9. Calcul fonctionnel continu

L'un des objectifs du chapitre est de construire un homomorphisme isométrique φ_{T} de $\mathrm{C}(\mathrm{Sp}(\mathrm{T}))$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ lorsque T est un opérateur hermitien (borné) sur un espace de Hilbert complexe H.

9.1. Calcul fonctionnel polynomial

Cette section est de nature purement algébrique. On considère d'abord une algèbre unitaire A sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (quand on en viendra aux questions de spectre, on imposera $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ comme d'habitude). Soient

$$\mathrm{P} = c_0 + c_1 \mathrm{X} + \cdots + c_n \mathrm{X}^n$$

un polynôme de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $a \in \mathrm{A}$; on pose

$$\varphi_a(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(a) = c_0 1_{\mathrm{A}} + c_1 a + \cdots + c_n a^n \in \mathrm{A}.$$

Il est évident que $(\mathrm{P}+\mathrm{Q})(a) = \mathrm{P}(a)+\mathrm{Q}(a)$ et $(\lambda\mathrm{P})(a) = \lambda\mathrm{P}(a)$; l'application φ_a est donc linéaire ; si $\mathrm{Q} = \mathrm{X}^k$ on vérifie que $(\mathrm{PQ})(a) = \mathrm{P}(a)\mathrm{Q}(a)$ et on en déduit le cas général en décomposant Q en combinaison linéaire de monômes. On a obtenu :

Proposition 9.1.1. *Soient* A *une algèbre de Banach unitaire et* $a \in \mathrm{A}$ *; il existe un unique homomorphisme d'algèbres unitaires* φ_a *de* $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ *dans* A *tel que* $\varphi_a(\mathrm{X}) = a$ *; cet homomorphisme est donné par* $\varphi_a(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(a)$.

Remarque. Si P et Q sont deux polynômes, on a $\mathrm{P}(a)\mathrm{Q}(a) = (\mathrm{PQ})(a) = (\mathrm{QP})(a) = \mathrm{Q}(a)\mathrm{P}(a)$: tous les éléments de la forme $\mathrm{P}(a)$ commutent (pour a fixé). Si $ab = ba$, on en déduit que $\mathrm{P}(a)b = b\mathrm{P}(a)$.

Lemme 9.1.2. *Si* $a_1\, a_2 = a_2\, a_1$ *est inversible dans* A, *alors* a_1 *est inversible dans* A.

Démonstration. Il existe un élément c tel que $c(a_1a_2) = 1_{\mathrm{A}} = (a_1a_2)c$; on voit que a_1 est inversible à gauche et à droite : $1_{\mathrm{A}} = a_1(a_2c)$ et $1_{\mathrm{A}} = c(a_1a_2) = (ca_2)a_1$; il en résulte que $a_2c = ca_2$ est l'inverse de a_1 :

$$a_2c = (a_2c)(a_1a_2c) = a_2(ca_1a_2)c = a_2c.$$

//

Corollaire 9.1.3. *Si* $c, \mu_1, \ldots, \mu_k \in \mathbb{K}$ *et si l'élément* $c\,(a - \mu_1 1_{\mathrm{A}}) \ldots (a - \mu_k 1_{\mathrm{A}})$ *est inversible dans* A, *alors chaque* $a - \mu_j 1_{\mathrm{A}}$ *est inversible, pour* $j = 1, \ldots, k$.

Démonstration. Montrons le pour $a - \mu_1 1_{\mathrm{A}}$ par exemple ; considérons le produit $a_2 = c(a - \mu_2 1_{\mathrm{A}}) \ldots (a - \mu_k 1_{\mathrm{A}})$; alors $a_1 = a - \mu_1 1_{\mathrm{A}}$ et a_2 commutent, et a_1a_2 est inversible, donc a_1 est inversible.

//

Théorème 9.1.4 : Petit théorème spectral. *Soit* A *une algèbre de Banach unitaire* complexe *; pour tout* $a \in \mathrm{A}$, *on a*

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{P}(a)) = \mathrm{P}(\mathrm{Sp}(a)).$$

Démonstration. Posons $\mathrm{K} = \mathrm{Sp}(a)$, et supposons P non constant (ce cas particulier est évident). Puisqu'on est sur $\mathbb{C}$, on peut factoriser le polynôme $\mathrm{P} - \lambda$ sous la forme

$$\mathrm{P} - \lambda = c \prod_{i=1}^{k} (\mathrm{X} - \mu_i)$$

avec $c \neq 0$ et $k = \deg \mathrm{P} \geq 1$. Supposons d'abord que $\lambda \notin \mathrm{P}(\mathrm{K})$. Pour chaque racine μ_i de $\mathrm{P} - \lambda$ on a $\mathrm{P}(\mu_i) = \lambda$; puisque $\lambda \notin \mathrm{P}(\mathrm{K})$, chacun des μ_i est en dehors de K, donc chaque $a - \mu_i 1_{\mathrm{A}}$ est inversible, donc $\mathrm{P}(a) - \lambda 1_{\mathrm{A}} = c \prod_i (a - \mu_i 1_{\mathrm{A}})$ est inversible et $\lambda \notin \mathrm{Sp}(\mathrm{P}(a))$.

Si $\lambda \in \mathrm{P}(\mathrm{Sp}(a))$, il existe $z \in \mathrm{Sp}(a)$ tel que $\mathrm{P}(z) = \lambda$; le polynôme $\mathrm{P} - \lambda$ s'annule en z, donc z est l'une des racines (μ_j), par exemple $z = \mu_1$; puisque $\mu_1 = z \in \mathrm{Sp}(a)$, l'élément $a - \mu_1 1_{\mathrm{A}}$ est non inversible. Alors $\mathrm{P}(a) - \lambda 1_{\mathrm{A}} = c \prod_{i=1}^{k} (a - \mu_i 1_{\mathrm{A}})$ est non inversible d'après le corollaire qui précède, et $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{P}(a))$.

//

Exemples 9.1.1.

1. S'il existe une base orthonormée $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ d'un Hilbert H réel ou complexe et un opérateur borné $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ tel que $\mathrm{T}(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout $i \in \mathrm{I}$ (l'opérateur T est *diagonal* dans la base (e_i)), il est facile de voir que pour tout polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ l'opérateur $\mathrm{P}(\mathrm{T})$ est l'opérateur diagonal dont les coefficients diagonaux sont les $\mathrm{P}(\lambda_i)$.

2. Si on considère sur $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2(0,1)$ l'opérateur M_f de multiplication par $f \in \mathrm{L}_\infty(0,1)$, on voit que $\mathrm{P}(\mathrm{M}_f)$ est l'opérateur de multiplication par la fonction $t \in [0,1] \to \mathrm{P}(f(t))$, c'est à dire la multiplication par la fonction $\mathrm{P} \circ f$.

9.2. Calcul fonctionnel continu pour les opérateurs hermitiens

Polynômes et adjoints

Soient H un espace de Hilbert complexe et $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$; il résulte des propriétés des adjoints que $(\mathrm{T}^k)^* = (\mathrm{T}^*)^k$ pour tout entier $k \geq 0$. Si $\mathrm{P} = \sum_{j=0}^{n} c_j \mathrm{X}^j$ est un polynôme à coefficients complexes, on peut considérer le polynôme dont les coefficients sont les complexes conjugués des coefficients de P. On notera $\widetilde{\mathrm{P}} = \sum_{j=0}^{n} \overline{c}_j\, \mathrm{X}^j$ ce polynôme ; alors

$$(\mathrm{P}(\mathrm{T}))^* = \Bigl(\sum c_k \mathrm{T}^k\Bigr)^* = \sum \overline{c}_k (\mathrm{T}^*)^k = \widetilde{\mathrm{P}}(\mathrm{T}^*)$$

ce qui montre que l'adjoint de $\mathrm{P}(\mathrm{T})$ est $\widetilde{\mathrm{P}}(\mathrm{T}^*)$. On notera que la fonction polynomiale $z \in \mathbb{C} \to \widetilde{\mathrm{P}}(z)$ **n'est pas** la fonction complexe conjuguée de la fonction $z \to \mathrm{P}(z)$ (on a en fait $\widetilde{\mathrm{P}}(\overline{z}) = \overline{\mathrm{P}(z)}$).

Si T est normal, $\mathrm{P}(\mathrm{T})$ est normal : en effet, T^* commute avec $\mathrm{P}(\mathrm{T})$ puisque T^* commute avec T, puis $\widetilde{\mathrm{P}}(\mathrm{T}^*)$ commute avec $\mathrm{P}(\mathrm{T})$ pour la même raison. Si T est hermitien et si P est un polynôme à coefficients réels, alors $\mathrm{P}(\mathrm{T})$ est hermitien. Le résultat essentiel pour la suite est le suivant :

Lemme 9.2.1. *Si* H *est un espace de Hilbert complexe et si* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *est normal, on a*

$$\|\mathrm{P}(\mathrm{T})\| = \|\mathrm{P}\|_{\mathrm{C}(\mathrm{Sp}(\mathrm{T}))} = \max\{|\mathrm{P}(\lambda)| : \lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{T})\}.$$

pour tout polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$.

Démonstration. Soit $\mathrm{K} = \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$; on a vu dans le théorème 1.4 que le spectre de $\mathrm{P}(\mathrm{T})$ est $\mathrm{P}(\mathrm{K})$. Par ailleurs $\mathrm{P}(\mathrm{T})$ est normal, donc

$$\|\mathrm{P}(\mathrm{T})\| = \rho(\mathrm{P}(\mathrm{T})) = \max\{|z| : z \in \mathrm{Sp}(\mathrm{P}(\mathrm{T}))\} = \max\{|\mathrm{P}(\lambda)| : \lambda \in \mathrm{K}\}$$

d'après la proposition 7.2.3.

//

Remarque 9.2.1. Le résultat précédent est à peu près évident lorsque T est normal et compact. Dans ce cas, il existe une base orthonormée $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de H telle que $\mathrm{T}(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout i, et de plus pour tout $\varepsilon > 0$ il n'existe qu'un nombre fini d'indices $i \in \mathrm{I}$ tels que $|\lambda_i| \geq \varepsilon$. Supposons I infini dénombrable pour fixer les idées. L'opérateur $\mathrm{P}(\mathrm{T})$ est l'opérateur diagonal dont les coefficients diagonaux sont les $\mathrm{P}(\lambda_i)$, la norme de $\mathrm{P}(\mathrm{T})$ est donc le sup des $|\mathrm{P}(\lambda_i)|$, qui est majoré par le sup de $|\mathrm{P}|$ sur le spectre K de T puisque chaque λ_i est dans le spectre. Inversement, si λ est dans le spectre de T, ou bien λ est valeur propre de T, et λ est l'un des λ_i, donc $\|\mathrm{P}(\mathrm{T})\| \geq \|\mathrm{P}(\mathrm{T})(e_i)\| = |\mathrm{P}(\lambda_i)| = |\mathrm{P}(\lambda)|$, ou bien $\lambda = 0$ est limite d'une suite de λ_i, ce qui conduit au même résultat puisque P définit une fonction continue sur K. On a donc bien $\|\mathrm{P}(\mathrm{T})\| = \|\mathrm{P}\|_{\mathrm{C}(\mathrm{K})}$.

Lemme 9.2.2. *Soient* K *un compact non vide et* φ *un homomorphisme isométrique de* C(K) *dans une algèbre de Banach unitaire* B *; alors* $f \in \mathrm{C}(\mathrm{K})$ *est inversible dans* C(K) *si et seulement si* $\varphi(f)$ *est inversible dans* B.

Démonstration. On la donnera dans le cas compact *métrique*. On a déjà dit que si f est inversible, alors $\varphi(f)$ est inversible. Supposons maintenant f non inversible dans C(K) ; on a vu qu'il existe $s_0 \in \mathrm{K}$ tel que $f(s_0) = 0$; posons $\mathrm{U}_n = \{s \in \mathrm{K} : |f(s)| < 2^{-n}\}$; c'est un ouvert qui contient s_0 ; soit h_n la fonction continue définie sur K par $h_n(s) = \mathrm{dist}(s, \mathrm{U}_n^c)$; cette fonction est non nulle, mais nulle en dehors de U_n ; si $g_n = \|h_n\|^{-1} h_n$, on a une fonction de norme 1 nulle en dehors de U_n. Alors $\|f g_n\| \leq 2^{-n}$; posons $b = \varphi(f)$ et $x_n = \varphi(g_n)$; on a $\|x_n\|_\mathrm{B} = \|g_n\|_{\mathrm{C}(\mathrm{K})} = 1$ puisque φ est isométrique, et $\|b\,x_n\| \leq 2^{-n}$; il est impossible que b soit inversible : si b^{-1} existait dans B, la multiplication par b^{-1} serait continue, donc $b^{-1}(b\,x_n) = x_n$ tendrait vers 0, ce qui n'est pas le cas puisque $\|x_n\| = 1$ pour tout n.

//

Corollaire 9.2.3. *Pour tout homomorphisme isométrique* φ *de* C(K) *(complexe) dans une algèbre de Banach unitaire complexe* B, *on a*

$$\mathrm{Sp}(\varphi(f)) = \mathrm{Sp}(f) = f(\mathrm{K})$$

pour toute $f \in \mathrm{C}(\mathrm{K})$.

Démonstration. On sait déjà que $\mathrm{Sp}(\varphi(f)) \subset \mathrm{Sp}(f)$. Inversement, si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f) = f(\mathrm{K})$ la fonction $f - \lambda$ est non inversible dans C(K), donc son image $\varphi(f) - \lambda 1_\mathrm{B}$ est non inversible dans B, donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi(f))$.

//

Passons au théorème sur le calcul fonctionnel continu. Si K est un compact de $\mathbb{C}$, on notera i_{K} la fonction $z \in \mathrm{K} \to z \in \mathbb{C}$.

Théorème 9.2.4. *Soient* H *un espace de Hilbert complexe et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *hermitien ; posons* $\mathrm{K} = \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$. *Il existe un et un seul homomorphisme d'algèbres de Banach unitaires complexes* $\varphi_{\mathrm{T}} : \mathrm{C}(\mathrm{K}) \to \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *tel que* $\varphi_{\mathrm{T}}(i_{\mathrm{K}}) = \mathrm{T}$.

L'homomorphisme φ_{T} *est isométrique. Si on note* $f(\mathrm{T}) = \varphi_{\mathrm{T}}(f)$, *on a* $f(\mathrm{T})^* = \overline{f}(\mathrm{T})$ *et* $f(\mathrm{T})$ *commute avec tout opérateur* S *qui commute avec* T *(donc* $f(\mathrm{T})$ *est normal), pour toute fonction* f *continue sur* K. *On a de plus*

$$\mathrm{Sp}(f(\mathrm{T})) = \mathrm{Sp}(f) = f(\mathrm{Sp}(\mathrm{T})).$$

Si f *est réelle continue sur* K *et* g *continue sur* $f(\mathrm{K})$, *on a* $(g \circ f)(\mathrm{T}) = g(f(\mathrm{T}))$.

Démonstration. On a vu que $\mathrm{K} = \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$ est contenu dans $\mathbb{R}$. Désignons par A l'ensemble des fonctions continues f sur K de la forme $f : s \to \mathrm{P}(s)$ pour un $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ (fonctions polynomiales). D'après le théorème de Weierstrass, les fonctions polynomiales à coefficients complexes sont uniformément denses dans l'espace $\mathrm{C}([-a, a])$ des fonctions complexes continues sur $[-a, a]$, pour tout $a > 0$; il en résulte que l'ensemble A est dense dans C(K), puisque $\mathrm{K} \subset [-a, a]$ lorsque par exemple $a = \|\mathrm{T}\|$.

Montrons d'abord l'unicité de φ_{T}. Si φ est un homomorphisme d'algèbres unitaires de C(K) dans $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ tel que $\varphi(i_{\mathrm{K}}) = \mathrm{T}$, on aura nécessairement par les propriétés d'homomorphisme que l'image de la fonction $t \in \mathrm{K} \to \mathrm{P}(t)$ est égale à $\mathrm{P}(\mathrm{T})$: par définition, on a $\varphi(i_{\mathrm{K}}^0) = \varphi(1) = \mathrm{Id}_{\mathrm{H}} = \mathrm{T}^0$, et $\varphi(i_{\mathrm{K}}^k) = \mathrm{T}^k$ pour tout $k \geq 1$ (la fonction i_{K}^k est la fonction monôme $s \to s^k$) ; il en résulte puisque φ est de plus linéaire que pour toute fonction polynomiale $f : s \to \mathrm{P}(s)$, l'image $\varphi(f)$ est $\mathrm{P}(\mathrm{T}) = \varphi_{\mathrm{T}}(f)$. Par conséquent, φ est uniquement déterminé sur A. Comme un homomorphisme d'algèbres de Banach est continu par définition, et que A est dense dans C(K), il en résulte que φ, s'il existe, est uniquement défini sur C(K) : si (P_n) tend uniformément vers f sur K, on aura $\varphi(f) = \lim_n \varphi(\mathrm{P}_n) = \lim_n \mathrm{P}_n(\mathrm{T})$.

Montrons maintenant l'existence, en commençant par la définition d'un homomorphisme ψ sur A : pour toute $f \in \mathrm{A}$ l'élément $\psi(f)$ peut être défini de façon unique puisque si $f = \mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_2$ sur K,

$$\|\mathrm{P}_1(\mathrm{T}) - \mathrm{P}_2(\mathrm{T})\| = \|\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_2\|_{\mathrm{C}(\mathrm{K})} = 0$$

d'après le lemme 1. On posera donc $\psi(f) = \mathrm{P}(\mathrm{T})$, où P est n'importe quel polynôme qui représente la fonction f sur K. De plus, on a $\|\psi(f)\| = \|f\|_\infty$.

L'ensemble A est dense dans C(K), et on a un homomorphisme isométrique ψ de A dans $\mathcal{L}(\mathrm{H})$; d'après le lemme 1.4.1, il existe un prolongement unique φ_{T} de ψ en application linéaire continue de C(K) dans $\mathcal{L}(\mathrm{H})$. Posons $f(\mathrm{T}) = \varphi_{\mathrm{T}}(f)$ pour toute $f \in \mathrm{C}(\mathrm{K})$. Pour toute suite (P_n) de polynômes qui converge uniformément sur K vers la fonction f, la suite $(\mathrm{P}_n(\mathrm{T}))$ tend en norme dans $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ vers $f(\mathrm{T})$, puisque φ_{T} est continu. Il en résulte par continuité de la norme que

$$\|f(\mathrm{T})\| = \lim_n \|\mathrm{P}_n(\mathrm{T})\| = \lim_n \|\mathrm{P}_n\|_{\mathrm{C}(\mathrm{K})} = \|f\|_{\mathrm{C}(\mathrm{K})},$$

ce qui montre que l'application $\varphi_{\mathrm{T}} : f \in \mathrm{C}(\mathrm{K}) \to f(\mathrm{T}) \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ est isométrique.

Par construction on a $\varphi_{\mathrm{T}}(i_{\mathrm{K}}) = \mathrm{T}$ puisque la fonction i_{K} correspond au monôme X dont l'image est T en calcul polynomial. Il reste à voir que φ_{T} est un homomorphisme. Si (P_n) converge uniformément vers f sur K et (Q_n) converge uniformément vers g sur K, alors $f(\mathrm{T})g(\mathrm{T}) = \lim(\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n)(\mathrm{T}) = (fg)(\mathrm{T})$ (utiliser la continuité du produit par rapport au couple de variables), donc φ_{T} est un homomorphisme d'algèbres de Banach unitaires complexes, isométrique. Il en résulte que $\mathrm{Sp}\, f(\mathrm{T}) = f(\mathrm{K})$, d'après un principe général sur C(K) (corollaire 3).

Si ST = TS, on en déduit que $\mathrm{SP}_n(\mathrm{T}) = \mathrm{P}_n(\mathrm{T})\mathrm{S}$ pour tout n, donc $\mathrm{S}f(\mathrm{T}) = f(\mathrm{T})\mathrm{S}$ par continuité du produit par S, à droite et à gauche. Ainsi $f(\mathrm{T})$ commute avec tout opérateur borné S qui commute avec T.

Posons $\varphi_1(f) = \overline{f}(\mathrm{T})^*$ pour toute $f \in \mathrm{C}(\mathrm{K})$. On vérifie que φ_1 est un homomorphisme d'algèbres de Banach unitaires de C(K) dans $\mathcal{L}(\mathrm{H})$, et $\varphi_1(i_{\mathrm{K}}) = i_{\mathrm{K}}(\mathrm{T})$ (parce que $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}$, on a $\overline{i_{\mathrm{K}}} = i_{\mathrm{K}}$) donc $\varphi_1(i_{\mathrm{K}}) = \mathrm{T}^* = \mathrm{T}$ parce que T est hermitien. D'après l'unicité, on déduit $\varphi_1 = \varphi_{\mathrm{T}}$, ce qui signifie que $\overline{f}(\mathrm{T}) = f(\mathrm{T})^*$ pour toute $f \in \mathrm{C}(\mathrm{K})$. Il en résulte que $f(\mathrm{T})^* f(\mathrm{T}) = (\overline{f} f)(\mathrm{T}) = (f\overline{f})(\mathrm{T}) = f(\mathrm{T})f(\mathrm{T})^*$ donc $f(\mathrm{T})$ est normal.

Supposons que f soit une fonction réelle continue sur $\mathrm{K} = \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$. Alors $f(\mathrm{T})$ est hermitien puisque $f(\mathrm{T})^* = \overline{f}(\mathrm{T}) = f(\mathrm{T})$, ce qui permet d'appliquer à $f(\mathrm{T})$ le calcul fonctionnel défini précédemment. L'ensemble $\mathrm{L} = f(\mathrm{K}) \subset \mathbb{R}$ est compact, et c'est le spectre de $f(\mathrm{T})$. L'application $g \in \mathrm{C}(\mathrm{L}) \to g \circ f \in \mathrm{C}(\mathrm{K})$ est un homomorphisme χ d'algèbres de C(L) dans C(K), qui transforme i_{L} en $f(\mathrm{T})$; d'après l'unicité, la composition $\varphi_{\mathrm{T}} \circ \chi$ est égale à l'homomorphisme $\varphi_{f(\mathrm{T})}$ associé à l'opérateur hermitien $f(\mathrm{T})$. On a donc $(g \circ f)(\mathrm{T}) = g(f(\mathrm{T}))$ pour toute fonction continue g sur L.

//

Corollaire 9.2.5. *Soient* H *un espace de Hilbert complexe,* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *hermitien et f une fonction continue sur* $\mathrm{K} = \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$ *; si f est réelle sur* K*, alors* $f(\mathrm{T})$ *est hermitien ; si f est réelle et* **positive** *sur* K*, alors* $f(\mathrm{T})$ *est hermitien positif. Si* $|f| = 1$ *sur* K*,* $f(\mathrm{T})$ *est unitaire.*

Démonstration. On a déjà vu le premier point : quand f est réelle, on peut écrire $f(\mathrm{T})^* = \overline{f}(\mathrm{T}) = f(\mathrm{T})$. Si de plus $f \geq 0$ sur K, on peut considérer $g(s) = \sqrt{f(s)}$ qui est une fonction réelle continue sur K. Alors $g(\mathrm{T})$ est hermitien et $f(\mathrm{T}) = (g(\mathrm{T}))^2$ est hermitien positif. Pour finir, supposons que $|f| = 1$ sur K et posons $\mathrm{U} = f(\mathrm{T})$; on a $\mathrm{U}^*\mathrm{U} = \overline{f}(\mathrm{T})f(\mathrm{T}) = (\overline{f}f)(\mathrm{T}) = \varphi_{\mathrm{T}}(\mathbf{1}) = \mathrm{Id}_{\mathrm{H}}$, et le même calcul donne $\mathrm{UU}^* = \mathrm{Id}_{\mathrm{H}}$, donc U est unitaire.

//

Exemples 9.2.2.

1. Supposons que T soit diagonal dans une base orthonormée, avec coefficients diagonaux (λ_n) réels ; l'opérateur T est alors hermitien. Pour toute fonction continue f définie sur $\mathbb{R}$, l'opérateur $f(\mathrm{T})$ est l'opérateur diagonal de coefficients $(f(\lambda_n))$; démonstration : passer à la limite à partir du cas polynomial.

2. Supposons que T soit l'opérateur $\mathrm{M}_\varphi : \mathrm{L}_2(0,1) \to \mathrm{L}_2(0,1)$ de multiplication par une fonction φ réelle continue. On voit que pour tout polynôme P l'opérateur $\mathrm{P}(\mathrm{M}_\varphi)$ est l'opérateur de multiplication par la fonction $s \in [0,1] \to \mathrm{P}(\varphi(t))$, donc à la limite $f(\mathrm{M}_\varphi)$ est l'opérateur de multiplication par $s \to f(\varphi(s))$, c'est à dire que $f(\mathrm{M}_\varphi) = \mathrm{M}_{f\circ\varphi}$. On peut aussi raisonner en disant que $f \to \mathrm{M}_{f\circ\varphi}$ est bien l'unique homomorphisme décrit dans le théorème 4.

Le cas hermitien sur un espace réel. Complexification

Soit H un espace de Hilbert réel, dont le produit scalaire sera noté $x\,.\,y$ pour éviter les confusions avec le produit scalaire dans le complexifié ; le complexifié de H est l'espace $\mathrm{H}_{\mathbb{C}} = \mathrm{H} + i\mathrm{H}$ de tous les vecteurs $z = x + iy$ où $x, y \in \mathrm{H}$. Si $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$, on pose $\lambda z = (ax - by) + i(by + ax)$.

On définit le produit scalaire (complexe) sur $\mathrm{H}_{\mathbb{C}}$ en posant

$$\langle x + iy, x' + iy' \rangle = (x + iy)\,.\,(x' - iy') = (x\,.\,x' + y\,.\,y') + i(y\,.\,x' - x\,.\,y').$$

Lorsque $z = x+iy$, on voit que $\langle z, z\rangle = x\,.\,x+y\,.\,y = \|x\|^2+\|y\|^2$, ce qui donne un produit scalaire sur $\mathrm{H}_{\mathbb{C}}$ dont la norme associée est $\|z\| = \bigl(\|x\|^2 + \|y\|^2\bigr)^{1/2}$. A tout opérateur $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ on associe l'application $\mathrm{T}_{\mathbb{C}}$ de $\mathrm{H}_{\mathbb{C}}$ dans lui-même définie par $\mathrm{T}_{\mathbb{C}}(x + iy) = \mathrm{T}(x) + i\mathrm{T}(y)$; on vérifie facilement que $\mathrm{T}_{\mathbb{C}}$ est $\mathbb{C}$-linéaire. On peut montrer que :

l'application $\mathrm{T} \to \mathrm{T}_{\mathbb{C}}$ est un homomorphisme isométrique de $\mathbb{R}$-algèbres de Banach unitaires. De plus, $(\mathrm{T}^*)_{\mathbb{C}} = (\mathrm{T}_{\mathbb{C}})^*$ et $\mathrm{T}_{\mathbb{C}}$ est inversible si et seulement si T est inversible.

Si $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, il résulte de la propriété d'homomorphisme unitaire que $(\mathrm{P}(\mathrm{T}))_{\mathbb{C}} = \mathrm{P}(\mathrm{T}_{\mathbb{C}})$. Il en résulte aussi que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'opérateur $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{H}}$ est inversible si et seulement si $\mathrm{T}_{\mathbb{C}} - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{H}_{\mathbb{C}}}$ est inversible. Si on introduit le spectre réel de T en posant

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{T}) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{H}} \quad \text{non inversible } \}$$

on voit que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{T}) = \mathbb{R} \cap \mathrm{Sp}(\mathrm{T}_{\mathbb{C}})$. Cette notion de spectre réel n'est pas très intéressante en général, car il est possible que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{T})$ soit vide et ne donne aucune information. Mais dans le cas où T est hermitien, on sait que $\mathrm{T}_{\mathbb{C}}$ est hermitien aussi, donc son spectre est réel et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{T}) = \mathrm{Sp}(\mathrm{T}_{\mathbb{C}})$ dans ce cas.

Passons au calcul fonctionnel continu pour les hermitiens réels. Si P est un polynôme réel et si $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ est hermitien, on a $\mathrm{T}_{\mathbb{C}}$ hermitien, $\mathrm{P}(\mathrm{T}_{\mathbb{C}})$ hermitien, donc

$$\|\mathrm{P}(\mathrm{T})\| = \|(\mathrm{P}(\mathrm{T}))_{\mathbb{C}}\| = \|\mathrm{P}(\mathrm{T}_{\mathbb{C}})\| = \|\mathrm{P}\|_{\mathrm{C}(\mathrm{Sp}(\mathrm{T}_{\mathbb{C}}))}.$$

Si on pose $\mathrm{K} = \mathrm{Sp}(\mathrm{T}_{\mathbb{C}}) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{T})$ et si f est une fonction réelle continue sur K, on a dit qu'il existe un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tel que $|f(s) - \mathrm{P}(s)| < \varepsilon$ pour tout $s \in \mathrm{K}$. Comme s est réel, il est clair que si $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ est le polynôme obtenu à partir de P en prenant comme coefficients les parties réelles des coefficients de P, alors $\mathrm{Q}(s) = \mathrm{Re}\,\mathrm{P}(s)$, donc $|f(s) - \mathrm{Q}(s)| = |\,\mathrm{Re}(f(s) - \mathrm{P}(s))| \le |f(s) - \mathrm{P}(s)| < \varepsilon$. On voit donc que l'algèbre $\mathrm{A}_{\mathbb{R}}$ des fonctions polynomiales à coefficients réels est dense dans $\mathrm{C}_{\mathbb{R}}(\mathrm{K})$. On continue la démonstration comme avant. On obtient donc

Corollaire 9.2.6. *Soient H un espace de Hilbert réel et $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ hermitien ; désignons par K le spectre de T. Il existe un et un seul homomorphisme d'algèbres de Banach unitaires réelles $\varphi_{\mathrm{T}} : \mathrm{C}_{\mathbb{R}}(\mathrm{K}) \to \mathcal{L}(\mathrm{H})$ tel que $\varphi_{\mathrm{T}}(i_{\mathrm{K}}) = \mathrm{T}$.*

L'homomorphisme φ_{T} est isométrique. Si on note $f(\mathrm{T}) = \varphi_{\mathrm{T}}(f)$, on a que $f(\mathrm{T})^* = f(\mathrm{T})$ est hermitien pour toute f (forcément réelle dans ce contexte) continue sur K et $f(\mathrm{T})$ commute avec tout opérateur S qui commute avec T. On a

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f(\mathrm{T})) = f(\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{T})).$$

Si f est continue sur K et g continue sur $f(\mathrm{K})$, on a $(g \circ f)(\mathrm{T}) = g(f(\mathrm{T}))$.

9.3. Application aux hermitiens positifs. La racine carrée

Lemme 9.3.1. *Soient* H *un espace de Hilbert* **complexe** *et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *; si pour tout* $x \in \mathrm{H}$*, le scalaire* $\langle \mathrm{T}(x), x\rangle$ *est réel, il en résulte que* T *est hermitien.*

Démonstration. Supposons que $\langle \mathrm{T}(x), x\rangle$ soit réel pour tout $x \in \mathrm{H}$. L'application $(x, y) \to \langle \mathrm{T}(x), y\rangle$ est sesquilinéaire. Par le corollaire 2.1.2, on a $\langle \mathrm{T}(y), x\rangle = \overline{\langle \mathrm{T}(x), y\rangle}$, pour tous $x, y \in \mathrm{H}$, donc T est hermitien.

//

Théorème 9.3.2. *Soient* H *un espace de Hilbert (réel ou complexe) et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *; les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *l'opérateur* T *est hermitien et* $\langle \mathrm{T}(x), x\rangle$ *est réel* ≥ 0 *pour tout* $x \in \mathrm{H}$ *;*
- (ii) *il existe* $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *tel que* $\mathrm{T} = \mathrm{S}^*\mathrm{S}$ *;*
- (iii) *il existe* $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *tel que* $\mathrm{S} = \mathrm{S}^*$ *et* $\mathrm{T} = \mathrm{S}^2$ *;*
- (iv) *l'opérateur* T *est hermitien et* $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) \subset [0, +\infty[$.

Démonstration. Supposons (ii) vérifiée ; alors l'opérateur $\mathrm{T} = \mathrm{S}^*\mathrm{S}$ est hermitien et on a $\langle \mathrm{S}^*\mathrm{S}(x), x\rangle = \langle \mathrm{S}(x), \mathrm{S}(x)\rangle \geq 0$ pour tout $x \in \mathrm{H}$, donc $(ii) \Rightarrow (i)$. L'implication $(iii) \Rightarrow (ii)$ est évidente. Supposons ensuite que T soit hermitien et que son spectre $\mathrm{K} = \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$ soit contenu dans $[0, +\infty[$; notons $f \in \mathrm{C}(\mathrm{K})$ l'application $t \to \sqrt{t}$; par le théorème 2.4 ou le corollaire 2.6, on a $f(\mathrm{T}) = f(\mathrm{T})^*$; de plus $f^2 = i_{\mathrm{K}}$, donc $f(\mathrm{T})^2 = \mathrm{T}$, donc $(iv) \Rightarrow (iii)$. Enfin, par la proposition 7.3.11, on sait que (i) implique que $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) \subset [0, +\infty[$.

//

Un élément hermitien de $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ satisfaisant aux conditions équivalentes du théorème 2 est appelé *positif* (définition 6.1.3). On note $\mathcal{L}(\mathrm{H})_+$ l'ensemble des éléments positifs de $\mathcal{L}(\mathrm{H})$. Pour $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})_+$ et $\alpha > 0$, on pose $\mathrm{T}^\alpha = f(\mathrm{T})$, où $f \in \mathrm{C}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Sp}(\mathrm{T}))$ est l'application $t \to t^\alpha$. Pour $\alpha, \beta > 0$ on a $\mathrm{T}^{\alpha+\beta} = \mathrm{T}^\alpha \mathrm{T}^\beta$ et, par la dernière partie du théorème 2.4 (ou du corollaire 2.6), on a $(\mathrm{T}^\alpha)^\beta = \mathrm{T}^{\alpha\beta}$.

Proposition 9.3.3. *Pour* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})_+$*, il existe un et seul* $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})_+$ *tel que* $\mathrm{S}^2 = \mathrm{T}$.

Démonstration. On a déjà vu ci-dessus l'existence d'une racine hermitienne positive, passons maintenant à la démonstration de l'unicité. Soit S un opérateur hermitien positif tel que $\mathrm{S}^2 = \mathrm{T}$; considérons le spectre $\mathrm{K} = \mathrm{Sp}(\mathrm{S}) \subset [0, +\infty[$, et considérons sur K la fonction $f : s \to s^2$, puis sur $\mathrm{L} = f(\mathrm{K}) \subset [0, +\infty[$ la fonction $g(t) = \sqrt{t}$. Du fait que $\mathrm{K} \subset [0, +\infty[$, on vérifie que $g(f(s)) = \sqrt{s^2} = s$ pour tout $s \in \mathrm{K}$, donc le résultat de composition nous donne, puisque $g \circ f = i_{\mathrm{K}}$

$$\mathrm{S} = (g \circ f)(\mathrm{S}) = g(f(\mathrm{S})) = g(\mathrm{S}^2) = g(\mathrm{T}) = \sqrt{\mathrm{T}}.$$

//

Bien entendu il n'y a pas unicité si on ne demande pas que la racine soit positive : il suffit de considérer $-\sqrt{\mathrm{T}}$ pour avoir une autre racine hermitienne.

Décomposition polaire

Soient E et F deux espaces de Hilbert et $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$; on appelle *module* de T et on note $|\mathrm{T}|$ l'unique $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})_+$ tel que $\mathrm{S}^2 = \mathrm{T}^*\mathrm{T}$, c'est à dire que $|\mathrm{T}| = \sqrt{\mathrm{T}^*\mathrm{T}}$.

Proposition 9.3.4. *Soient* E *et* F *deux espaces de Hilbert et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *; il existe un et un seul* $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$*, nul sur* $\ker(\mathrm{T})$ *tel que* $\mathrm{T} = u\,|\mathrm{T}|$.

Démonstration. Pour $x \in \mathrm{E}$ on a

$$\|\mathrm{T}(x)\|^2 = \langle \mathrm{T}^*\mathrm{T}(x), x\rangle = \langle |\mathrm{T}|^2(x), x\rangle = \big\|\, |\mathrm{T}|\,(x)\big\|^2 ;$$

en particulier, $\ker(\mathrm{T}) = \ker(|\mathrm{T}|)$; par la proposition 6.1.6, l'adhérence G de l'image de $|\mathrm{T}|$ est l'orthogonal de $\ker(\mathrm{T})$, et on a $\mathrm{E} = \mathrm{G} \oplus \ker(\mathrm{T})$, somme directe orthogonale. On va expliquer la construction de u_0, restrition de u au morceau G. Tout d'abord, si $y = |\mathrm{T}|(x) \in \mathrm{im}(|\mathrm{T}|)$, nous devons nécessairement poser $u_0(y) = \mathrm{T}(x)$ pour réaliser la factorisation voulue. Notons que si $y = |\mathrm{T}|(x')$ est une autre représentation de y, on aura $x' - x \in \ker(|\mathrm{T}|) = \ker(\mathrm{T})$, donc $\mathrm{T}(x') = \mathrm{T}(x)$. Cela montre que l'on peut légitimement poser $u_0(y) = \mathrm{T}(x)$, pour tout y dans l'image de $|\mathrm{T}|$, où x est n'importe quel vecteur tel que $|\mathrm{T}|(x) = y$.

On remarque ensuite que $\|u_0(y)\| = \|\mathrm{T}(x)\| = \|\, |\mathrm{T}|(x)\,\| = \|y\|$, c'est à dire que u_0 est une isométrie de $\mathrm{im}(|\mathrm{T}|)$ dans E. Puisque E est complet, cette isométrie se prolonge en isométrie $\overline{u}_0$ de l'adhérence G, à valeurs dans E. Posons pour finir, si $x = y + z$, avec $y \in \mathrm{G}$ et $z \in \ker(\mathrm{T})$

$$u(x) = \overline{u}_0(y)$$

c'est à dire $u = \overline{u}_0 \circ \mathrm{P}_\mathrm{G}$. On vérifie que $u \circ |\mathrm{T}| = \mathrm{T}$, u nulle sur $\ker(\mathrm{T})$ et que $\|u\| \le 1$. //

Soient E et F deux espaces de Hilbert et $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$; on appelle *phase* de T l'unique $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ nul sur $\ker(\mathrm{T})$ tel que $\mathrm{T} = u\,|\mathrm{T}|$. La décomposition $\mathrm{T} = u\,|\mathrm{T}|$ s'appelle *décomposition polaire* de T.

Remarque 9.3.1. Si T est injectif, u est isométrique. Si T est injectif à image dense, u est unitaire.

En effet, G est égal à E lorsque $\ker(|\mathrm{T}|) = \ker(\mathrm{T}) = \{0\}$, donc $u = \overline{u}_0$ dans ce cas. De plus, l'image de u contient l'image de T d'après la factorisation ; si T est injectif à image dense, u est une isométrie à image dense, donc surjective, donc unitaire.

9.4. Le cas général : opérateurs normaux

Il n'y a pas de raison de s'arrêter aux opérateurs hermitiens pour le calcul fonctionnel continu. Ce n'est qu'un cas particulier des opérateurs normaux, et la théorie du calcul fonctionnel continu se généralise dans son bon cadre à ces opérateurs. Il y a cependant des difficultés supplémentaires.

Dans le cas général d'un opérateur normal, on demandera explicitement que l'homomorphisme φ_T envoie la fonction $\overline{i_\mathrm{K}}$ sur T^*. Il faut généraliser nos polynômes : si la fonction i_K est envoyée sur T et la fonction $\overline{i_\mathrm{K}}$ sur T^*, alors l'image de $i_\mathrm{K}\overline{i_\mathrm{K}}$ doit être TT^* ; dans le cas hermitien ou unitaire, la fonction $i_\mathrm{K}\overline{i_\mathrm{K}}$ s'exprime à partir d'un polynôme en i_K (i_K^2 dans le cas hermitien et 1 dans le cas unitaire) ; ceci n'est plus vrai maintenant, et la fonction $i_\mathrm{K}\overline{i_\mathrm{K}}$ est une nouvelle fonction qui doit être gardée dans notre algèbre de "polynômes" ; bien sûr le problème ne s'arrête pas là, et nous devons considérer $i_\mathrm{K}^p\,\overline{i_\mathrm{K}}^q$

pour tous entiers $p, q \geq 0$. Nous allons donc considérer l'algèbre $\mathbb{C}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$ des polynômes en deux variables, puis prendre l'ensemble des fonctions sur $\mathrm{K} = \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$ obtenues en remplaçant X par i_K et Y par $\overline{i_\mathrm{K}}$. Notre algèbre de base A qui remplacera l'algèbre des polynômes sera l'algèbre de toutes les fonctions f sur K de la forme

$$\forall z \in \mathrm{K}, \quad f(z) = \sum_{p,q=0}^{\mathrm{N}} c_{p,q} z^p \, \overline{z}^q$$

avec $c_{p,q} \in \mathbb{C}$, et où N varie dans $\mathbb{N}$. On a envie de poser ensuite

$$f(\mathrm{T}) = \sum_{p,q=0}^{\mathrm{N}} c_{p,q} \mathrm{T}^p \, (\mathrm{T}^*)^q,$$

mais on n'est pas encore sûr que l'opérateur ainsi écrit ne dépend que de la fonction f sur K. La stratégie de démonstration sera toujours la même : l'algèbre A considérée est dense dans C(K) par Stone-Weierstrass (facile), et l'application que nous avons en tête sera isométrique.

Théorème 9.4.1. *Soient* H *un espace de Hilbert complexe et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *normal ; posons* $\mathrm{K} = \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$ *; il existe un et un seul homomorphisme d'algèbres de Banach unitaires complexes* $\varphi_\mathrm{T} : \mathrm{C}(\mathrm{K}) \to \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *tel que* $\varphi_\mathrm{T}(i_\mathrm{K}) = \mathrm{T}$ *et* $\varphi_\mathrm{T}(\overline{i_\mathrm{K}}) = \mathrm{T}^*$.

L'homomorphisme φ_T *est isométrique. Si on note* $f(\mathrm{T}) = \varphi_\mathrm{T}(f)$*, on a* $f(\mathrm{T})^* = \overline{f}(\mathrm{T})$ *(donc* $f(\mathrm{T})$ *est normal) et* $f(\mathrm{T})$ *commute avec tout opérateur* S *qui commute avec* T **et** *avec* T^**. On a*

$$\mathrm{Sp}(f(\mathrm{T})) = \mathrm{Sp}(f) = f(\mathrm{Sp}(\mathrm{T})).$$

Pour toute fonction continue f *sur* K *et toute fonction continue* g *sur* $f(\mathrm{K})$*, on a* $g(f(\mathrm{T})) = (g \circ f)(\mathrm{T})$.

Corollaire 9.4.2. *Soient* H *un espace de Hilbert complexe,* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *un opérateur normal et* f *une fonction continue sur* $\mathrm{Sp}(\mathrm{T})$ *; alors, si* $f(\mathrm{Sp}(\mathrm{T})) \subset \mathbb{R}$, $f(\mathrm{T})$ *est hermitien ; si de plus* $f(\mathrm{Sp}(\mathrm{T})) \subset \mathbb{R}_+$, $f(\mathrm{T})$ *est hermitien positif; si* $f(\mathrm{Sp}(\mathrm{T})) \subset \mathbb{T}$*, alors* $f(\mathrm{T})$ *est unitaire.*

Démonstration. Si $f = \overline{f}$ (sur Sp(T)) alors $f(\mathrm{T}) = \overline{f}(\mathrm{T}) = f(\mathrm{T})^*$; si f est réelle ≥ 0 sur Sp(T), on peut introduire $g = \sqrt{f}$, et écrire $f(\mathrm{T})$ comme le carré d'un hermitien ; si $f(\mathrm{Sp}(\mathrm{T})) \subset \mathbb{T}$, alors $f\overline{f} = 1$, donc $f(\mathrm{T})^* f(\mathrm{T}) = f(\mathrm{T}) f(\mathrm{T})^* = (f\overline{f})(\mathrm{T}) = \mathrm{Id}_\mathrm{H}$, donc l'opérateur $f(\mathrm{T})$ est unitaire.

//

Exemples 9.4.1.

1. Supposons que U soit un opérateur unitaire sur H tel que $-1 \notin \mathrm{Sp}(\mathrm{U})$. La fonction $f(z) = i(z-1)/(z+1)$ est alors définie et continue sur Sp(U), et à valeurs réelles. Il en résulte que $f(\mathrm{U})$ est hermitien. L'opérateur $f(\mathrm{U})$ est égal à $i(\mathrm{U} - \mathrm{Id}_\mathrm{H})(\mathrm{U} + \mathrm{Id}_\mathrm{H})^{-1}$.

Inversement, si T est hermitien, on peut considérer la fonction $g(t) = (i+t)/(i-t)$ qui envoie $\mathbb{R}$ dans le cercle unité de $\mathbb{C}$. L'opérateur $g(\mathrm{T}) = (i+\mathrm{T})(i-\mathrm{T})^{-1}$ est unitaire.

2. Pour tout $s \in \mathbb{R}$ considérons la fonction f_s définie sur $\mathbb{R}$ par $f_s(t) = \mathrm{e}^{ist}$. Si T est hermitien, on peut considérer pour tout s l'opérateur $\mathrm{U}_s = f_s(\mathrm{T}) = \mathrm{e}^{is\mathrm{T}}$. C'est un

opérateur unitaire puisque f_s est à valeurs dans $\mathbb{T}$. De plus $f_{s_1} f_{s_2} = f_{s_1+s_2}$ pour tous s_1, s_2, donc $\mathrm{U}_{s_1} \mathrm{U}_{s_2} = \mathrm{U}_{s_1+s_2}$. On dit qu'on a un *groupe* d'opérateurs unitaires. On peut montrer (dernière page du *poly long*, théorème de Stone) une réciproque de ce fait, mais elle demande de considérer des opérateurs autoadjoints *non bornés*.

3. Soient T un opérateur normal sur H et F un sous-espace fermé de H, stable par T et par T^* ; alors la projection orthogonale $\mathrm{P_F}$ commute avec T et T^*, donc avec tout opérateur $f(\mathrm{T})$. Si S désigne la restriction de T à F, alors S est un opérateur normal sur F, et $\mathrm{Sp(S)} \subset \mathrm{Sp(T)}$; pour toute fonction continue f sur le spectre de T l'opérateur $f(\mathrm{S})$ est la restriction de $f(\mathrm{T})$ à F.

4. Soit T un opérateur normal sur H ; supposons que le spectre de T puisse être découpé en deux compacts de $\mathbb{C}$ disjoints, disons $\mathrm{Sp(T)} = \mathrm{K}_1 \cup \mathrm{K}_2$. Dans ce cas, la fonction f_1 qui est égale à 1 sur K_1 et à 0 sur K_2 est une fonction réelle continue sur Sp(T). Il en résulte que $\mathrm{P}_1 = f_1(\mathrm{T})$ est hermitien, et $\mathrm{P}_1^2 = \mathrm{P}_1$ puisque $f_1^2 = f_1$, donc P_1 est un projecteur orthogonal, qui commute avec T et avec T^*. On peut décomposer H en somme directe orthogonale $\mathrm{H}_1 \oplus \mathrm{H}_2$, où $\mathrm{H}_1 = \mathrm{P}_1(\mathrm{H})$; la restriction de T_1 à H_1 est un opérateur normal T_1 sur H_1 dont le spectre est égal à K_1.

10. Décomposition spectrale des opérateurs normaux

Dans ce chapitre, tous les espaces considérés sont complexes.

10.1. Opérateurs unitairement équivalents

Définition 10.1.1. Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert, et $\mathrm{T}_1 \in \mathcal{L}(\mathrm{H}_1)$, $\mathrm{T}_2 \in \mathcal{L}(\mathrm{H}_2)$; on dit que T_1 et T_2 sont *unitairement équivalents* s'il existe un opérateur unitaire $\mathrm{U} : \mathrm{H}_1 \to \mathrm{H}_2$ tel que $\mathrm{T}_1 = \mathrm{U}^* \circ \mathrm{T}_2 \circ \mathrm{U}$.

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert, et $\mathrm{U} : \mathrm{H}_1 \to \mathrm{H}_2$ un opérateur unitaire ; à tout opérateur $\mathrm{S}_2 \in \mathcal{L}(\mathrm{H}_2)$ associons l'opérateur $\mathrm{S}_1 = \mathrm{U}^*\mathrm{S}_2\mathrm{U} \in \mathcal{L}(\mathrm{H}_1)$. On vérifie que $\mathrm{S}_2 \to \mathrm{S}_1$ est un homomorphisme ψ d'algèbres de Banach unitaires de $\mathcal{L}(\mathrm{H}_2)$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{H}_1)$, et de plus $\mathrm{Sp}(\mathrm{S}_2) = \mathrm{Sp}(\mathrm{S}_1)$ (parce que $\mathrm{S}_1 - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{H}_1} = \mathrm{U}^*(\mathrm{S}_2 - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{H}_2})\mathrm{U}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$). Si $\mathrm{T}_2 \in \mathcal{L}(\mathrm{H}_2)$ est normal, si on pose $\mathrm{K} = \mathrm{Sp}(\mathrm{T}_2) = \mathrm{Sp}(\mathrm{T}_1)$, et si on considère $\varphi = \psi \circ \varphi_{\mathrm{T}_2}$, on obtient un homomorphisme φ d'algèbres de Banach unitaires complexes de $\mathrm{C}(\mathrm{K})$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{H}_1)$ tel que $\varphi(i_{\mathrm{K}}) = \mathrm{T}_1$. Il en résulte que $\varphi = \varphi_{\mathrm{T}_1}$ d'après l'unicité dans le théorème 9.4.1 ; pour toute fonction continue f sur K, on a donc la relation $f(\mathrm{T}_1) = \psi(f(\mathrm{T}_2))$, c'est à dire

$$f(\mathrm{T}_1) = \mathrm{U}^* f(\mathrm{T}_2)\mathrm{U}. \tag{E}$$

Exemple 10.1.2. Le shift bilatéral sur $\ell_2(\mathbb{Z})$. A toute suite $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $\ell_2(\mathbb{Z})$ on associe $\mathrm{S}(x) \in \ell_2(\mathbb{Z})$ définie par $\mathrm{S}(x)_n = x_{n-1}$ (décalage d'un cran vers la droite). On a vu que S est unitaire, que son inverse S^* est le décalage à gauche, et le spectre de S est le cercle unité entier. On va montrer un autre *modèle* pour l'opérateur S, qui rend son calcul fonctionnel facile à comprendre.

Considérons l'espace $\mathrm{H}_2 = \mathrm{L}_2([0, 2\pi])$ muni de la mesure $dt/2\pi$ et de la base $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où h_n est la fonction définie par $h_n(t) = \mathrm{e}^{int}$ (base de Fourier). Considérons sur H_2 l'opérateur T_2 de multiplication par la fonction g définie par $g(t) = \mathrm{e}^{it}$. Par ailleurs on considère l'espace $\mathrm{H}_1 = \ell_2(\mathbb{Z})$, avec sa base naturelle $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Considérons l'isométrie surjective U de H_1 sur H_2 définie par $\mathrm{U}(e_n) = h_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, puis l'opérateur $\mathrm{U}^*\mathrm{T}_2\mathrm{U}$. On voit que cet opérateur envoie e_n sur e_{n+1} pour tout n : c'est le shift à droite S. On voit donc que le shift S sur $\ell_2(\mathbb{Z})$ est unitairement équivalent à l'opérateur de multiplication par la fonction $t \to \mathrm{e}^{it}$ sur H_2.

On a vu que le calcul fonctionnel des opérateurs de multiplication est simple : si f est une fonction continue sur $\mathbb{T}$, l'opérateur $f(\mathrm{T}_2)$ est l'opérateur de multiplication par la fonction $t \to f(\mathrm{e}^{it})$.

On verra que tout opérateur normal est unitairement équivalent à un modèle canonique : la multiplication par une fonction mesurable bornée sur un espace $\mathrm{L}_2(\Omega, \mu)$, pour lequel on a dit que le calcul fonctionnel était simple.

10.2. Opérateurs de multiplication et spectre

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f \in \mathrm{L}_\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$; notons M_f l'application qui à $g \in \mathrm{L}_2$ associe la fonction fg. On voit que $\mathrm{M}_f \in \mathcal{L}(\mathrm{L}_2(\Omega, \mu))$ et $\|\mathrm{M}_f\| \le \|f\|_\infty$. Si f_1 et f_2 sont deux fonctions mesurables bornées, il est clair que $\mathrm{M}_{f_1} \mathrm{M}_{f_2} = \mathrm{M}_{f_1 f_2}$. Pour $g_1, g_2 \in \mathrm{L}_2(\Omega, \mu)$, on a

$$\langle f g_1, g_2 \rangle = \int_\Omega f(s) g_1(s) \overline{g_2(s)}\, d\mu(s) = \langle g_1, \overline{f} g_2 \rangle,$$

donc $(\mathrm{M}_f)^* = \mathrm{M}_{\overline{f}}$. On en déduit immédiatement que M_f est normal. Remarquons que si f est réelle, alors M_f est hermitien, et que si $|f(s)| = 1$ pour μ-presque tout $s \in \Omega$, alors $(\mathrm{M}_f)^* \mathrm{M}_f = \mathrm{M}_{|f|^2} = \mathrm{Id}_{\mathrm{L}_2(\Omega,\mu)}$, c'est à dire que M_f est unitaire.

Proposition 10.2.1. *Le spectre de M_f est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que, pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $\{s \in \Omega : |f(s) - \lambda| < \varepsilon\}$ ne soit pas μ-négligeable.*

Démonstration. Pour lire plus facilement la démonstration on pourra penser que f est une *vraie* fonction mesurable bornée (c'est à dire qu'on pourrait choisir un représentant de la classe, etc...). Soit $\lambda \in \mathbb{C}$; s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble $\{s \in \Omega : |f(s) - \lambda| < \varepsilon\}$ soit μ-négligeable, notons h la fonction définie sur Ω par $h(s) = (f(s) - \lambda)^{-1}$ si $f(s) \ne \lambda$ et $h(s) = 0$ sinon. Alors pour μ-presque tout $s \in \Omega$ on a $|h(s)| \le \varepsilon^{-1}$ et $h(s)(f(s) - \lambda) = 1$. On en déduit que $h \in \mathrm{L}_\infty(\Omega, \mu)$ et

$$\mathrm{M}_h\,(\mathrm{M}_f - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{L}_2(\Omega,\mu)}) = (\mathrm{M}_f - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{L}_2(\Omega,\mu)})\,\mathrm{M}_h = \mathrm{Id}_{\mathrm{L}_2(\Omega,\mu)}\,.$$

Inversement supposons que pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $\mathrm{A}_\varepsilon = \{s \in \Omega : |f(s) - \lambda| < \varepsilon\}$ soit tel que $\mu(\mathrm{A}_\varepsilon) > 0$; soit g une fonction de $\mathrm{L}_2(\Omega, \mu)$ nulle hors de A_ε et telle que $\|g\|_2 = 1$ (par exemple un multiple convenable de la fonction indicatrice de l'ensemble A_ε) ; on voit alors que $|(\mathrm{M}_f - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{L}_2(\Omega,\mu)})(g)| \le \varepsilon\,|g|$, donc $\|(\mathrm{M}_f - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{L}_2(\Omega,\mu)})(g)\| \le \varepsilon$; il est clair que $\mathrm{M}_f - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{L}_2(\Omega,\mu)}$ n'est pas inversible (son inverse devrait avoir une norme $\ge \varepsilon^{-1}$, pour tout $\varepsilon > 0$).

//

10.3. Théorème de représentation. Décomposition spectrale

Soient H un espace de Hilbert complexe et T un opérateur normal sur H ; étant donné un vecteur non nul x, on va s'intéresser au plus petit sous-espace vectoriel fermé F_x de H contenant x et qui soit stable par T et par T^*. Il est clair que ce sous-espace F_x doit contenir tous les vecteurs de la forme $\mathrm{T}^k(\mathrm{T}^*)^\ell(x)$, avec $k, \ell \ge 0$. Inversement, le sous-espace fermé engendré par tous ces vecteurs est stable par T et T^* (grâce à la commutation $\mathrm{TT}^* = \mathrm{T}^*\mathrm{T}$). L'espace F_x est donc égal à l'adhérence du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\{\mathrm{T}^k(\mathrm{T}^*)^\ell(x) : k, \ell \ge 0\}$. Il est stable par tout opérateur de la forme $f(\mathrm{T})$ obtenu par calcul fonctionnel continu.

Convenons de dire (entre nous) que T est *monogène* s'il existe un vecteur $x_0 \in \mathrm{H}$ tel que $\mathrm{H} = \mathrm{F}_{x_0}$. Dans ce cas particulier, le théorème de représentation prend une forme bien sympathique.

Proposition 10.3.1. *Soient* H *un espace de Hilbert,* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *un opérateur normal* monogène *et* $\mathrm{K} = \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$ *; il existe une probabilité* μ *sur* K *telle que* T *soit unitairement équivalent à l'opérateur* $\mathrm{M}_{i_\mathrm{K}} \in \mathcal{L}(\mathrm{L}_2(\mathrm{K}, \mu))$ *de multiplication par la fonction* i_K.

Démonstration. Soit x_0 un vecteur tel que $\mathrm{F}_{x_0} = \mathrm{H}$; on peut choisir $\|x_0\| = 1$ si on veut. Considérons la forme linéaire $\ell : f \to \langle f(\mathrm{T})(x_0), x_0\rangle$ sur C(K) ; si $f \in \mathrm{C(K)}$ est réelle positive, on sait par le calcul fonctionnel (corollaire 9.4.2) que $f(\mathrm{T})$ est hermitien positif, donc $\langle f(\mathrm{T})(x_0), x_0\rangle \geq 0$. On voit ainsi que ℓ est une forme linéaire positive sur C(K) ; donc il existe une unique mesure positive μ sur K telle que, pour toute fonction $f \in \mathrm{C(K)}$, on ait $\ell(f) = \int_\mathrm{K} f(t)\, d\mu(t)$; on a $\mu(\mathrm{K}) = \int 1\, d\mu = \langle 1(\mathrm{T})(x_0), x_0\rangle = \|x_0\|^2 = 1$, donc μ est une probabilité. Si y est un vecteur de F_{x_0} de la forme $y = f(\mathrm{T})(x_0)$, avec $f \in \mathrm{C(K)}$, on a

$$\|y\|^2 = \langle f(\mathrm{T})(x_0), f(\mathrm{T})(x_0)\rangle = \langle \overline{f}(\mathrm{T}) f(\mathrm{T})(x_0), x_0\rangle = \int_\mathrm{K} |f(t)|^2\, d\mu(t)\,;$$

la relation précédente montre que y ne dépend que de la classe $\widehat{f}$ de f dans $\mathrm{L}_2(\mathrm{K}, \mu)$, et que l'application $u_0 : \widehat{f} \to f(\mathrm{T})(x_0)$, définie sur l'image Y de C(K) dans $\mathrm{L}_2(\mathrm{K}, \mu)$, est isométrique, de Y muni de la norme de $\mathrm{L}_2(\mathrm{K}, \mu)$ vers la norme de H ; par ailleurs, le sous-espace Y est dense dans $\mathrm{L}_2(\mathrm{K}, \mu)$ par un résultat général d'intégration. On peut donc prolonger u_0 en une isométrie u de $\mathrm{L}_2(\mathrm{K}, \mu)$ dans H. Pour tous $k, \ell \geq 0$, le vecteur $y = \mathrm{T}^k(\mathrm{T}^*)^\ell(x_0)$ est dans l'image de u, puisqu'il provient de la fonction continue $i_\mathrm{K}^k(\overline{i_\mathrm{K}})^\ell$; l'image de u est donc dense puisque T est monogène, et u est unitaire de $\mathrm{L}_2(\mathrm{K}, \mu)$ dans H. Si $y = u(f)$ avec f continue, on a $y = f(\mathrm{T})(x_0)$, donc

$$\mathrm{T}(u(f)) = \mathrm{T} f(\mathrm{T})(x_0) = (i_\mathrm{K} f)(\mathrm{T})(x_0) = u(\mathrm{M}_{i_\mathrm{K}}(f)).$$

Cette relation $\mathrm{T} \circ u = u \circ \mathrm{M}_{i_\mathrm{K}}$, vraie sur le sous-espace dense Y de $\mathrm{L}_2(\mathrm{K}, \mu)$, se prolonge à $\mathrm{L}_2(\mathrm{K}, \mu)$ tout entier et dit que T et la multiplication par i_K sont conjugués par l'opérateur unitaire u, donc unitairement équivalents.

//

Si on donne un opérateur normal $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ et un vecteur $x \in \mathrm{H}$ non nul, on peut considérer la restriction S de T au sous-espace F_x ; puisque F_x est aussi stable par T^*, on voit facilement que $\mathrm{S}^* \in \mathcal{L}(\mathrm{F}_x)$ est la restriction de T^* à F_x, et que S est normal. De plus, S est évidemment monogène, en tant qu'opérateur de l'espace de Hilbert F_x. Le résultat général qui suit consiste simplement à décomposer H en somme directe orthogonale de tels morceaux, et à exprimer le recollement des morceaux.

Théorème 10.3.3. *Soient* H *un espace de Hilbert séparable et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *un opérateur normal ; il existe un espace mesuré* (X, μ), *une fonction* $f \in \mathrm{L}_\infty(\mathrm{X}, \mu)$ *et un isomorphisme unitaire* $u : \mathrm{L}_2(\mathrm{X}, \mu) \to \mathrm{H}$ *tels que* $\mathrm{T} = u\, \mathrm{M}_f\, u^*$.

Soient H un espace de Hilbert séparable et $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ un opérateur normal ; écrivons $\mathrm{T} = u\, \mathrm{M}_f\, u^*$. L'application $g \to u\, \mathrm{M}_{g \circ f}\, u^*$ est un morphisme continu d'algèbres de C(Sp(T)) dans $\mathcal{L}(\mathrm{H})$; par l'unicité dans le théorème 9.4.1, pour toute fonction continue $g \in \mathrm{C}(\mathrm{Sp}(\mathrm{T}))$, on a $g(\mathrm{T}) = u\, \mathrm{M}_{g \circ f}\, u^*$.

Théorème 10.3.4. *Soient* H *un espace de Hilbert séparable et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *un opérateur normal ; notons* $\mathrm{K} = \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$ *et* $\mathcal{L}_\infty(\mathrm{K}, \mathcal{B})$ *l'espace vectoriel des fonctions boréliennes bornées sur* K. *Il existe un unique homomorphisme d'algèbres unitaires* $\Phi : \mathcal{L}_\infty(\mathrm{K}, \mathcal{B}) \to \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *satisfaisant* $\Phi(i_\mathrm{K}) = \mathrm{T}$, $\Phi(\overline{i_\mathrm{K}}) = \mathrm{T}^*$, *et tel que pour toute suite bornée* (g_n) *dans*

$\mathcal{L}_\infty(\mathrm{K}, \mathcal{B})$ convergeant simplement vers $g \in \mathcal{L}_\infty(\mathrm{K}, \mathcal{B})$ la suite $\Phi(g_n)$ converge fortement vers $\Phi(g)$, c'est à dire

$$\forall x \in \mathrm{H}, \quad \|\Phi(g_n)(x) - \Phi(g)(x)\|_\mathrm{H} \to 0.$$

Si $g \in \mathrm{C}(\mathrm{K})$ on a $\Phi(g) = g(\mathrm{T})$.

Démonstration. Montrons l'existence ; soient (X, μ) un espace mesuré, f une fonction de $\mathrm{L}_\infty(\mathrm{X}, \mu)$ et soit $u : \mathrm{L}_2(\mathrm{X}, \mu) \to \mathrm{H}$ un isomorphisme tels que $\mathrm{T} = u\,\mathrm{M}_f\,u^*$ (théorème 3) ; notons $\Phi : \mathcal{L}_\infty(\mathrm{K}, \mathcal{B}) \to \mathcal{L}(\mathrm{H})$ l'application $g \to u\,\mathrm{M}_{g\circ f}\,u^*$; l'application Φ est clairement un homomorphisme d'algèbres unitaires satisfaisant $\Phi(i_\mathrm{K}) = \mathrm{T}$ et $\Phi(\overline{i_\mathrm{K}}) = \mathrm{T}^*$. Soit $g_n \in \mathcal{L}_\infty(\mathrm{K}, \mathcal{B})$ une suite bornée par un réel $\mathrm{M} \geq 0$ et convergeant simplement vers $g \in \mathcal{L}_\infty(\mathrm{K}, \mathcal{B})$; alors, pour tout $x \in \mathrm{H}$, la suite $(g_n \circ f)u^*(x)$ est une suite dans $\mathrm{L}_2(\mathrm{X}, \mu)$ dominée par $\mathrm{M}u^*(x)$ et convergeant partout vers $(g\circ f)u^*(x)$. Par le théorème de convergence dominée, la suite $(g_n \circ f)u^*(x)$ converge vers $(g \circ f)u^*(x)$ dans L_2, donc $\Phi(g_n)(x) = u(g_n \circ f)u^*(x)$ converge (en norme) vers $u(g \circ f)u^*(x) = \Phi(g)(x)$. Remarquons que si $g \in \mathrm{C}(\mathrm{K})$ on a $\Phi(g) = g(\mathrm{T})$, d'après la relation (E) du début de ce chapitre.

Montrons l'unicité. Soient Φ_1 et Φ_2 deux applications vérifiant les conditions ci-dessus ; posons $\mathrm{A} = \{g \in \mathcal{L}_\infty(\mathrm{K}, \mathcal{B}) : \Phi_1(g) = \Phi_2(g)\}$. On doit montrer que l'ensemble A est égal à $\mathcal{L}_\infty(\mathrm{K}, \mathcal{B})$. Par hypothèse, A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_\infty(\mathrm{K}, \mathcal{B})$ et pour toute suite bornée $(g_n) \subset \mathrm{A}$ convergeant simplement vers $g \in \mathcal{L}_\infty(\mathrm{K}, \mathcal{B})$, on a $g \in \mathrm{A}$; de plus, par l'unicité dans le théorème 9.4.1, A contient toutes les fonctions continues sur K. Toute fonction borélienne bornée est limite uniforme de fonctions boréliennes prenant un nombre fini de valeurs ; celles-ci sont combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques de sous-ensembles boréliens. Il suffit donc de prouver que A contient toutes les fonctions caractéristiques. Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des boréliens de K dont la fonction caractéristique est dans A. Comme A est un sous-anneau, $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie ; comme A est stable par limite de suites bornées, $\mathcal{C}$ est stable par intersection dénombrable. De plus, si $g \in \mathrm{A}$, on a aussi $1 - g \in \mathrm{A}$, donc $\mathcal{C}$ est stable par passage au complémentaire. Donc $\mathcal{C}$ est une tribu. Pour savoir que $\mathcal{C}$ contient tous les boréliens, il suffit de montrer que $\mathcal{C}$ contient tous les fermés. Soit F un fermé non vide de K ; notons $h_0 : \mathrm{K} \to \mathbb{R}$ la fonction qui à $x \in \mathrm{K}$ associe sa distance à F. Posons $g = \sup(1 - h_0, 0)$ et $g_n = g^n$. Pour tout n on a $g_n \in \mathrm{C}(\mathrm{K}) \subset \mathrm{A}$; de plus la suite (g_n) est bornée et converge simplement vers la fonction caractéristique de F. On a montré que $\mathrm{K} \in \mathcal{C}$.

//

Soient H un espace de Hilbert, $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ normal et f une fonction borélienne sur $\mathrm{Sp}(\mathrm{T})$; l'élément $\Phi(f)$ défini dans le théorème 4 se note encore $f(\mathrm{T})$.

Exemple 10.3.5. Soit T un opérateur normal sur un espace de Hilbert complexe (resp : un opérateur hermitien sur un Hilbert réel ou complexe) ; si $f = \mathbf{1}_\mathrm{A}$ est l'indicatrice d'un borélien de $\mathbb{C}$ (resp : de $\mathbb{R}$) contenu dans le spectre de T, et si $\mathrm{P} = f(\mathrm{T})$, on aura $\mathrm{P}^* = \mathrm{P}$ parce que f est réelle, et $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}$ parce que $f^2 = f$. L'opérateur P est donc un projecteur orthogonal. On dit que P est un *projecteur spectral*. Puisque P est obtenu par calcul fonctionnel, il commute avec T et T^*, donc l'image $\mathrm{P}(\mathrm{H})$ est stable par T et T^*, ce qui permet de considérer la restriction S de T à $\mathrm{F} = \mathrm{P}(\mathrm{H})$, qui est un opérateur normal (resp : hermitien) sur le sous-espace F. On peut voir que si F n'est pas nul, le spectre de S est contenu dans l'adhérence de l'ensemble A.