}(t)}\, dt$$

c'est à dire que pour une telle fonction f, on a $\|\widehat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \|f\|_2$.

L'espace vectoriel $\mathrm{X} \subset \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ formé des fonctions continues à support compact et linéaires par morceaux est dense dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, et l'application $f \to \widehat{f}$ est continue de X, muni de la norme L_2, à valeurs dans L_2. Il existe donc un prolongement linéaire continu $\mathcal{F}$ à $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$; en fait d'après ce qui précède $\mathrm{U} = (2\pi)^{-1/2}\mathcal{F}$ est une isométrie pour la norme L_2.

Il reste un petit point idiot à vérifier : si $f \in \mathrm{L}_1 \cap \mathrm{L}_2$, la classe de la fonction continue bornée $\widehat{f}$ coïncide bien avec la classe $\mathcal{F}(f)$ définie par prolongement à partir de X ; en effet, si $f \in \mathrm{L}_1 \cap \mathrm{L}_2$, on peut trouver une suite $(f_n) \subset \mathrm{X}$ telle que f_n tende vers f pour la norme L_1 **et** pour la norme L_2 (on pourra répéter les étapes de la section 3.2) ; alors $\widehat{f}_n$ converge uniformément vers $\widehat{f}$ et en norme L_2 vers $\mathcal{F}(f)$, d'où le résultat.

La formule inverse de Fourier du lemme précédent donne facilement que toute fonction de X est une transformée de Fourier, donc U est une isométrie à image dense, donc une isométrie surjective de $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ sur lui-même. De plus, le lemme d'inversion montre que, sur le sous-espace dense $\mathcal{F}(\mathrm{X})$, l'inverse de la transformation de Fourier est donnée par $\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = (2\pi)^{-1}\mathcal{F}(f)(-x)$. Il en résulte que cette relation est vraie pour toute $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$: désignons par σ l'isométrie de $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ définie par $(\sigma h)(x) = h(-x)$ pour toute $h \in \mathrm{L}_2$; on aura

$$\forall f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}), \quad \mathcal{F}^{-1}(f) = \frac{1}{2\pi}\, \sigma \circ \mathcal{F}(f).$$

La transformée de Fourier d'une fonction f de $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ ne peut pas en général s'écrire directement par la formule intégrale de Fourier (l'intégrale n'est peut-être pas absolument convergente), mais on peut toujours dire que f est la limite dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ de la suite $f_n = \mathbf{1}_{[-n,n]}f$, donc $\mathcal{F}(f)$ est la limite dans L_2 des fonctions

$$t \to \int_{-n}^{n} f(x)\, \mathrm{e}^{-ixt}\, dx.$$

Arrivé à ce point, on peut améliorer l'énoncé de notre Fourier inverse. Cela demande un travail supplémentaire que nous ne ferons pas ici.

Proposition 3.7.2. *Si f et $\widehat{f}$ sont dans $\mathrm{L}_1(\mathbb{R})$, la fonction f "est" continue et on a*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)\, \mathrm{e}^{ixt}\, dt.$$

On peut donner une démonstration directe et instructive de la formule d'inversion de Fourier, mais qui ne s'appliquera qu'aux fonctions f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, à support dans un intervalle compact $[-a, a]$.

Fixons $x \in \mathbb{R}$; soit N un entier quelconque tel que $\mathrm{N}\,\pi > \max(a, |x|)$; on va appliquer à la restriction de f à l'intervalle $[-\mathrm{N}\,\pi, \mathrm{N}\pi]$ la théorie des séries de Fourier, moyennant un petit changement de normalisation. Dans l'espace $\mathrm{L}_2([-\mathrm{N}\,\pi, \mathrm{N}\,\pi], \mu_\mathrm{N})$, où μ_N est la probabilité $dx/(2\pi\mathrm{N})$ sur l'intervalle $[-\mathrm{N}\,\pi, \mathrm{N}\,\pi]$, on considère la suite orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par $e_n(x) = \mathrm{e}^{inx/\mathrm{N}}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $|x| \le \mathrm{N}\,\pi$. Les coordonnées $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de f dans cette base sont données par

$$c_n = \int_{-\mathrm{N}\pi}^{\mathrm{N}\pi} f(x)\overline{e_n(x)}\, \frac{dx}{2\pi\mathrm{N}} = \frac{1}{2\pi\mathrm{N}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{e}^{-inx/\mathrm{N}}\, dx = \frac{1}{2\pi\mathrm{N}}\, \widehat{f}(n/\mathrm{N}).$$

D'après le théorème 6.1, on sait que

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n(x) = \frac{1}{2\pi\mathrm{N}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n/\mathrm{N})\, \mathrm{e}^{inx/\mathrm{N}}.$$

Pour conclure, il nous reste à voir que

$$\lim_{\mathrm{N}} \frac{1}{2\pi\mathrm{N}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n/\mathrm{N})\, \mathrm{e}^{inx/\mathrm{N}} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)\, \mathrm{e}^{ixt}\, dt.$$

Si la somme en n s'étendait de $-\mathrm{NT}$ à NT pour un entier T fixé, cette convergence serait le résultat classique de convergence des sommes de Riemann pour une fonction continue sur un intervalle compact $[-\mathrm{T}, \mathrm{T}]$. Pour traiter le cas présent, il nous faut un petit lemme, dont la démonstration est laissée en exercice pour le lecteur.

Lemme. *Si g est continue sur $\mathbb{R}$ et si $|g(t)| \le \min(1, t^{-2})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a*

$$\int_{\mathbb{R}} g(t)\, dt = \lim_{\mathrm{N}} \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(n/\mathrm{N}).$$

Il reste à voir que $g(t) = \widehat{f}(t)\, \mathrm{e}^{ixt}$ vérifie les hypothèses du lemme. On sait d'abord que g est continue sur $\mathbb{R}$, et bornée par $\|f\|_{\mathrm{L}_1(\mathbb{R})}$. Ensuite, deux intégrations par parties donnent $\widehat{f''}(t) = -t^2\widehat{f}(t)$, de sorte que $|g(t)| = |\widehat{f}(t)| \le t^{-2}\, \|f''\|_{\mathrm{L}_1(\mathbb{R})}$. Il en résulte que $|g(t)| \le \mathrm{C}\, \min(1, t^{-2})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, avec $\mathrm{C} = \max(\|f\|_{\mathrm{L}_1(\mathbb{R})}, \|f''\|_{\mathrm{L}_1(\mathbb{R})})$.