Université de Paris 7 **2003-2004**
CAPES: Ecrit

Espaces vectoriels euclidiens

Exercice I:

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3.

1) Montrer que toute rotation est le produit de deux réflexions. Montrer que toute isométrie à point fixe unique est produit de trois réflexions. En déduire que $O(E)$ est engendré par les réflexions.

2) Montrer que toute rotation est produit de deux retournements. En déduire que $SO(E)$ est engendré par les retournements.

Exercice II:

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n.

1) Soit u et v deux vecteurs de E distincts et de même norme. Montrer qu'il existe une unique réflexion qui échange u et v.

2) Montrer que toute isométrie de E dont l'ensemble des points fixes est de dimension l est produit de $n-l$ réflexions.

Indication : récurrence sur $p = n - l$.

Exercice III:

Soit R une rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe $\mathbb{R}u$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. Soit f une isométrie quelconque de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $f \circ R \circ f^{-1}$. En déduire le centre de $SO_3(\mathbb{R})$.

Exercice IV:

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Soit f un endomorphisme non nul de E. Montrer que f est une rotation si et seulement si pour tout $(u, v) \in E^2$, $f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v)$.

Exercice V:

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ du retournement d'axe $\mathbb{R}(1, 2, 1)$.

Exercice VI:

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3. On considère les transformations géométriques f, g et h de E dont les matrices respectives dans la base canonique sont

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}.$$

Reconnaître f, g et h et donner leurs éléments caractéristiques.

Exercice VII:

Dans un plan vectoriel euclidien orienté, soit ρ la rotation d'angle $2\pi/n$, u un vecteur unitaire, σ la symétrie par rapport à $Vect(u)$. On pose pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $P_i = \rho^i(u)$. On appelle D_n le groupe des isométries qui envoient le polygone régulier $P_0P_1 \ldots P_{n-1}$ sur lui-même.

1) Montrer tout élément de D_n est de la forme ρ^i ou $\rho^i\sigma$ pour un $i \in \{0, \ldots n-1\}$. Décrire géométriquement ces éléments. Quel est l'ordre de D_n?

2) Expliciter le produit de deux éléments quelconques de D_n.

Exercice VIII:

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère le cube dont les sommets ont des coordonnées égales à ± 1. On appelle A_1, B_1, C_1 et D_1 les quatre sommets d'une face du cube et A_2, B_2, C_2 et D_2 les sommets opposés (symétriques par rapport a 0). On appelle H le groupe des isométries vectorielles de $\mathbb{R}^3$ qui envoient le cube sur lui-même.

1) Montrer que tout élément de H permute les paires de sommets opposés. En déduire un homomorphisme Φ de H dans $\mathcal{S}_4$.

2) Déterminer le noyau de Φ.

3) Soit H^+ le sous-ensemble des déplacements de H. Montrer que H^+ est un sous-groupe de H. Quelle est l'image par Φ des retournements d'axe passant par les milieux des côtés opposés du cube? En déduire que la restriction de Φ à H^+ est surjective, puis montrer que c'est un isomorphisme.

4) Quel est l'ordre de H^+? Décrire tous ses éléments.

5) On considère l'application $\lambda : H^+ \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to H$ définie par $\begin{cases} \lambda(f,0) = f \\ \lambda(f,1) = -id \circ f \end{cases}$ Montrer que λ est un isomorphisme de groupes. En déduire que H est isomorphe à $\mathcal{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice IX:

Soit G un sous-groupe distingué du groupe spécial orthogonal $SO_3(\mathbb{R})$. On suppose que G n'est pas trivial.

1) Soit $f \in G - \{\mathrm{id}_E\}$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note θ_n la mesure dans $[-\pi, \pi]$ de l'angle de la rotation f^{2^n}. Montrer que si $\cos\theta_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\theta_0 = 0$.

b) Déduire qu'il existe une rotation $g \in G$ d'angle θ telle que $\cos\theta < 0$.

c) Montrer qu'il existe $\overrightarrow{x} \in E \setminus \{0\}$ tel que $\overrightarrow{x}$ et $g(\overrightarrow{x})$ soient orthogonaux.

d) On note ρ le retournement autour de $\mathbb{R}\overrightarrow{x}$ et $r = \rho \circ g \circ \rho \circ g^{-1}$. Etablir que r est un retournement et que $r \in G$.

On a ainsi prouvé que G contient au moins un retournement.

2) Soit s un retournement de E autre que r. On note $\overrightarrow{u}$ (resp. $\overrightarrow{v}$) un vecteur directeur normé de l'axe du retournement r (resp. s).

a) Montrer qu'il existe un retournement σ tel que $\sigma(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$ et $\sigma(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}$.

b) Etablir $s = \sigma \circ r \circ \sigma^{-1}$.

c) En déduire que G contient tous les retournements de E, puis que $G = SO_3(\mathbb{R})$.

On a ainsi prouvé que $SO_3(\mathbb{R})$ est un groupe simple.