Université de Paris 7 **2004-2005**
CAPES: Ecrit

Géométrie affine II

Exercice I:

On considère une translation t et une homothétie h d'un espace affine. Identifier les applications $f_1 = t \circ h \circ t$, $f_2 = h^{-1} \circ t \circ h$ et $f_3 = t \circ h \circ t^{-1}$.

Exercice II:

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E. Trouver toutes les applications affines $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ telles que pour tout $u \in E$, $t_u \circ f = f \circ t_u$.

Exercice III:

Montrer que l'ensemble composé des translations et des symétries centrales d'un espace affine est un groupe pour la composition. Est-il commutatif?

Exercice IV:

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et G un sous-groupe fini du groupe affine de $\mathcal{E}$. Montrer qu'il existe un point de $\mathcal{E}$ qui est fixe pour tous les éléments de G.

Exercice V:

Dans l'espace affine $\mathbb{R}^2$ muni du repère cartésien (O, e_1, e_2), on considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $2x + y - 2 = 0$. Donner l'expression analytique de la symétrie par rapport à $\mathcal{D}$ de direction $e_1 + e_2$.

Exercice VI:

Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$ muni du repère cartésien (O, e_1, e_2, e_3), on considère l'application affine f définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(y + z + 3) \\ y' = \frac{1}{2}(y + z + 5) \\ z' = \frac{1}{2}(y + z + 7) \end{cases}$$

On note $\overrightarrow{f}$ l'application linéaire associée à f.

1) Montrer que $\overrightarrow{f}$ est une projection (on précisera ses caractéristiques). f est-elle une projection?

2) Soit t la translation de vecteur $(3, 3, 3)$. Identifier l'application affine $f \circ t$.

Exercice VII:

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel de direction E. On suppose que $E = F \oplus D$ avec D une droite vectorielle. Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction F, et soit p la projection affine sur $\mathcal{F}$ parallèlement à D. Pour tout réel k, on définit $a_k(M) = p(M) + k(M - p(M))$ pour tout $M \in \mathcal{E}$. Montrer que a_k est une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ (on déterminera en particulier son application linéaire associée). Déterminer l'ensemble de ses points fixes. (a_k est appelée l'*affinité de direction D, d'hyperplan $\mathcal{F}$ et de rapport k*)

Exercice VIII:

Si E est un espace vectoriel de dimension 2, un endomorphisme de E est appelé *transvection vectorielle* s'il existe une base où sa matrice est $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(\alpha \neq 0)$.

Soit maintenant $\mathcal{E}$ un plan affine de direction E et O un point de $\mathcal{E}$. On définit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ par $f(M) = O + u(M - O)$ où u est une transvection vectorielle.

1) Montrer que f est une bijection affine (appelée *transvection affine*). Déterminer l'ensemble de ses points fixes.

2) Soit A, B, C, A' tels que $f(B) = B$, $f(C) = C$ et $f(A) = A'$. Que peut-on dire de la droite (AA')? Construire à la règle $f(M)$ quand M est un point quelconque du plan.

3) Montrer que la composée de deux symétries par rapport à une même droite est en général une transvection.

Exercice IX:

Soit X et Y deux ensembles convexes d'un espace affine $\mathcal{E}$. Démontrer que l'ensemble Z des milieux des segments qui joignent un point de X à un point de Y est convexe.

Exercice X:

(Théorème de Lucas) Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients complexes de degré n admettant n racines distinctes. Montrer que l'ensemble des racines de $P'(X)$ se trouve dans l'enveloppe convexe de l'ensemble des racines de $P(X)$.

Indication : on pourra considérer la dérivée logarithmique $P'(X)/P(X)$.