8. Quelques classes d'opérateurs

8.1. Compacité dans un espace de Banach

Rappelons qu'une partie A d'un espace topologique séparé X est dite *relativement compacte* dans X si son adhérence $\overline{A}$ dans X est compacte. Une partie A d'un espace métrique (X, d) est dite *précompacte* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de A par des parties de diamètre $\leq \varepsilon$. Cela revient à dire que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier N et des points $x_1, \ldots, x_N \in X$ tels que A soit contenu dans la réunion des boules $B(x_i, \varepsilon)$, $i = 1, \ldots, N$.

Théorème 8.1.1. *Dans un espace métrique complet* (X, d)*, une partie* A *est relativement compacte si et seulement si elle est précompacte. En particulier, un espace métrique est compact si et seulement s'il est précompact et complet.*

Démonstration. Si $\overline{A}$ est compacte dans X, il est facile de montrer qu'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un ensemble fini $x_1, \ldots, x_N$ de points de A tel que A soit recouvert par les boules $B(x_i, \varepsilon)$, $1 \leq i \leq N$.

Inversement supposons A précompact et soit (x_n) une suite de points de $\overline{A}$. On va trouver une sous-suite (x_{n_k}) de Cauchy, donc convergente puisque X est complet. On construit à cet effet une suite décroissante (M_k) de sous-ensembles infinis de $\mathbb{N}$ tels que $d(x_m, x_n) \leq 2^{-k}$ pour tous $m, n \in M_k$; il suffit ensuite d'appliquer le procédé de la sous-suite diagonale pour obtenir une sous-suite de Cauchy.

Supposons donc M_k choisi ; puisque A est précompact, il existe un ensemble fini $B \subset X$ tel que tout point x de A vérifie $d(x, y) < 2^{-k-2}$ pour au moins un point $y \in B$. Il en résulte que $\overline{A}$ est contenu dans la réunion finie de boules fermées $\{x \in X : d(x, y) \leq 2^{-k-2}\}$, pour $y \in B$; en particulier l'ensemble infini M_k est recouvert par la famille **finie** des ensembles $N_y = \{m \in M_k : d(x_m, y) \leq 2^{-k-2}\}$, indexée par les points $y \in B$; il existe donc au moins un $y_0 \in B$ tel que l'ensemble $M_{k+1} = N_{y_0} \subset M_k$ soit infini. Si $m, n \in M_{k+1}$, on aura

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, y_0) + d(y_0, x_n) \leq 2 \,.\, 2^{-k-2}.$$

//

Notons une conséquence facile : pour qu'une partie A d'un espace métrique complet X soit relativement compacte, il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte K_ε de X telle que tout point de A soit à une distance $< \varepsilon$ de l'ensemble K_ε :

$$\forall x \in A, \quad d(x, K_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Dans le cas d'un sous-ensemble A d'un espace de Banach E, il est agréable de retenir un critère qui utilise le caractère vectoriel de l'espace ambiant : pour que l'adhérence de A soit compacte dans l'espace de Banach E, il faut et il suffit que A vérifie les deux conditions suivantes :

a. l'ensemble A est borné ;

b. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace vectoriel $L_\varepsilon \subset E$ *de dimension finie* tel que tout point de A soit à une distance $< \varepsilon$ de L_ε :

$$\forall x \in A, \quad \mathrm{dist}(x, L_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Si l'adhérence de A est compacte il est facile de vérifier que le critère est satisfait : en effet $\overline{\mathrm{A}}$ est borné parce que compact (la fonction continue $x \to \|x\|$ atteint son maximum sur le compact $\overline{\mathrm{A}}$) et la deuxième condition est évidemment impliquée par la précompacité : il suffit de prendre l'espace vectoriel L_ε engendré par un ensemble fini F_ε qui approche A à moins de ε.

Dans l'autre direction, supposons les deux conditions du critère vérifiées, et montrons que A est approchable arbitrairement bien par des compacts de E ; soit M une borne pour les normes des éléments de A ; soient $\varepsilon > 0$ et L_ε un sous-espace vectoriel de dimension finie qui approche A à moins de ε. Désignons par K_ε le compact de E formé par les points de L_ε de norme $\le \mathrm{M} + \varepsilon$. Si $x \in \mathrm{A}$, il existe $y \in \mathrm{L}_\varepsilon$ tel que $\|x - y\| \le \varepsilon$; puisque $\|x\| \le \mathrm{M}$, on aura $\|y\| \le \mathrm{M} + \varepsilon$, d'où $y \in \mathrm{K}_\varepsilon$, et le résultat est démontré.

Proposition 8.1.2. *Si* K_1 *et* K_2 *sont compacts dans l'espace de Banach* E, *l'ensemble* $\mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_2$ *est compact ; si* A_1 *et* A_2 *sont relativement compacts dans l'espace de Banach* E, *l'ensemble* $\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2$ *est relativement compact dans* E.

Démonstration. Il est clair que $\mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_2$ est borné. Si L_j, $j = 1, 2$, est un sous-espace vectoriel de dimension finie qui approche K_j à moins de $\varepsilon/2$, il est facile de vérifier que le sous-espace de dimension finie $\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2$ approche $\mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_2$ à moins de ε. De plus $\mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_2$ est fermé, donc compact, comme image du compact $\mathrm{K}_1 \times \mathrm{K}_2$ par l'application continue $(x, y) \to x + y$. La deuxième affirmation résulte facilement de la première, car l'adhérence de la somme $\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2$ est contenue dans $\overline{\mathrm{A}_1} + \overline{\mathrm{A}_2}$.

//

Théorème d'Ascoli

Un ensemble A de fonctions scalaires sur un espace topologique X est dit *équicontinu au point* $t \in \mathrm{X}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de t dans lequel **toutes** les fonctions de A sont proches à ε près de leur valeur au point t,

$$\forall f \in \mathrm{A},\ \forall s \in \mathrm{V}, \quad |f(s) - f(t)| < \varepsilon.$$

Lorsque X est un espace métrique compact (K, d), on montre que si A est équicontinu en tout point t de K, alors A est *uniformément équicontinu*, c'est à dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute fonction $f \in \mathrm{A}$ et tous $s, t \in \mathrm{K}$,

$$\big(d(s,t) < \delta\big) \Rightarrow |f(s) - f(t)| < \varepsilon.$$

Théorème 8.1.3. *Soient* (K, d) *un espace métrique compact et* A *un sous-ensemble de* $\mathrm{C}(\mathrm{K})$ *; l'ensemble* A *est relativement compact dans* $\mathrm{C}(\mathrm{K})$ *si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *l'ensemble* A *est borné (pour la norme de* $\mathrm{C}(\mathrm{K})$*) ;*
2. *l'ensemble* A *est uniformément équicontinu.*

Démonstration. On va montrer la partie la plus intéressante, celle qui dit que les conditions **1** + **2** entraînent que A est relativement compact. On doit montrer pour l'ensemble A les conditions (a) et (b) du critère de compacité ; comme (a) est identique à **1**, il suffit de montrer que **2** entraîne (b). On se donne donc $\varepsilon > 0$ et on cherche un sous-espace vectoriel

L_ε de dimension finie dans $C(K)$, tel que toute fonction de A soit à distance (uniforme) $< \varepsilon$ d'un point de L_ε. A cette valeur de ε correspond par la propriété **2** une valeur de $\delta > 0$ telle que $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$ pour toute $f \in A$ et tous $s, t \in K$ tels que $d(s,t) < \delta$. Cette propriété de A signifie que pour toute fonction $f \in A$, le module de continuité ω_f vérifie $\omega_f(\delta) \leq \varepsilon$. Par compacité, on peut trouver un recouvrement ouvert fini de K par des boules $U_i = B(t_i, \delta)$, $i = 1, \ldots, N$. On a vu à la section 3.1, relation (P), que si L_ε désigne l'espace de dimension finie engendré par les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ d'une partition de l'unité subordonnée au recouvrement (U_i), on a

$$d(f, L_\varepsilon) \leq \omega_f(\delta)$$

pour toute $f \in C(K)$, donc $d(f, L_\varepsilon) \leq \omega_f(\delta) \leq \varepsilon$ pour toute fonction $f \in A$, et la condition (b) est vérifiée.

//

8.2. Applications linéaires compactes

Définition 8.2.1. Soient E et F deux espaces de Banach ; une application linéaire continue $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est dite *compacte* si l'image $T(B_E)$ par l'application T de la boule unité fermée B_E de l'espace E est relativement compacte (en norme) dans F. On note $\mathcal{K}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires compactes de E dans F. On pose $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E, E)$.

Proposition 8.2.1. *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach ; l'ensemble* $\mathcal{K}(E, F)$ *est un sous-espace vectoriel fermé de* $\mathcal{L}(E, F)$.

Soient E, F *et* G *des espaces de Banach,* $S \in \mathcal{L}(E, F)$ *et* $T \in \mathcal{L}(F, G)$ *; si* S *ou* T *est compacte alors* TS *est compacte. En particulier,* $\mathcal{K}(E)$ *est un idéal bilatère de* $\mathcal{L}(E)$.

Démonstration. Il est clair que si $T \in \mathcal{K}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda T \in \mathcal{K}(E, F)$. Soient maintenant T_1 et T_2 deux applications linéaires compactes de E dans F, et considérons les ensembles $A_1 = T_1(B_E)$, $A_2 = T_2(B_E)$ et $A = (T_1 + T_2)(B_E)$; il est clair que A est contenu dans $A_1 + A_2$, donc il est relativement compact d'après la proposition 1.2. Ceci montre que $\mathcal{K}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$.

Supposons que $T \in \mathcal{L}(E, F)$ soit adhérent à $\mathcal{K}(E, F)$. Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver S compacte telle que $\|T - S\| < \varepsilon$; il en résulte que tout point de $T(B_E)$ est approché à ε près par un point du compact $K_\varepsilon = \overline{S(B_E)}$, donc $\overline{T(B_E)}$ est compact.

Montrons pour finir les propriétés de composition. Supposons $S \in \mathcal{L}(E, F)$ compacte ; si $K \subset F$ est compact et contient l'image $S(B_E)$, alors $T(K)$ est compact et contient l'image $TS(B_E)$, donc TS est compacte. Pour l'autre cas, remarquons que l'image $S(B_E)$ est contenue dans la boule de F de centre 0 et de rayon $r = \|S\|$; si $K \subset G$ est compact et contient l'image par T de la boule unité de F, alors $r\,K$ est compact et contient l'image par TS de B_E.

//

Exemples 8.2.2.

1. Il est clair que tout opérateur T de rang fini est compact : en effet, l'ensemble $T(B_E)$ est alors un ensemble borné d'un espace vectoriel de dimension finie. D'après le résultat précédent, toute limite T en norme d'opérateur d'une suite (T_n) d'opérateurs de rang fini est compacte. C'est une méthode assez efficace pour vérifier que certains

opérateurs sont compacts ; on montre par exemple que si $c_n \to 0$, l'opérateur Δ_c de ℓ_p dans ℓ_p défini par $\Delta_c((x_n)) = (c_n x_n)$ est compact :

on commence par remarquer que la norme de Δ_c dans $\mathcal{L}(\ell_p)$ est majorée par $\|c\|_\infty$ (elle est en fait égale à $\|c\|_\infty$). Ensuite, pour tout entier N on considère la suite $c^{(\mathrm{N})}$ telle que $c_n^{(\mathrm{N})} = c_n$ si $n \le \mathrm{N}$ et $c_n^{(\mathrm{N})} = 0$ sinon ; l'opérateur $\mathrm{T_N} = \Delta_{c^{(\mathrm{N})}}$ est de rang fini, et $\|\Delta_c - \mathrm{T_N}\| = \|\Delta_{c-c^{(\mathrm{N})}}\|$ est majoré par $\|c - c^{(\mathrm{N})}\|_\infty = \sup_{n>\mathrm{N}} |c_n|$ qui tend vers 0 parce que la suite (c_n) tend vers 0.

2. Pour toute fonction f intégrable sur $[0,1]$ définissons la fonction continue $\mathrm{V}(f)$ comme dans l'exemple 7.2.2,

$$(\mathrm{V}f)(t) = \int_0^t f(s)\,ds\,;$$

pour tout p tel que $1 \le p \le +\infty$, désignons par V_p l'opérateur de $\mathrm{L}_p = \mathrm{L}_p(0,1)$ dans $\mathrm{C}([0,1])$ qui associe à $f \in \mathrm{L}_p$ la fonction continue $\mathrm{V}(f)$; alors V_p est compact lorsque $p > 1$:

on voit en effet en appliquant Hölder que $|\mathrm{V}(f)(s) - \mathrm{V}(f)(t)| \le |s-t|^{1/q}$ pour toute $f \in \mathrm{B}_{\mathrm{L}_p}$ (où $1/p + 1/q = 1$), donc $\mathrm{A} = \mathrm{V}_p(\mathrm{B}_{\mathrm{L}_p})$ est borné dans $\mathrm{C}([0,1])$ et équicontinu (ici $q < +\infty$, donc $1/q > 0$ et la fonction $\delta(t) = t^{1/q}$ tend vers 0 avec t), donc A est relativement compact dans $\mathrm{C}([0,1])$ par Ascoli.

Proposition 8.2.2. *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach ; si* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *est compacte, sa transposée* ${}^t\mathrm{T}$ *est compacte de* F^* *dans* E^*.

Démonstration. Soit $\mathrm{K} \subset \mathrm{F}$ un compact qui contienne $\mathrm{T}(\mathrm{B_E})$; on munit K de la distance induite par F, c'est à dire $d(y_1,y_2) = \|y_1 - y_2\|_\mathrm{F}$. Considérons l'application linéaire $\mathrm{V} : \mathrm{F}^* \to \mathrm{C}(\mathrm{K})$ qui associe à chaque $y^* \in \mathrm{F}^*$ la fonction $\mathrm{V}(y^*) : y \in \mathrm{K} \to y^*(y)$. Si M est le maximum de $\|y\|$ lorsque y varie dans K, on voit que $\|\mathrm{V}(y^*)\|_{\mathrm{C(K)}} \le \mathrm{M}\,\|y^*\|$, donc V est bornée. Par ailleurs si $x \in \mathrm{B_E}$, on a $\mathrm{T}(x) \in \mathrm{K}$, donc

$$|({}^t\mathrm{T}(y^*))(x)| = |y^*(\mathrm{T}(x))| = |\mathrm{V}(y^*)(\mathrm{T}(x))| \le \|\mathrm{V}(y^*)\|_{\mathrm{C(K)}}$$

ce qui montre en prenant le sup sur $x \in \mathrm{B_E}$ que $\|{}^t\mathrm{T}(y^*)\| \le \|\mathrm{V}(y^*)\|_{\mathrm{C(K)}}$. Soit $\mathcal{G} \subset \mathrm{C(K)}$ l'ensemble $\mathrm{V}(\mathrm{B}_{\mathrm{F}^*})$, formé de toutes les fonctions sur K de la forme $\mathrm{V}(y^*)$, où y^* varie dans la boule unité de F^*. Cet ensemble $\mathcal{G}$ est uniformément borné et formé de fonctions uniformément lipschitziennes sur (K,d) : on a en effet pour toute fonction $f = \mathrm{V}(y^*) \in \mathcal{G}$, et $y_1, y_2 \in \mathrm{K}$

$$|f(y_1) - f(y_2)| = |y^*(y_1) - y^*(y_2)| = |y^*(y_1 - y_2)| \le d(y_1,y_2).$$

Il résulte du théorème d'Ascoli que $\mathcal{G}$ est relativement compact dans C(K). Soit maintenant (y_n^*) une suite dans $\mathrm{B}_{\mathrm{F}^*}$, et montrons que la suite $({}^t\mathrm{T}(y_n^*)) \subset \mathrm{E}^*$ admet une sous-suite de Cauchy (en norme) dans E^* ; d'après ce qui précède, il existe une sous-suite $(\mathrm{V}(y_{n_k}^*))$ qui converge uniformément dans C(K), donc qui est de Cauchy dans C(K). Mais on a vu que $\|{}^t\mathrm{T}(y_{n_k}^*) - {}^t\mathrm{T}(y_{n_l}^*)\| \le \|\mathrm{V}(y_{n_k}^*) - \mathrm{V}(y_{n_l}^*)\|_{\mathrm{C(K)}}$, ce qui implique que $({}^t\mathrm{T}(y_{n_k}))$ est de Cauchy dans E^*.

//

Proposition 8.2.3. *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *; notons* $\mathrm{B_E}$ *la boule unité fermée de* E.

(i) *Supposons* T *compact ; alors* T *est continu de* $\mathrm{B_E}$*, munie de la topologie faible, dans* F *muni de la topologie de la norme ; en conséquence, pour toute suite* (x_n) *de points de* E *convergeant faiblement vers* 0 *la suite* $(\mathrm{T}(x_n))$ *converge en norme vers* 0.

(ii) *Supposons* E *réflexif ; alors* T *est compact si et seulement si : pour toute suite* (x_n) *de points de* E *convergeant faiblement vers* 0*, la suite* $(\mathrm{T}(x_n))$ *converge en norme vers* 0 *; de plus, l'ensemble* $\mathrm{T}(\mathrm{B_E})$ *est compact (en norme) dans* F *lorsque* T *est compact.*

Démonstration. Supposons T compact, et soit K un compact de F contenant $\mathrm{T}(\mathrm{B_E})$; l'identité, de K muni de la topologie de la norme, dans K muni de la topologie faible est continue ; comme K est compact, c'est un homéomorphisme. Comme T est continu de $\mathrm{B_E}$ muni de la topologie faible dans K muni de la topologie faible, il en résulte que T est continu de $\mathrm{B_E}$ faible dans F muni de la norme. Si (x_n) est une suite qui converge faiblement vers 0 dans E, elle est bornée dans E (lemme 5.3.1), donc $(\mathrm{T}(x_n))$ tend vers 0 en norme par ce qui précède.

Lorsque E est réflexif, la boule $\mathrm{B_E}$ est faiblement compacte, donc son image $\mathrm{T}(\mathrm{B_E})$ est faiblement compacte dans F, donc faiblement fermée, donc fermée ; puisque $\mathrm{T}(\mathrm{B_E})$ est relativement compacte, elle est en fait compacte. Supposons encore E réflexif et que $(\mathrm{T}(x_n))$ converge vers 0 en norme dans F pour toute suite (x_n) qui tend faiblement vers 0_E ; soit (x_n) une suite dans $\mathrm{B_E}$; d'après le théorème 5.3.5, il existe une sous-suite (x_{n_k}) qui converge faiblement vers un point $x \in \mathrm{B_E}$; alors $(x_{n_k} - x)$ converge faiblement vers 0, donc $\mathrm{T}(x_{n_k}) - \mathrm{T}(x)$ converge en norme vers 0 d'après l'hypothèse ; on a ainsi montré que pour toute suite $(x_n) \subset \mathrm{B_E}$, il existe une sous-suite $(\mathrm{T}(x_{n_k}))$ qui converge en norme, donc T est compact.

//

Dans le cas où l'espace de départ est hilbertien, on peut donner des caractérisations plus précises de la compacité.

Théorème 8.2.4. *Soient* E *un espace de Hilbert,* F *un espace de Banach et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *; notons* $\mathrm{B_E}$ *la boule unité fermée de* E*. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *l'opérateur* T *est compact de* E *dans* F *;*

(ii) *l'ensemble* $\mathrm{T}(\mathrm{B_E})$ *est compact (en norme) dans* F *;*

(iii) *l'opérateur* T *est continu de* $\mathrm{B_E}$*, munie de la topologie faible, dans* F *muni de la topologie de la norme ;*

(iv) *pour toute suite* (x_n) *de points de* E *convergeant faiblement vers* 0*, la suite* $(\mathrm{T}(x_n))$ *converge en norme vers* 0 *;*

(v) *l'opérateur* T *est adhérent (en norme d'opérateur) à l'espace des applications linéaires continues de rang fini ;*

(vi) *pour tout système orthonormal* $(e_n)_{n\ge 0}$ *dans* E *on a* $\lim_n \|\mathrm{T}(e_n)\| = 0$.

Démonstration. Puisque E est réflexif, on sait que (i), (ii), (iii) et (iv) sont équivalents. De plus, (v) $\Rightarrow$ (i) en général, et on sait que (iv) $\Rightarrow$ (vi) parce que les suites orthonormées tendent faiblement vers 0 (exemples 5.3.1).

Supposons que (v) ne soit pas vérifiée. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que pour toute application linéaire continue de rang fini R on ait $\|\mathrm{T} - \mathrm{R}\| > \varepsilon$. Construisons alors par récurrence sur n un système orthonormal $(e_n)_{n\ge 0}$ tel que $\|\mathrm{T}(e_n)\| > \varepsilon$ pour tout

$n \geq 0$: comme $\|T\| > \varepsilon$, il existe $e_0 \in E$ tel que $\|e_0\| = 1$ et $\|T(e_0)\| > \varepsilon$; supposons e_k construit pour $k < n$ et soit P le projecteur orthogonal sur le sous-espace de E engendré par $\{e_k : k < n\}$; alors TP est de rang fini donc $\|T - TP\| > \varepsilon$; il existe donc $y_n \in E$ tel que $\|T(\mathrm{Id}_E - P)(y_n)\| > \varepsilon \, \|y_n\| \geq \varepsilon \, \|(\mathrm{Id}_E - P)(y_n)\|$; on pose alors $z_n = (\mathrm{Id}_E - P)(y_n)$, puis $e_n = \|z_n\|^{-1} z_n$. On a alors $\|T(e_n)\| = \|z_n\|^{-1} \|T(z_n)\| > \varepsilon$, donc (vi) n'est pas vérifiée. On a ainsi montré que $(vi) \Rightarrow (v)$.

//

8.3. Théorie spectrale des opérateurs compacts

Cette théorie est pour l'essentiel la création du mathématicien hongrois F. Riesz, aux alentours de 1910. Le théorème 4.4.2 (avec son corollaire) est l'un des points-clés de cette théorie.

Lemme 8.3.1. *Soit* E *un espace de Banach ; pour tout sous-espace vectoriel* L *de dimension finie de* E, *il existe un projecteur continu* P *de* E *sur* L, *c'est à dire qu'il existe un sous-espace fermé* F *tel que* $E = L \oplus F$.

Démonstration. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de L et soit $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale pour le dual L^* ; par le théorème de Hahn-Banach, on peut prolonger chaque forme linéaire e_j^* en une forme linéaire continue $x_j^* \in E^*$. Il suffit alors de poser

$$\forall x \in E, \quad P(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j^*(x) \, e_j,$$

et de poser pour finir $F = \ker(P)$.

//

Lemme 8.3.2. *Soit* $K \in \mathcal{L}(E)$ *un opérateur compact, et posons* $T = \mathrm{Id}_E - K$ *; si* F *est un sous-espace fermé de* E *tel que* T *soit injectif de* F *dans* E, *il existe une constante* $c > 0$ *telle que* $\|T(x)\| \geq c \, \|x\|$ *pour tout* $x \in F$ *; il en résulte que l'image* T(F) *est fermée.*

Démonstration. En cas contraire, on pourrait trouver une suite $(x_n) \subset F$ de vecteurs de norme 1 telle que $T(x_n) \to 0$. Puisque K est compact, on peut trouver une sous-suite (x_{n_k}) telle que $K(x_{n_k})$ converge ; mais $T(x_{n_k}) = x_{n_k} - K(x_{n_k})$ tend vers 0, donc x_{n_k} converge vers un vecteur $x \in F$ (puisque F est fermé) tel que $\|x\| = 1$, et à la limite $T(x) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse T injectif sur F.

Désignons par T_1 la restriction de T à F ; on a vu dans la proposition 7.3.1 que la minoration $\|T_1(x)\| \geq c\|x\|$ (pour tout $x \in F$, et avec $c > 0$) implique que $\mathrm{im}(T_1) = T(F)$ est fermée.

//

Proposition 8.3.3. *Soit* $K \in \mathcal{L}(E)$ *un opérateur compact, et posons* $T = \mathrm{Id}_E - K$ *; le noyau de* T *est de dimension finie et l'image* T(E) *est fermée.*

On remarquera, en utilisant la formule du binôme et la propriété d'idéal de $\mathcal{K}(E)$, que $T^n = (\mathrm{Id}_E - K)^n$ est de la forme $\mathrm{Id}_E - K_n$, avec K_n compact, donc les images de T^n sont fermées pour tout $n \geq 0$ (et leurs noyaux sont de dimension finie).

Démonstration. Le noyau de T est le sous-espace propre de l'opérateur compact K pour la valeur propre 1, il est donc de dimension finie d'après le théorème de Riesz (corollaire du théorème 4.4.2). Soit F un sous-espace fermé de E tel que $E = \ker(T) \oplus F$; alors T est injectif sur F, donc $T(E) = T(F)$ est fermé.

//

Lemme 8.3.4. *Si* F *et* G *sont deux sous-espaces vectoriels de* E, *avec* F *fermé et* $F \subset G$, $F \neq G$, *on peut trouver pour tout* $\varepsilon > 0$ *un vecteur* $y \in G$ *tel que* $\|y\| = 1$ *et* $d(y, F) > 1 - \varepsilon$.

Démonstration. Puisque $F \neq G$, on peut trouver un premier vecteur $y_0 \in G \setminus F$. Puisque F est fermé et $y_0 \notin F$, on a $\delta = d(y_0, F) > 0$. On peut trouver $x_0 \in F$ tel que $\alpha = \|y_0 - x_0\| < \delta/(1-\varepsilon)$. Alors $y = \alpha^{-1}(y_0 - x_0) \in G$ convient.

//

Lemme 8.3.5. *Soit* $K \in \mathcal{L}(E)$ *un opérateur compact, et posons* $T = \mathrm{Id}_E - K$ *; il n'existe pas de chaîne infinie* $(F_n)_{n \geq 0}$ *(resp :* $(F_n)_{n \leq 0}$*) de sous-espaces vectoriels fermés de* E *telle que*

$$F_n \subset F_{n+1}, \ F_n \neq F_{n+1} \ \text{ et } \ T(F_{n+1}) \subset F_n$$

pour tout $n \geq 0$ *(resp :* $n < 0$*).*

Démonstration. Traitons le cas $n \geq 0$, le cas $n < 0$ est identique. Supposons au contraire que $F_n \neq F_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$; d'après le lemme précédent, on peut trouver pour tout $n \geq 0$ un vecteur $x_{n+1} \in F_{n+1}$ tel que $\|x_{n+1}\| = 1$ et $\mathrm{dist}(x_{n+1}, F_n) > 1 - \varepsilon$. Puisque $T(F_{n+1}) \subset F_n \subset F_{n+1}$ et $K = \mathrm{Id}_E - T$, on a $K(F_{n+1}) \subset F_{n+1}$. Soient alors k, ℓ deux entiers tels que $0 < k < \ell$; le vecteur $T(x_\ell)$ est dans $F_{\ell-1}$ et $K(x_k) \in F_k \subset F_{\ell-1}$, donc $T(x_\ell) + K(x_k) \in F_{\ell-1}$, donc $\|x_\ell - (T(x_\ell) + K(x_k))\| \geq \mathrm{dist}(x_\ell, F_{\ell-1}) > 1 - \varepsilon$. Mais cette quantité est égale à $\|K(x_\ell) - K(x_k)\|$. L'image $K(B_E)$ contiendrait donc une suite infinie de points dont les distances mutuelles seraient $\geq 1 - \varepsilon$, ce qui contredirait la compacité de K.

//

Corollaire 8.3.6. *Soit* $K \in \mathcal{L}(E)$ *un opérateur compact, et posons* $T = \mathrm{Id}_E - K$ *; la suite croissante des noyaux* $(\ker(T^n))_{n \geq 0}$ *est stationnaire. La suite décroissante des images* $(\mathrm{im}(T^n))_{n \geq 0}$ *est stationnaire.*

Démonstration. Posons $F_n = \ker(T^n)$. On a bien F_n fermé, $F_n \subset F_{n+1}$ et de plus $T(F_{n+1}) \subset F_n$ pour tout $n \geq 0$; si la suite n'était pas stationnaire, elle contredirait le lemme précédent. Pour le cas des images on posera $F_{-n} = \mathrm{im}(T^n)$ pour $n \geq 0$; on a vu à la proposition 3 que toutes ces images sont fermées.

//

Corollaire 8.3.7. *Soit* $\mathrm{K} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *un opérateur compact, et posons* $\mathrm{T} = \mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{K}$ *; si* T *est surjectif, alors* $\ker(\mathrm{T}) = \{0\}$ *; si* T *est injectif, alors* $\mathrm{im}(\mathrm{T}) = \mathrm{E}$.

Démonstration. Si l'opérateur T est surjectif et si $\ker(\mathrm{T}) \neq \{0\}$, on montre par récurrence que $\ker(\mathrm{T}^n) \neq \ker(\mathrm{T}^{n+1})$ pour tout $n \geq 1$: si $x \in \ker(\mathrm{T}^{n+1}) \setminus \ker(\mathrm{T}^n)$, on a $\mathrm{T}^{n+1}(x) = 0$ et $\mathrm{T}^n(x) \neq 0$. Puisque T est surjectif, il existe y tel que $\mathrm{T}(y) = x$. Il en résulte que $\mathrm{T}^{n+2}(y) = \mathrm{T}^{n+1}(x) = 0$ mais $\mathrm{T}^{n+1}(y) = \mathrm{T}^n(x) \neq 0$. Ceci est impossible quand $\mathrm{T} = \mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{K}$, avec K compact, par le corollaire précédent.

Si T est injectif et $\mathrm{T}(\mathrm{E}) \neq \mathrm{E}$, on vérifie que $\mathrm{im}(\mathrm{T}^{n+1}) \neq \mathrm{im}(\mathrm{T}^n)$ pour tout $n \geq 0$, ce qui est à nouveau impossible quand $\mathrm{T} = \mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{K}$, avec K compact.

//

Si F est un sous-espace vectoriel fermé de E, on appelle *codimension* de F la dimension du quotient E/F (finie ou $+\infty$). Si F est de codimension finie n, on peut trouver un sous-espace vectoriel G de dimension n tel que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$, et pour tout sous-espace G' tel que $\dim(\mathrm{G}') > n$, on a $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}' \neq \{0\}$.

Théorème 8.3.8 : Alternative de Fredholm. *Soient* E *un espace de Banach et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *un opérateur borné de la forme* $\mathrm{T} = \mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{K}$, *avec* K *compact ; l'image de* T *est fermée et de codimension finie et l'on a*

$$\operatorname{codim} \mathrm{im}(\mathrm{T}) = \dim \ker(\mathrm{T}).$$

Pour un opérateur T à image fermée et à noyau de dimension finie, la différence $\dim \ker(\mathrm{T}) - \operatorname{codim} \mathrm{im}(\mathrm{T})$ s'appelle *l'indice* de l'opérateur T et se note $\mathrm{ind}(\mathrm{T})$. Le théorème dit que $\mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{K}$ est d'indice nul pour tout opérateur compact K.

Démonstration. On a vu que $\ker(\mathrm{T})$ est de dimension finie et $\mathrm{im}(\mathrm{T})$ fermée. On doit montrer de plus que $\dim \ker(\mathrm{T}) = \operatorname{codim} \mathrm{T}(\mathrm{E})$, c'est à dire que l'indice de T est nul. On va procéder par récurrence sur la dimension de $\ker(\mathrm{T})$. Si $\dim \ker(\mathrm{T}) = 0$, on sait que T est surjectif d'après le corollaire 7, donc l'indice est nul dans ce cas ; on suppose donc que n est un entier > 0 et que $\mathrm{ind}(\mathrm{T}') = 0$ pour tout opérateur $\mathrm{T}' = \mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{K}'$, où K' est compact et $\dim \ker(\mathrm{T}') < n$. Soit $\mathrm{T} = \mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{K}$ avec K compact et $\dim \ker(\mathrm{T}) = n > 0$; d'après le corollaire 7, on a $\mathrm{im}(\mathrm{T}) \neq \mathrm{E}$; soit donc $y_0 \notin \mathrm{im}(\mathrm{T})$; on note que $\mathbb{K} y_0 \oplus \mathrm{T}(\mathrm{E})$ est une somme directe. On va construire T' de la forme $\mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{K}'$ tel que $\mathrm{ind}(\mathrm{T}') = \mathrm{ind}(\mathrm{T})$ et $\dim \ker(\mathrm{T}') < \dim \ker(\mathrm{T})$; d'après l'hypothèse de récurrence, on aura $0 = \mathrm{ind}(\mathrm{T}') = \mathrm{ind}(\mathrm{T})$, ce qui donnera le résultat.

On écrit $\mathrm{E} = \ker(\mathrm{T}) \oplus \mathrm{E}_1$ en utilisant le lemme 1 ; soit $x_1, \ldots, x_n$ une base de $\ker(\mathrm{T})$. On définit un opérateur $\mathrm{T}' \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ en posant pour tout $x \in \mathrm{E}$, représenté sous la forme $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + y$, avec $y \in \mathrm{E}_1$

$$\mathrm{T}'(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + y) = \lambda_1 y_0 + \mathrm{T}(y).$$

Si $\mathrm{T}'(x) = 0$, il en résulte que $\mathrm{T}(y) = 0_\mathrm{E}$ et $\lambda_1 y_0 = 0_\mathrm{E}$, donc $y \in \ker(\mathrm{T}) \cap \mathrm{E}_1$ entraîne $y = 0_\mathrm{E}$; d'autre part $\lambda_1 y_0 = 0_\mathrm{E}$ entraîne $\lambda_1 = 0$ puisque le vecteur y_0 est non nul. Il en résulte que $\ker(\mathrm{T}') = \mathrm{Vect}(x_2, \ldots, x_n)$ est de dimension $n - 1$. Par ailleurs, l'opérateur $\mathrm{R} = \mathrm{T}' - \mathrm{T}$ est de rang un : en effet $(\mathrm{T}' - \mathrm{T})(x) = \lambda_1 y_0$ pour tout x, donc l'image de R est contenue dans $\mathbb{K} y_0$; on peut écrire par conséquent $\mathrm{T}' = \mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{K}'$ avec $\mathrm{K}' = \mathrm{K} - \mathrm{R}$ compact, et on a alors $\mathrm{ind}(\mathrm{T}') = 0$ d'après l'hypothèse de récurrence, ce qui montre déjà que $\operatorname{codim} \mathrm{im}(\mathrm{T}')$ est finie. Il est clair que $\mathrm{im}(\mathrm{T}') = \mathbb{K} y_0 \oplus \mathrm{T}(\mathrm{E})$ a exactement une dimension de plus que $\mathrm{T}(\mathrm{E})$, donc $\operatorname{codim} \mathrm{im}(\mathrm{T}) = \operatorname{codim} \mathrm{im}(\mathrm{T}') + 1$, et $\mathrm{ind}(\mathrm{T}) = \mathrm{ind}(\mathrm{T}') = 0$.

//

Formulation classique de l'alternative de Fredholm. A l'époque de l'article de Fredholm (1903), il n'y avait pas plus d'espaces de Banach que de théorie de Riesz des opérateurs compacts. Cependant, quelques années après, sous l'influence de F. Riesz, on est arrivé à peu de chose près à la formulation "classique" suivante : soit K un opérateur compact de E. On rappelle que ${}^t\mathrm{K}$ est compacte de E^* dans E^*. On a *l'alternative* suivante :

– ou bien les deux équations $x - \mathrm{K}(x) = y$, $x^* - {}^t\mathrm{K}(x^*) = y^*$ admettent pour tous seconds membres $y \in \mathrm{E}$, $y^* \in \mathrm{E}^*$ une solution unique $x \in \mathrm{E}$, $x^* \in \mathrm{E}^*$.

– ou bien les équations homogènes $x - \mathrm{K}(x) = 0$, $x^* - {}^t\mathrm{K}(x^*) = 0$ admettent un même nombre fini $k > 0$ de solutions indépendantes, $x_1, \ldots, x_k$ et $x_1^*, \ldots, x_k^*$. Dans ce cas, pour que l'équation $x - \mathrm{K}(x) = y$ admette une solution $x \in \mathrm{E}$, il faut et il suffit que $x_1^*(y) = x_2^*(y) = \cdots = x_k^*(y) = 0$, et pour que l'équation $x^* - {}^t\mathrm{K}(x^*) = y^*$ admette une solution $x^* \in \mathrm{E}^*$, il faut et il suffit que $y^*(x_1) = y^*(x_2) = \cdots = y^*(x_k) = 0$.

Pour ce point de vue classique, on pourra consulter le livre de F. Riesz (Leçons d'Analyse Fonctionnelle).

Théorème 8.3.9. *Soient* E *un espace de Banach complexe et* $\mathrm{K} \in \mathcal{K}(\mathrm{E})$ *un opérateur compact ; le spectre de* K *est fini ou formé d'une suite tendant vers* 0*. Chaque valeur* $\lambda \neq 0$ *dans* $\mathrm{Sp}(\mathrm{K})$ *est une valeur propre de* K*, de multiplicité finie.*

Démonstration. On va montrer que si $\lambda \neq 0$ est dans le spectre de K, alors λ est valeur propre de K et λ est isolé dans le spectre de K. En remplaçant K par $\lambda^{-1}\mathrm{K}$ on se ramène à traiter $\lambda = 1$. Posons $\mathrm{T} = \mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{K}$; si 1 n'est pas valeur propre de K, l'opérateur T est injectif, donc surjectif d'après le corollaire 7, donc $\mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{K}$ est inversible et 1 n'est pas dans le spectre de K. Supposons que $1 \in \mathrm{Sp}(\mathrm{K})$, donc 1 est valeur propre ; remarquons que $\mathrm{T}^n = (\mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{K})^n = \mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{K}_n$ avec K_n compact (utiliser la formule du binôme), donc on sait que $\dim \ker(\mathrm{T}^n) = \operatorname{codim} \operatorname{im}(\mathrm{T}^n)$ pour tout $n \geq 0$ (pour $n = 0$, c'est une évidence). On a vu qu'il existe un entier k tel que $\ker(\mathrm{T}^k) = \ker(\mathrm{T}^{k+1})$, et on peut prendre pour k le plus petit entier vérifiant cette propriété ; on a $k \geq 1$ puisque 1 est valeur propre de K ; alors $\ker(\mathrm{T}) \cap \operatorname{im}(\mathrm{T}^k) = \{0\}$, sinon $\ker(\mathrm{T}^k) \neq \ker(\mathrm{T}^{k+1})$; on a *a fortiori* $\ker(\mathrm{T}^k) \cap \operatorname{im}(\mathrm{T}^k) = \{0\}$, et d'après l'égalité dimension-codimension il en résulte que

$$\mathrm{E} = \ker(\mathrm{T}^k) \oplus \operatorname{im}(\mathrm{T}^k).$$

L'espace E se trouve décomposé en deux sous-espaces fermés T-invariants. La restriction T_2 de T à $\operatorname{im}(\mathrm{T}^k)$ est injective, donc c'est un isomorphisme de $\operatorname{im}(\mathrm{T}^k)$ sur $\operatorname{im}(\mathrm{T}^k)$ d'après le théorème 8. La restriction T_1 de T à $\ker(\mathrm{T}^k)$ est un endomorphisme en dimension finie, dont la seule valeur propre est 0 ; pour tout $\lambda \neq 0$, $\mathrm{T}_1 - \lambda$ est donc bijective de $\ker(\mathrm{T}^k)$ sur $\ker(\mathrm{T}^k)$, et pour λ assez petit, $\mathrm{T}_2 - \lambda$ est encore un isomorphisme ; il en résulte que $\mathrm{T} - \lambda$ est un isomorphisme pour $\lambda \neq 0$ et assez petit, ce qui signifie que 0 est isolé dans le spectre de T, ou encore que 1 est isolé dans le spectre de K. On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$ il y a un nombre fini de valeurs spectrales telles que $|\lambda| \geq \varepsilon$, ce qui permet de ranger les valeurs spectrales non nulles de K dans une suite qui tend vers 0, à moins que le spectre ne soit fini.

//

Théorème 8.3.10. *Pour toute application linéaire compacte normale* T *d'un espace de Hilbert complexe* H *dans lui-même, l'espace* H *est somme directe hilbertienne (orthogonale) de la famille des sous-espaces propres de* T*. Il en résulte que* H *admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de* T*.*

Démonstration. Commençons par une remarque : si E est un Hilbert complexe *non nul* et si S est normal compact sur E, il existe $x \neq 0$ dans E et $\mu \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{S}x = \mu x$. En effet, on peut appliquer la formule du rayon spectral à l'algèbre unitaire $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ (parce que $\mathrm{E} \neq \{0\}$) : il existe une valeur spectrale μ de S telle que $|\mu| = \rho(\mathrm{S}) = \|\mathrm{S}\|$ (proposition 7.2.3). Si $\mu = 0$, on a $\mathrm{S} = 0$ et tout vecteur $x \in \mathrm{E}$ non nul répond à la question. Si $\mu \neq 0$, on sait que μ est valeur propre d'après le théorème 9.

Soient H un espace de Hilbert complexe et $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ une application linéaire compacte normale ; soit K son spectre ; c'est un ensemble fini ou dénombrable. Pour $\lambda \in \mathrm{K}$ notons $\mathrm{E}_\lambda = \ker(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{H})$ l'espace propre de T associé. On va démontrer que les E_λ, $\lambda \in \mathrm{K}$, sont deux à deux orthogonaux, et que le sous-espace engendré par les E_λ, $\lambda \in \mathrm{K}$, est dense dans H. On pourra alors considérer la somme hilbertienne F des sous-espaces deux à deux orthogonaux (E_λ), et on aura $\mathrm{F} = \mathrm{H}$ d'après la densité de la somme des (E_λ).

On rappelle que $\ker \mathrm{S} = \ker \mathrm{S}^*$ quand S est normal ; comme $\mathrm{S} = \mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}$ est normal et $\mathrm{S}^* = \mathrm{T}^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{Id}$, on voit que $\mathrm{E}_\lambda = \ker(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}) = \ker(\mathrm{T}^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{Id})$; il en résulte que chaque E_λ est stable par T et par T^*. Si $x \in \mathrm{E}_\lambda$ et $y \in \mathrm{E}_\mu$ alors $\langle \mathrm{T}(x), y\rangle = \mu\langle x, y\rangle = \langle x, \mathrm{T}^* y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ ce qui montre que $\langle x, y\rangle = 0$ si $\lambda \neq \mu$: les sous-espaces propres de T sont donc deux à deux orthogonaux.

Notons F le sous-espace fermé de H engendré par les E_λ, pour λ valeur propre de T (ces espaces sont de dimension finie si $\lambda \neq 0$; le sous-espace $\mathrm{E}_0 = \ker \mathrm{T}$ peut être réduit à $\{0\}$, ou bien de dimension finie, ou infinie). Puisque chaque E_λ est stable par T et T^*, on a $\mathrm{T}(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$ et $\mathrm{T}^*(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$. Il s'ensuit que $\mathrm{T}(\mathrm{F}^\perp) \subset \mathrm{F}^\perp$ et $\mathrm{T}^*(\mathrm{F}^\perp) \subset \mathrm{F}^\perp$. Notons $\mathrm{T}_1 \in \mathcal{L}(\mathrm{F}^\perp)$ la restriction de T à l'orthogonal de F. Si on avait $\mathrm{E} = \mathrm{F}^\perp \neq \{0\}$, T_1 serait un opérateur normal compact sur E, qui aurait, d'après la remarque préliminaire, au moins un vecteur propre $x \in \mathrm{F}^\perp$, $x \neq 0$ et $\mathrm{T}_1(x) = \mathrm{T}(x) = \mu\, x$ pour un certain $\mu \in \mathbb{C}$; mais alors on devrait avoir $x \in \mathrm{F}$, puisque F contient tous les vecteurs propres de T ; on a donc $x \in \mathrm{F} \cap \mathrm{F}^\perp$ ce qui implique $x = 0_\mathrm{H}$, contradiction. On a donc bien $\mathrm{F} = \mathrm{H}$. Pour obtenir une base orthonormée de H formée de vecteurs propres de T, on rassemble des bases orthonormées de chaque espace E_λ, $\lambda \neq 0$, qui sont des bases finies, et s'il y a lieu, une base orthonormée du noyau E_0.

//

Remarque 8.3.1. Il s'agit ici d'un théorème qui demande que le corps de base soit $\mathbb{C}$. Cependant, si H est un espace de Hilbert réel et $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ un opérateur **hermitien** compact, il existe une base orthonormée de H formée de vecteurs propres de T.

8.4. Opérateurs de Hilbert-Schmidt

Lemme 8.4.1. *Soient* E *et* F *deux espaces de Hilbert,* B *une base hilbertienne de* E *et* B′ *une base hilbertienne de* F *; pour tout* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *on a :*

$$\sum_{b \in \mathrm{B}, b' \in \mathrm{B}'} |\langle b', \mathrm{T}(b)\rangle|^2 = \sum_{b \in \mathrm{B}} \|\mathrm{T}(b)\|^2 = \sum_{b' \in \mathrm{B}'} \|\mathrm{T}^*(b')\|^2$$

(valeur finie ≥ 0 ou bien $+\infty$). Cette quantité ne dépend pas des bases B *et* B′ *choisies.*

Démonstration. Pour $x \in \mathrm{E}$ et $y \in \mathrm{F}$ on a

$$\|x\|^2 = \sum_{b \in \mathrm{B}} |\langle x, b\rangle|^2, \quad \|y\|^2 = \sum_{b' \in \mathrm{B}'} |\langle b', y\rangle|^2,$$

d'où la première assertion. Il est clair que $\sum_{b\in\mathrm{B}} \|\mathrm{T}(b)\|^2$ ne dépend pas de B′ et que $\sum_{b'\in\mathrm{B}'} \|\mathrm{T}^*(b')\|^2$ ne dépend pas de B, d'où la deuxième assertion.

//

Pour $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ on pose $\|\mathrm{T}\|_2 = \big(\sum_{b\in\mathrm{B}} \|\mathrm{T}(b)\|^2\big)^{1/2}$ où B est une base hilbertienne quelconque de E. Posons $\mathcal{L}^2(\mathrm{E},\mathrm{F}) = \{\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) : \|\mathrm{T}\|_2 < +\infty\}$. D'après le point (*vi*) du théorème 2.4, tout $\mathrm{T} \in \mathcal{L}^2(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est compact.

Définition 8.4.1. Soient E et F deux espaces de Hilbert ; un opérateur $\mathrm{T} \in \mathcal{L}^2(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est dit de *Hilbert-Schmidt*.

Exemples 8.4.2.

1. Prenons d'abord $\mathrm{E} = \mathrm{F} = \mathbb{C}^n$. Un opérateur T est représenté par une matrice $(a_{i,j})$ dans la base canonique ; si (e_j) désigne la base canonique, on a $\|\mathrm{T}(e_j)\|^2 = \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|^2$, donc la norme Hilbert-Schmidt de T est égale à

$$\|\mathrm{T}\|_2 = \big(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}|^2\big)^{1/2}.$$

Si $\mathrm{E} = \mathrm{F} = \ell_2$, un opérateur T peut se représenter par une matrice infinie $(a_{i,j})$, et on voit de même que la norme Hilbert-Schmidt est égale à

$$\|\mathrm{T}\|_2 = \big(\sum_{i,j=0}^{+\infty} |a_{i,j}|^2\big)^{1/2}.$$

2. Soient (X, μ) et (Y, ν) deux espaces mesurés σ-finis et $\mathrm{K}(s,t)$ une fonction de carré intégrable sur $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$. On définit un opérateur $\mathrm{T_K}$ par

$$(\mathrm{T_K} f)(s) = \int_{\mathrm{Y}} \mathrm{K}(s,t) f(t)\, d\nu(t).$$

On montre que $\mathrm{T_K}$ est bien défini, et agit continûment de $\mathrm{L}_2(\mathrm{Y},\nu)$ dans $\mathrm{L}_2(\mathrm{X},\mu)$:

avec Cauchy-Schwarz, on a

$$|(\mathrm{T_K} f)(s)|^2 \leq \Big(\int_{\mathrm{Y}} |\mathrm{K}(s,t)|\, |f(t)|\, d\nu(t)\Big)^2 \leq \Big(\int_{\mathrm{Y}} |\mathrm{K}(s,t)|^2\, d\nu(t)\Big) \Big(\int_{\mathrm{Y}} |f(t)|^2\, d\nu(t)\Big)$$

ce qui donne en réintégrant

$$\int_{\mathrm{X}} |(\mathrm{T_K} f)(s)|^2\, d\mu(s) \leq \Big(\int_{\mathrm{X}\times\mathrm{Y}} |\mathrm{K}(s,t)|^2\, d\mu(s)\, d\nu(t)\Big) \Big(\int_{\mathrm{Y}} |f(t)|^2\, d\nu(t)\Big).$$

On trouve *a posteriori* que l'intégrale qui définit $\mathrm{T_K}$ est absolument convergente pour μ-presque tout s, et on voit que $\|\mathrm{T_K}\| \leq \|\mathrm{K}\|_2$.

Si $(f_n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de $\mathrm{L}_2(\mathrm{X},\mu)$ et $(g_n)_{n\geq 0}$ une base hilbertienne de $\mathrm{L}_2(\mathrm{Y},\nu)$, il en résulte que les fonctions $(s,t)\to f_m(s)g_n(t)$ (où m,n prennent toutes les valeurs entières ≥ 0) donnent une base orthonormée de l'espace $\mathrm{L}_2(\mathrm{X}\times\mathrm{Y},\mu\otimes\nu)$.

L'opérateur $\mathrm{T_K}$ est de Hilbert-Schmidt :

si on écrit

$$\mathrm{K}(s,t)=\sum_{m,n=0}^{+\infty} c_{m,n}f_m(s)\overline{g_n(t)},$$

on constate que $\mathrm{T_K}(g_p)=\sum_m c_{m,p}f_m$, donc $\|\mathrm{T_K}(g_p)\|^2=\sum_m |c_{m,p}|^2$, et ensuite

$$\sum_p \|\mathrm{T_K}(g_p)\|^2=\sum_{m,p}|c_{m,p}|^2=\|\mathrm{K}\|_2^2<+\infty.$$

On a donc vérifié que la norme Hilbert-Schmidt de $\mathrm{T_K}$ est *égale* à la norme L_2 du noyau K dans l'espace $\mathrm{L}_2(\mathrm{X}\times\mathrm{Y},\mu\otimes\nu)$. En particulier, l'application $\mathrm{K}\to\mathrm{T_K}$ est injective : si l'opérateur $\mathrm{T_K}$ est l'opérateur nul, le noyau K est nul $\mu\otimes\nu$-presque partout sur $\mathrm{X}\times\mathrm{Y}$.

Exercice 8.4.3. Montrer que la composition de deux opérateurs $\mathrm{T}_{\mathrm{K}_1}$ et $\mathrm{T}_{\mathrm{K}_2}$ de la forme précédente est un opérateur $\mathrm{T_K}$, avec

$$\mathrm{K}(s,t)=\int \mathrm{K}_1(s,u)\mathrm{K}_2(u,t)du.$$

On peut vérifier que l'adjoint de $\mathrm{T_K}$ est l'opérateur de noyau $\mathrm{K}^*(t,s)=\overline{\mathrm{K}(s,t)}$. Supposons que $\mathrm{X}=\mathrm{Y}$, $\mu=\nu$ et que K soit un *noyau hermitien*, c'est à dire que $\mathrm{K}(t,s)=\overline{\mathrm{K}(s,t)}$ pour tous $(s,t)\in\mathrm{X}^2$; il existe alors une base orthonormée (f_n) de $\mathrm{L}_2(\mathrm{X},\mu)$ formée de vecteurs propres de l'opérateur hermitien compact $\mathrm{T_K}$, c'est à dire telle que $\mathrm{T_K}(f_n)=\lambda_n f_n$ pour tout $n\geq 0$. Si on exprime le noyau K dans la base orthonormée de l'espace $\mathrm{L}_2(\mathrm{X}^2,\mu\otimes\mu)$ formée des fonctions $h_{m,n}(s,t)=f_m(s)\overline{f_n(t)}$, on obtient une expression $\mathrm{K}(s,t)=\sum_{m,n}c_{m,n}f_m(s)\overline{f_n(t)}$, et on voit que

$$\mathrm{T_K}(f_p)(s)=\sum_{m,n}c_{m,n}\int f_m(s)\overline{f_n(t)}f_p(t)\,dt=\sum_m c_{m,p}f_m(s)=\lambda_p f_p(s),$$

ce qui montre que $c_{p,p}=\lambda_p$, et les autres coefficients $c_{m,p}$, pour $m\neq p$ sont nuls. On voit donc que tout noyau hermitien K sur X^2 se représente sous la forme

$$\mathrm{K}(s,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda_n f_n(s)\overline{f_n(t)}$$

où les λ_n sont réels, et (f_n) une base orthonormée. La série converge **au sens de** L_2.

Proposition 8.4.3. *Soient* E, F *et* H *des espaces de Hilbert ; pour tout* $\mathrm{S}\in\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *et* $\mathrm{T}\in\mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{H})$ *on a :*

(*i*) $\|\mathrm{S}\|_2=\|\mathrm{S}^*\|_2$;

(*ii*) $\|\mathrm{TS}\|_2\leq\|\mathrm{T}\|\,\|\mathrm{S}\|_2$ *et* $\|\mathrm{TS}\|_2\leq\|\mathrm{T}\|_2\|\mathrm{S}\|$;

(*iii*) *si* S *ou* T *est un opérateur de Hilbert-Schmidt alors il en va de même pour* TS.

En particulier l'espace $\mathcal{L}^2(\mathrm{E})=\mathcal{L}^2(\mathrm{E},\mathrm{E})$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.