EQUIVALENCES DERIVEES

ET

K-THEORIE

d'après Thomason-Trobaugh

par

J. Dalpayrat-Glutron

Mémoire de D.E.A.
sous la direction de B. Keller

Université Denis Diderot — Paris 7
Mai 1999

Introduction

Deux algèbres sur un corps sont *équivalentes par dérivation* si leurs catégories dérivées de modules sont équivalentes en tant que catégories triangulées ([10] [11]). Dans ce cas, elles partagent de nombreux invariants homologiques, tels que l'homologie et la cohomologie de Hochschild, les différentes homologies cycliques([4] [11] [5]). Il est connu que de telles algèbres partagent aussi leur K-théorie. Pour des algèbres noethériennes de dimension globale finie, ceci est un corollaire de la construction de A. Neeman d'une K-théorie pour les catégories triangulées ([6] [7] [8]). La construction de A. Neeman occupe une centaine de pages. Par ailleurs, R. W. Thomason et T. Trobaugh donnent le résultat mais dans le cas particulier où l'équivalence est induite par un foncteur complicial ([12] section 1.2.16). De nombreuses équivalences dérivées ne sont pas induites par des foncteurs compliciaux; comme le produit tensoriel dérivé par un complexe de bimodules non concentré en un seul degré. Dans ce mémoire, nous exposons la démonstration de Thomason-Trobaugh dans un cadre légèrement modifié et sans faire appel à l'hypothèse de complicialité.

L'ingrédient principal de la démonstration est le théorème d'approximation de Waldhausen; en invoquant aussi le théorème d'additivité de Waldhausen, nous montrons que la K-théorie supérieure est même préservée par équivalence K-théorique [5], comme l'homologie de Hochschild et les homologies cycliques, et à la différence de la cohomologie de Hochschild.

Table des matières

1 Equivalences dérivées et K-théorie

Soit k un anneau commutatif, et A et B deux k-algèbres. On suppose que A et B sont plates en tant que k-modules. Notons $\mathcal{D}\,\mathsf{Mod}\,A$ la *catégorie dérivée* de $\mathsf{Mod}\,A$, la catégorie des A-modules à droite, $\mathcal{D}^b(\mathsf{Mod}\,A)$ la *catégorie dérivée bornée*, et $\mathsf{par}\,A$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}\,\mathsf{Mod}\,A$ formée des complexes *parfaits*, i.e. (quasi-)isomorphes à des complexes bornés dont les composantes sont des A-modules projectifs de type fini.

Définition Les algèbres A et B sont *équivalentes par dérivation* et on note $A \overset{der}{\sim} B$, s'il existe une équivalence de catégories triangulées $\mathcal{D}\,\mathsf{Mod}\,A \to \mathcal{D}\,\mathsf{Mod}\,B$.

Théorème 1 *(Rickard [10]) Les propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) *A et B sont équivalentes par dérivation.*

(ii) *Il existe un complexe de A-B-bimodules X tel que le foncteur dérivé total* $? \otimes^{\mathbb{L}}_A X \ : \ \mathcal{D}\,\mathsf{Mod}\,A \to \mathcal{D}\,\mathsf{Mod}\,B$ *soit une équivalence de catégories.*

(iii) *Il existe une équivalence de catégories triangulées* $\mathcal{D}^b(\mathsf{Mod}\,A) \to \mathcal{D}^b(\mathsf{Mod}\,B)$.

(iv) *Il existe une équivalence de catégories triangulées* $\mathsf{par}\,A \ \to \ \mathsf{par}\,B$.

(v) *Il existe un complexe T de $\mathcal{D}\,\mathsf{Mod}\,B$ tel que*

- **a)** *Le complexe T est dans* $\mathsf{par}\,B$,
- **b)** *On a* $\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}\,\mathsf{Mod}\,B}(T,T) \cong A$ *et* $\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}\,\mathsf{Mod}\,B}(T,T[n]) = 0$ *pour tout* $n \neq 0$,
- **c)** *La sous-catégorie* $\mathsf{par}\,B$ *est la plus petite sous-catégorie triangulée strictement pleine de* $\mathcal{D}\,\mathsf{Mod}\,B$ *contenant T et stable par facteurs directs.*

T est un *complexe basculant* et X un *complexe basculant bilatère.*
Notons $(K_i(A))_{i\in\mathbb{N}}$ la K-théorie de A (selon Quillen [9]).

Théorème 2 *Soit A et B deux k-algèbres plates en tant que k-modules. Si A et B sont équivalentes par dérivation, alors leurs K-théories sont isomorphes :*

$$K_*(A) \cong K_*(B).$$

2 Catégories de complexes

2.1 Notations, rappels sur les catégories stables et triangulées

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive, $\mathcal{C}\,\mathcal{A}$ la catégorie des complexes sur $\mathcal{A}$, $\mathcal{H}\mathcal{A}$ sa catégorie homotopique. La catégorie $\mathcal{C}\mathcal{A}$ munie des suites exactes courtes scindées en chaque degré est exacte au sens de Quillen. Une *conflation* est une suite exacte pour cette structure, le mono scindé en chaque degré y apparaissant est une *inflation*, l'épi scindé en chaque degré est une *déflation*; on les notera $\rightarrowtail$ (resp. $\twoheadrightarrow$). Soit $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathcal{C}\mathcal{A}$. Le foncteur *cône* est défini de la catégorie des morphismes de $\mathcal{C}\mathcal{A}$ dans la catégorie $\mathcal{C}\mathcal{A}$: le complexe $C(f)$ est défini par :

$$C^{\cdot}(f) = Y^{\cdot} \oplus X^{\cdot+1},$$

où la différentielle est

$$d^n_{C(f)} = \begin{pmatrix} d_Y & f^{n+1} \\ 0 & -d_X \end{pmatrix},$$

et si un morphisme de $\mathcal{C}\mathcal{A}$ est représenté par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ a\downarrow & & \downarrow b \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y', \end{array}$$

le cône de ce diagramme est le morphisme

$$\begin{array}{c} C(f) \\ \downarrow \\ C(f') \end{array}$$

de composante $b \oplus a[1]$. Posons $IX = C(\mathbf{1}_X)$. Cela définit un foncteur de $\mathcal{C}\mathcal{A}$ dans $\mathcal{C}\mathcal{A}$. Pour un complexe A, notons $SA = A[1]$ le complexe tel que $A[1]^n = A^{n+1}$ et $d_{A[1]} = -d_A$, et notons Ω et P les foncteurs de $\mathcal{C}\mathcal{A}$ dans $\mathcal{C}\mathcal{A}$ tels que $\Omega\,A = S^{-1}A$ et $PA = IS^{-1}A \simeq S^{-1}IA$. On dispose alors de deux conflations

$$A \overset{i_A}{\rightarrowtail} IA \overset{p_A}{\twoheadrightarrow} SA\,, \quad \text{où} \quad i_A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ d \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad p_A = [-d \ \ \mathbf{1}].$$

et
$$\Omega A \overset{j_A}{\rightarrowtail} PA \overset{q_A}{\twoheadrightarrow} A \quad \text{où} \quad j_A = i_{S^{-1}A} \quad \text{et} \quad q_A = p_{S^{-1}A}.$$
Le cône $C(f)$ est l'objet unique à isomorphisme près rendant cocartésien le diagramme
$$\begin{array}{ccc} X & \overset{i_A}{\to} & IX \\ f\downarrow & & \downarrow \\ Y & \to & C(f) \end{array} .$$
L'objet IA est injectif, c'est-à-dire possède la propriété d'extension par rapport aux inflations. On a les propriétés équivalentes suivantes:

- A est injectif
- A est projectif
- $A \rightarrowtail IA \twoheadrightarrow SA$ se scinde
- A est contractile

Donc la catégorie $\mathcal{CA}$ a assez d'injectifs et les injectifs coïncident avec les projectifs, c'est-à-dire $\mathcal{CA}$ est *de Frobenius*. Soit A et C deux complexes. Une *extension* de C par A est un objet B apparaissant dans une conflation $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$. Un *foncteur exact* est un foncteur entre catégories exactes préservant les conflations. Une sous-catégorie exacte $\mathcal{B}$ d'une catégorie exacte $\mathcal{A}$ est *pleinement exacte* si les conflations de $\mathcal{B}$ sont exactement les conflations de $\mathcal{A}$ dont les objets sont dans $\mathcal{B}$.

La *catégorie stable* $\underline{\mathcal{A}}$ d'une catégorie $\mathcal{A}$ de Frobenius a pour objets les objets de $\mathcal{A}$, et pour morphismes les classes d'équivalence de morphismes de $\mathcal{A}$ modulo les morphismes se factorisant par un injectif.

Dans la catégorie $\underline{\mathcal{A}}$, un *prétriangle* est un diagramme de la forme $A \to B \to C \to SA$, un morphisme de prétriangles est un diagramme commutatif
$$\begin{array}{ccccccc} A & \to & B & \to & C & \to & SA \\ \downarrow a & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow Sa \\ A' & \to & B' & \to & C' & \to & SA'. \end{array}$$
Un morphisme de prétriangles est un isomorphisme si les quatre flèches verticales du diagramme précédent sont des isomorphismes. Appelons *triangle standard* de $\underline{\mathcal{A}}$ un prétriangle de la forme $A \xrightarrow{\underline{i}} B \xrightarrow{\underline{p}} C \xrightarrow{\underline{e}} SA$, oú $\underline{i}, \underline{p}, \underline{e}$ sont les images dans $\underline{\mathcal{A}}$ des morphismes provenant du diagramme dans $\mathcal{A}$:
$$\begin{array}{ccccc} A & \overset{i}{\rightarrowtail} & B & \overset{p}{\twoheadrightarrow} & C \\ \| & & \downarrow & & \downarrow e \\ A & \overset{i_A}{\rightarrowtail} & IA & \overset{p_A}{\twoheadrightarrow} & SA. \end{array}$$
Appelons *triangle* un prétriangle isomorphe à un triangle standard. Munie de ces triangles, $\underline{\mathcal{A}}$ porte une structure triangulée dont la suspension est le foncteur $\{A \mapsto SA\}$. La catégorie homotopique $\mathcal{HA} := \underline{\mathcal{CA}}$ porte donc par exemple une structure triangulée, qui coïncide avec la structure triangulée standard. Un foncteur entre deux catégories triangulées $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ est *triangulé* si c'est un foncteur additif muni d'un morphisme de foncteurs $\varphi : F \cdot S \to S \cdot F$ tel que
$$FX \xrightarrow{Fu} FY \xrightarrow{Fv} FZ \xrightarrow{\varphi X \cdot Fw} SFX$$
soit un triangle pour tout triangle $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} SX$ de $\mathcal{F}$.

Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des catégories de Frobenius, tout foncteur exact $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ préservant l'injectivité induit un foncteur triangulé entre les catégories stables associées.

2.2 Cadre $(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}, \mathcal{N})$

Un $\mathcal{D}$-triplet consiste en

- une petite catégorie additive $\mathcal{B}_0$
- une sous-catégorie pleine $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}\,\mathcal{B}_0$, stable par extensions (scindées en chaque degré) et translations
- une sous-catégorie pleine $\mathcal{N}$ de $\mathcal{B}$, stable par extensions (scindées en chaque degré) et translations.

Soit $(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}, \mathcal{N})$ un $\mathcal{D}$-triplet: $\mathcal{B}$ est une sous-catégorie pleinement exacte de $\mathcal{C}\,\mathcal{B}_0$, et $\mathcal{N}$ une sous-catégorie pleinement exacte de $\mathcal{B}$. Alors $\underline{\mathcal{B}}$ est une sous-catégorie triangulée de $\mathcal{H}\mathcal{B}_0$, et $\underline{\mathcal{N}}$ une sous-catégorie triangulée de $\underline{\mathcal{B}}$. Soient $(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}, \mathcal{M})$ et $(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}, \mathcal{N})$ deux $\mathcal{D}$-triplets. Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur additif. Alors on a équivalence entre:

- F admet un isomorphisme de foncteurs $F \cdot C \simeq C \cdot F$, où C est le foncteur cône défini au 2.1
- F est exact et admet un isomorphisme de foncteurs $F \cdot I \simeq I \cdot F$.

En outre, si F est exact, alors tout isomorphisme $F \cdot I \simeq I \cdot F$ s'étend en un unique isomorphisme $F \cdot C \simeq C \cdot F$. On appelle *$\mathcal{D}$-foncteur* un foncteur exact $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ muni d'un isomorphisme de foncteurs $F \cdot C \simeq C \cdot F$ et tel que $F\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$. Notons qu'un $\mathcal{D}$-foncteur préserve les injectifs.

Pour tout $\mathcal{D}$-triplet $(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}, \mathcal{N})$, notons $\Sigma_{\underline{\mathcal{N}}}$ l'ensemble des morphismes s de $\underline{\mathcal{B}}$ apparaissant dans un triangle $X \xrightarrow{s} Y \to N \to SX$ où N est dans $\mathcal{N}$. Puisque $\underline{\mathcal{N}}$ est une sous-catégorie triangulée de $\underline{\mathcal{B}}$, l'ensemble $\Sigma_{\underline{\mathcal{N}}}$ admet [13] un calcul des fractions à gauche et à droite, et la catégorie localisée $\underline{\mathcal{B}}\left[\Sigma_{\underline{\mathcal{N}}}^{-1}\right]$ munie du foncteur induit par S et des triangles isomorphes à des images de triangles de $\underline{\mathcal{B}}$ par le foncteur localisation, porte une unique structure triangulée telle que le foncteur localisation can commute à la translation et que $(\mathsf{can}, \mathbf{1})$ soit un foncteur triangulé. On appelle $\underline{\mathcal{B}}\left[\Sigma_{\underline{\mathcal{N}}}^{-1}\right]$ la catégorie triangulée associée au $\mathcal{D}$-triplet $(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}, \mathcal{N})$ et on la note $\mathcal{T}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}, \mathcal{N})$ ou $\mathcal{T}\mathcal{B}$.

Si F est un $\mathcal{D}$-foncteur entre $(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}, \mathcal{M})$ et $(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}, \mathcal{N})$, alors $F(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{N}$, puis $F(\underline{\mathcal{M}}) \subseteq \underline{\mathcal{N}}$ puisque F préserve les injectifs. Alors $F(\Sigma_{\underline{\mathcal{M}}}) \subseteq \Sigma_{\underline{\mathcal{N}}}$; puisque F induit un foncteur triangulé $\underline{\mathcal{A}} \to \underline{\mathcal{B}}$, il s'ensuit que F induit un foncteur triangulé entre les catégories localisées: $\mathcal{T}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}, \mathcal{M}) \to \mathcal{T}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}, \mathcal{N})$.

La K-théorie de Waldhausen permettra de définir (3.2) la K-théorie d'un triplet $(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}, \mathcal{N})$, que l'on notera $K_*(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}, \mathcal{N})$ ou $K_*\mathcal{B}$.

Théorème 3 *Soit F un $\mathcal{D}$-foncteur du triplet $(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}, \mathcal{M})$ dans le triplet $(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}, \mathcal{N})$. Si F induit une équivalence des catégories triangulées associées*

$$\mathcal{T}\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}\mathcal{B},$$

alors F induit un isomorphisme en K-théorie:

$$K_*\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} K_*\mathcal{B}.$$

2.3 Réduction du théorème 2 au théorème 3

Pour un anneau A, on note $\mathsf{strparc}\,A$ la sous-catégorie pleine des complexes strictement parfaits de $\mathcal{C}\mathsf{Mod}\,A$ c'est-à-dire des complexes bornés de modules (à droite) projectifs de type fini, et $\mathsf{parc}\,A$ sa fermeture par quasi-isomorphismes, i.e. la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}\,\mathsf{Mod}\,A$ dont l'image dans $\mathcal{D}\,\mathsf{Mod}\,A$ est $\mathsf{par}\,A$ (section 1). Soient A et B deux k-algèbres, plates en tant que k-modules. Supposons-les équivalentes par dérivation. Soit X un complexe basculant bilatère donné par le théorème de Rickard (section 1). Le foncteur dérivé $? \otimes_A^{\mathbb{L}} X$ de $\mathsf{par}\,A$ dans $\mathsf{par}\,B$ est une équivalence de catégories qui se relève en un foncteur $? \otimes_A X$ de $\mathsf{strparc}\, A$ dans $\mathsf{parc}\, B$. On a alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{strparc}\, A & \xrightarrow{? \otimes_A X} & \mathsf{parc}\, B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{par}\, A & \xrightarrow{? \otimes^{\mathbb{L}}_A X} & \mathsf{par}\, B \end{array} .$$

Par définition du foncteur dérivé $? \otimes^{\mathbb{L}}_A X$, ce diagramme est commutatif (à isomorphisme de foncteurs près). Notons $\mathcal{N}_A$ et $\mathcal{N}_B$ les sous-catégories des complexes acycliques de $\mathcal{C}\,\mathsf{Mod}\, A$ et $\mathcal{C}\,\mathsf{Mod}\, B$.

Lemme 2.3.1 • *les triplets* $(\mathsf{Mod}\, A, \mathsf{strparc}\, A, \mathcal{N}_A \cap \mathsf{strparc}\, A)$ *et* $(\mathsf{Mod}\, B, \mathsf{parc}\, B, \mathcal{N}_B \cap \mathsf{parc}\, B)$ *sont des* $\mathcal{D}$*-triplets, dont les catégories triangulées associées s'identifient à* $\mathsf{par}\, A$ *(resp.* $\mathsf{par}\, B$*).*

- *le foncteur* $? \otimes_A X$ *est un* $\mathcal{D}$*-foncteur de*

$$(\mathsf{Mod}\, A, \mathsf{strparc}\, A, \mathcal{N}_A \cap \mathsf{strparc}\, A) \text{ dans } (\mathsf{Mod}\, B, \mathsf{parc}\, B, \mathcal{N}_B \cap \mathsf{parc}\, B).$$

Dans les catégories triangulées associées, il induit le foncteur dérivé $? \otimes^{\mathbf{L}}_A X : \mathsf{par}\, A \to \mathsf{par}\, B$.

Remarque La deuxième assertion de ce lemme immédiat permet d'éviter l'hypothèse de complicialité de R. W. Thomason, puisque nous verrons en effet dans le lemme 3.3.1 qu'un $\mathcal{D}$-foncteur conserve les produits fibrés homotopiques (définis dans la section 3.3), unique propriété demandée aux foncteurs requiérant l'hypothèse de complicialité.

On applique le théorème 3 au foncteur $? \otimes_A X$ pour conclure à un isomorphisme en K-théorie :

$$K_*(\mathsf{strparc}\, A) \xrightarrow{\sim} K_*(\mathsf{parc}\, B)$$

D'autre part, le foncteur $\mathsf{strparc}\, B \overset{i}{\hookrightarrow} \mathsf{parc}\, B$ est un $\mathcal{D}$-foncteur et satisfait les hypothèses du théorème 3, d'où l'isomorphisme :

$$K_*(\mathsf{strparc}\, B) \xrightarrow{\sim} K_*(\mathsf{parc}\mathcal{B}).$$

On conclut grâce au théorème de Gillet:

Théorème 4 *(Gillet [2]) On a un isomorphisme canonique :*

$$K_*(A) \xrightarrow{\sim} K_*(\mathsf{strparc}\, A) .$$

3 K-théorie de Waldhausen

3.1 Catégories de Waldhausen

Définition: On appelle *catégorie de Waldhausen* la donnée suivante:

i) une catégorie $\mathcal{A}$, munie d'un objet 0

ii) une sous-catégorie $co(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$, dont les morphismes sont appelés *cofibrations* et notés $\rightarrowtail$, vérifiant:

 – tout isomorphisme est une cofibration
 – pour tout A dans $\mathcal{A}$, l'unique morphisme $0 \to A$ est une cofibration
 – tout diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrowtail & B \\ \downarrow & & \\ C & & \end{array} ,$$

où $A \rightarrowtail B$ est une cofibration, se complète en un diagramme cocartésien:

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \rightarrow & B \cup_A C\ , \end{array}$$

où $B \cup_A C$ est dans $\mathcal{A}$ et $C \to B \cup_A C$ est une cofibration;

iii) une sous-catégorie $w(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$, dont les morphismes sont les *équivalences faibles*, notées $\xrightarrow{\sim}$, qui vérifie:

   – tout isomorphisme est dans $w(\mathcal{A})$

   – pour tout diagramme

$$\begin{array}{ccccc} B & \leftarrowtail & A & \rightarrow & C \\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ B' & \leftarrowtail & A' & \rightarrow & C' \end{array} ,$$

   le morphisme induit $B \cup_A C \xrightarrow{\sim} B' \cup_{A'} C'$ est une équivalence faible.

La donnée seule de i) et ii) définit une *catégorie avec cofibrations*.

Soit $A \rightarrowtail B$ une cofibration de $\mathcal{A}$ catégorie avec cofibrations; alors le *quotient* B/A de B par A est l'objet unique à isomorphisme près qui apparaît dans le carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrowtail & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrowtail & B/A \end{array}$$

Une suite $A \rightarrowtail B \to C$ est *cofibrante* si $C \simeq B/A$. On appelle $B \to C$ un *morphisme quotient*, et on le note $B \twoheadrightarrow C$.

Une catégorie avec cofibrations $\mathcal{A}$ est avec *bifibrations* si les conditions suivantes sont réalisées:

- les morphismes quotients sont les morphismes d'une sous-catégorie $\mathsf{quot}(\mathcal{A})$,
- la catégorie opposée $\mathcal{A}^{\mathsf{op}}$ est une catégorie avec cofibrations, de cofibrations $co(\mathcal{A}^{\mathsf{op}}) :=$ quot$(\mathcal{A})^{\mathsf{op}}$,
- le produit et le coproduit de deux objets sont isomorphes,
- pour tous A, B, C dans $\mathcal{A}$, la suite $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ est cofibrante dans $\mathcal{A}$ si et seulement si $C \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A$ est une suite cofibrante de $\mathcal{A}^{\mathsf{op}}$,

Une catégorie avec bifibrations est de *biWaldhausen* si $(\mathcal{A},\ co(\mathcal{A})\ ,\ w(\mathcal{A})\ )$ et $(\mathcal{A}^{\mathsf{op}}, \mathrm{quot}(\mathcal{A})^{\mathsf{op}}, w(\mathcal{A})^{\mathsf{op}})$ sont deux catégories de Waldhausen .

Une catégorie de Waldhausen $\mathcal{A}$ est *saturée* si pour tous morphismes composables $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, les morphismes $f, g, f.g$ sont dans $w(\mathcal{A})$ dès que deux d'entre eux le sont.

Elle est *stable par extension* si pour tout morphisme de suites cofibrantes

$$\begin{array}{ccccc} A & \rightarrowtail & B & \twoheadrightarrow & C \\ \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c \\ A' & \rightarrowtail & B' & \twoheadrightarrow & C', \end{array}$$

b est dans $w(\mathcal{A})$ dès que a et c le sont.

Une catégorie de biWaldhausen est saturée (resp. stable par extension) si elle l'est en tant que catégorie de Waldhausen .

Un foncteur entre deux catégories de Waldhausen $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est *exact* s'il conserve les cofibrations, les équivalences faibles, et la formation des carrés cocartésiens le long des cofibrations, i.e. le morphisme canonique
$$FC \cup_{FA} FB \xrightarrow{\sim} F(C \cup_A B)$$
est un isomorphisme de $\mathcal{B}$ pour tout C de $\mathcal{A}$ et toute cofibration $A \rightarrowtail B$. Si les catégories sont de biWaldhausen , il est *exact* si $F : (\mathcal{A},\, co(\mathcal{A})\,,\, w(\mathcal{A})\,) \to (\mathcal{B}, co(\mathcal{B}), w(\mathcal{B}))$ et

$$F^{\mathsf{op}} : (\mathcal{A}^{\mathsf{op}}, \mathrm{quot}(\mathcal{A})^{\mathsf{op}}, w(\mathcal{A})^{\mathsf{op}}) \to (\mathcal{B}^{\mathsf{op}}, \mathrm{quot}(\mathcal{B})^{\mathsf{op}}, w(\mathcal{B})^{\mathsf{op}})$$

sont exacts.

Un foncteur *cylindre* sur une catégorie de Waldhausen est la donnée suivante:

- un foncteur T de la catégorie $\mathsf{Mor}(\mathcal{A})$ des morphismes de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{A}$
- trois morphismes de foncteurs p, j_1, j_2, tels que pour $f : A \to B$:
  - $j_1(f) : \mathsf{source}(f) \to T(f)$
  - $j_2(f) : \mathsf{but}(f) \to T(f)$
  - $p(f) : T(f) \to \mathsf{but}(f)$
  - $p \cdot j_1 = f$
  - $p \cdot j_2 = \mathbf{1}$ i.e. le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "j_1"] \arrow[dr, "f"'] & T(f) \arrow[d, "p"] & B \arrow[l, "j_2"'] \arrow[dl, equal] \\ & B & \end{tikzcd}$$

  est commutatif; de plus:
  - $j_1 \cup j_2 : A \cup_0 B \rightarrowtail T(f)$ est une cofibration
  - si $f : 0 \to A$, $T(f) = A$, et p et j_2 sont l'identité.

Un foncteur cylindre *vérifie l'axiome du cylindre* si, de plus, $p(f) : T(f) \to B$ est une équivalence faible pour tout $f : A \to B$ (si $\mathcal{A}$ est saturée, on a donc $j_2 \in w(\mathcal{A})$).

Un foncteur *cocylindre* sur une catégorie dont la catégorie opposée est de Waldhausen est défini par dualité : c'est un foncteur M de $\mathsf{Mor}(\mathcal{A})$ vers $\mathcal{A}$, muni de trois morphismes de foncteurs k_1, k_2, q tels que, pour $f : A \to B$, on a :

- $k_1(f) : M(f) \to \mathsf{but}(f)$
- $k_2(f) : M(f) \to \mathsf{source}(f)$
- $q(f) : \mathsf{source}(f) \to M(f)$

tels que (M, k_1, k_2, q) soit un foncteur cylindre sur $(\mathcal{A}^{\mathsf{op}}, \mathrm{quot}(\mathcal{A})^{\mathsf{op}}, w(\mathcal{A})^{\mathsf{op}})$. Il vérifie *l'axiome du cocylindre* si de plus $A \xrightarrow{q(f)} M(f)$ est une équivalence faible pour tout $f : A \to B$.

3.2 K-théorie de Waldhausen

Soit $\mathcal{C}$ une (petite) catégorie de Waldhausen . Soit $[n]$ la catégorie dont les objets sont $0, 1, \cdots, n$ et l'ensemble des morphismes de i vers j est formé d'un unique morphisme si $i \leq j$ et vide sinon. Soit $\mathsf{Mor}[n]$ la catégorie dont les objets sont les morphismes de la catégorie $[n]$, et l'ensemble des morphismes de $(i \to j)$ vers $(i' \to j')$ est formé d'un unique morphisme si $i \leq i'$ et $j \leq j'$, et vide sinon. Soit $S_n\mathcal{C}$ la catégorie

- d'objets les foncteurs

$$A : \begin{array}{ccc} \mathsf{Mor[n]} & \to & \mathcal{C} \\ \{i \to j\} & \mapsto & A_{i,j} \end{array}$$

  tels que:

  - $A_{i,i} = 0$, l'objet initial et final de $\mathcal{C}$
  - Le morphisme $A_{i,j} \to A_{i,k}$ est une cofibration quels que soient $i \leq j \leq k$,
  - le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A_{i,j} & \rightarrowtail & A_{i,k} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 = A_{j,j} & \to & A_{j,k} \end{array}$$

    est un carré cocartésien, i.e. $A_{i,j} \rightarrowtail A_{i,k} \twoheadrightarrow A_{j,k}$ est une suite cofibrante quels que soient $i \leq j \leq k$,

- et de morphismes les morphismes de foncteurs.

Pour chaque n, la catégorie $S_n\mathcal{C}$ est équivalente à la catégorie $S'_n\mathcal{C}$ dans laquelle

- un objet est la donnée d'une suite de cofibrations $A_0 \rightarrowtail A_1 \rightarrowtail \cdots \rightarrowtail A_n$, où $A_0 = 0$,
- un morphisme est un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} A_0 & \rightarrowtail & A_1 & \rightarrowtail & \cdots & \rightarrowtail & A_n \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ A'_0 & \rightarrowtail & A'_1 & \rightarrowtail & \cdots & \rightarrowtail & A'_n \end{array}$$

Appelons une cofibration de $S_n\mathcal{C}$ un morphisme de foncteurs $A \to A'$ tel que pour tout i, $A_{0,i} \to A'_{0,i}$ est une cofibration et pour tout i, $A'_{0,i} \cup_{A_{0,i}} A_{0,i+1} \rightarrowtail A'_{0,i+1}$ est une cofibration. Appelons équivalence faible un morphisme $A \to A'$ tel que pour tout i, $A_{0,i} \to A'_{0,i}$ est une équivalence faible (On a alors $A_{i,j} \xrightarrow{\sim} A'_{i,j}$ pour tout i, j par l'axiome de recollement).

Le foncteur

$$S_.\mathcal{C} : \begin{array}{ccc} \Delta^{\mathsf{op}} & \to & \mathsf{Cat.de\ \ Waldhausen} \\ [n] & \mapsto & S_n\mathcal{C} \end{array}$$

est une catégorie de Waldhausen simpliciale.

La structure simpliciale de $S_.\mathcal{C}$ correspond, dans la traduction en termes de suites de cofibrations, aux opérateurs faces et dégénérescences suivants : en degré n, si $\delta_i : [n] \to [n+1]$ est le morphisme "face" strictement croissant qui "oublie" i, alors $\delta_i^* : S'_{n+1}\mathcal{C} \to S'_n\mathcal{C}$ envoie la suite de cofibrations

$$A_0 \overset{a_0}{\rightarrowtail} A_1 \overset{a_1}{\rightarrowtail} \cdots \rightarrowtail A_{i-1} \overset{a_{i-1}}{\rightarrowtail} A_i \overset{a_i}{\rightarrowtail} A_{i+1} \overset{a_{i+1}}{\rightarrowtail} \cdots \overset{a_n}{\rightarrowtail} A_n,$$

sur

$$A_1/A_0 \rightarrowtail A_2/A_0 \rightarrowtail \cdots \rightarrowtail \cdots \rightarrowtail A_n/A_0,$$

si $i = 0$ et sur

$$A_0 \overset{a_0}{\rightarrowtail} A_1 \overset{a_1}{\rightarrowtail} \cdots \rightarrowtail A_{i-1} \overset{a_i \cdot a_{i-1}}{\rightarrowtail} A_{i+1} \rightarrowtail \cdots \rightarrowtail A_n,$$

si $i > 0$. Si $\sigma_i : [n+1] \to [n]$ est le morphisme croissant qui prend deux fois la valeur i, alors $\sigma_i^* : S_n\mathcal{C} \to S_{n+1}\mathcal{C}$ envoie la suite de cofibrations

$$A_0 \overset{a_0}{\rightarrowtail} A_1 \overset{a_1}{\rightarrowtail} \cdots \rightarrowtail A_{i-1} \overset{a_{i-1}}{\rightarrowtail} A_i \overset{a_i}{\rightarrowtail} A_{i+1} \overset{a_{i+1}}{\rightarrowtail} \cdots \overset{a_n}{\rightarrowtail} A_n,$$

sur

$$A_0 \overset{a_0}{\rightarrowtail} A_1 \overset{a_1}{\rightarrowtail} \cdots \rightarrowtail A_{i-1} \overset{a_{i-1}}{\rightarrowtail} A_i \overset{\mathbf{1}}{\rightarrowtail} A_i \overset{a_i}{\rightarrowtail} A_{i+1} \overset{a_{i+1}}{\rightarrowtail} \cdots \overset{a_n}{\rightarrowtail} A_n.$$

Notons que le foncteur

$$S_{\cdot}\mathcal{C} : \begin{array}{ccc} \Delta^{\mathsf{op}} & \rightarrow & \mathsf{Cat.de\ \ Waldhausen} \\ [n] & \mapsto & S_n\mathcal{C} \end{array}$$

est un foncteur simplicial strict, à l'avantage du foncteur $S'_{\cdot}\mathcal{C}$ qui ne vérifie les identités simpliciales qu'à isomorphismes près.

Appelons *catégorie d'équivalences faibles* une catégorie dont les objets sont les mêmes que ceux d'une catégorie de Waldhausen donnée et les morphismes les équivalences faibles entre les objets. Le foncteur

$$wS_{\cdot}\mathcal{C} : \begin{array}{ccc} \Delta^{\mathsf{op}} & \rightarrow & \text{Cat. d'équivalences faibles} \\ [n] & \mapsto & w(S_n\mathcal{C}) \end{array}$$

est une catégorie d'équivalences faibles simpliciale.
Prenons le nerf en chaque degré de $wS.\mathcal{C}$: $\mathcal{N}_p wS_q\mathcal{C}$ est l'ensemble

$$\{W_0 \xrightarrow{f_0} W_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{p-1}} W_p \ \mid \ W_i \in wS_q\mathcal{C},\ f_i \in \mathsf{Mor}(wS_q\mathcal{C})\}.$$

On a alors un ensemble bisimplicial $\mathcal{N}.wS.\mathcal{C}$:

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{\mathsf{op}} \times \Delta^{\mathsf{op}} & \rightarrow & \mathsf{Ens} \\ ([p],[q]) & \mapsto & \mathcal{N}_p wS_q\mathcal{C}. \end{array}$$

Soit $|\mathcal{N}.wS.\mathcal{C}|$ sa réalisation géométrique et $\Omega|\mathcal{N}.wS.\mathcal{C}|$ l'espace des lacets de la réalisation.

Définition : La K-théorie d'une (petite) catégorie de Waldhausen $\mathcal{C}$ est :

$$K_*\mathcal{C} = \pi_*(\Omega|\mathcal{N}.wS.\mathcal{C}|).$$

3.3 Cas particulier: cadre $(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}, \mathcal{N})$

Si $(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}, \mathcal{N})$ est un $\mathcal{D}$-triplet, la catégorie $\mathcal{B}$ munie du complexe nul pour objet initial, des monos scindés en chaque degré comme cofibrations et de l'ensemble $\Sigma_{\mathcal{N}}$ des morphismes de cône dans $\mathcal{N}$ (section 2.2) pour équivalences faibles, est une catégorie de Waldhausen, saturée, stable par extension.

On peut munir une telle catégorie d'un foncteur cylindre en utilisant le cylindre habituel dans une catégorie de complexes: si on a un morphisme $f : A^{\cdot} \rightarrow B^{\cdot}$ le cylindre est défini par:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "{\left[\begin{smallmatrix} i_A \\ f \end{smallmatrix}\right]}"] \arrow[dr, "f"'] & IA \oplus B \arrow[d, "{[0\ \mathbf{1}]}"] & B \arrow[l, "{\left[\begin{smallmatrix} \mathbf{1} \\ 0 \end{smallmatrix}\right]}"'] \arrow[dl, equal] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Soit un coin

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{b} & B \\ c\downarrow & & \\ C & & \end{array} \qquad (*)$$

Pour tout objet D, on considère l'ensemble FD formé des triplets (c', b', h) où $c' : B \rightarrow D$ et $b' : C \rightarrow D$ sont des morphismes et $h : A \rightarrow D$ est une homotopie, tels que $c'b - b'c = dh + hd$. Clairement, $D \rightarrow FD$ est un foncteur représentable de $\mathcal{C}\mathcal{A}$ vers la catégorie des groupes abéliens. La *somme amalgamée homotopique* (ou colimite homotopique) du coin (*) est le représentant de

F. En d'autres termes, c'est un objet P muni d'un triplet $(c'_0, b'_0, h_0) \in FP$ universel parmi tous les triplets (c', b', h) :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "b"] \arrow[d, "c"'] \arrow[dr, "h_0"] \arrow[ddrr, bend left] & B \arrow[d, "b'_0"] \arrow[ddr, bend left] & \\
C \arrow[r, "c'_0"'] \arrow[drr, bend right] & P \arrow[dr, dotted] & \\
& & D
\end{tikzcd}$$

On note cet objet $\quad B \cup^h_A C \;=\; P.$

C'est aussi l'objet unique à isomorphisme près qui rend cocartésien (strictement) le diagramme de $\mathcal{B}$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "{\begin{bmatrix} b \\ i_A \end{bmatrix}}"] \arrow[d, "c"'] & B \oplus IA \\
C &
\end{tikzcd} \quad .$$

On définit le *produit fibré homotopique* (ou limite homotopique) d'un coin

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & & \downarrow \\ C & \rightarrow & A \end{array}$$

de manière duale et on le note $B \times^h_A C$. Alors le cylindre d'un morphisme $f : A \to B$ est la somme amalgamée homotopique du coin

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"'] & A. \\
B &
\end{tikzcd}$$

Ce cylindre vérifie l'axiome du cylindre. On peut définir le cocylindre du morphisme $f : A \to B$, produit fibré homotopique du coin

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r, equal] & B,
\end{tikzcd}$$

par le diagramme

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, equal] \arrow[d, "{\begin{bmatrix} 1 \\ g \end{bmatrix}}"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A & A \oplus PB \arrow[l, "{[1\ \ 0]}"] \arrow[r, "{[0\ \ q_B]}"'] & B
\end{tikzcd}$$

où q_B provient de la conflation $\Omega B \overset{j_B}{\rightarrowtail} PB \overset{q_B}{\twoheadrightarrow} B \quad$ (2.1), et où g est donné en degré n par : $A^n \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix}} B^{n-1} \oplus B^n$. Ce cocylindre vérifie l'axiome du cocylindre.

Lemme 3.3.1 *Un $\mathcal{D}$-foncteur préserve les sommes amalgamées homotopiques et les produits fibrés homotopiques.*

Démonstration La somme amalgamée homotopique du diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{b} & B \\ c\downarrow & & \\ C & & \end{array}$$

dans $\mathcal{B}$, où $\mathcal{B}$ appartient au $\mathcal{D}$-triplet $(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}, \mathcal{N})$, est aussi la somme amalgamée stricte du diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "\begin{bmatrix} b \\ i_A \end{bmatrix}"] \arrow[d, "c"'] & B \oplus IA \\ C & \end{tikzcd} .$$

Un $\mathcal{D}$-foncteur est muni d' un isomorphisme de foncteurs $F \cdot I \simeq I \cdot F$ (section 2.2), et il conserve les sommes amalgamées strictes de diagrammes admissibles : $\begin{array}{ccc} \cdot & \rightarrowtail & \cdot \\ \downarrow & & \\ \cdot & & \end{array}$. Il conserve donc les sommes amalgamées homotopiques.

Lemme 3.3.2 *Soit un* $\mathcal{D}$*-triplet* $(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}, \mathcal{N})$ *et le diagramme dans* $\mathcal{B}$

$$\begin{tikzcd} B^1 \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr] & & {B'}^1 \arrow[dr] & \\ & B^0 \arrow[rr, "\sim"] & & {B'}^0 \\ B^2 \arrow[ur] \arrow[rr, "\sim"] & & {B'}^2 \arrow[ur] & \end{tikzcd} .$$

où chaque rectangle est commutatif à homotopie près et chaque flèche horizontale est un morphisme de cône dans $\mathcal{N}$ *(donc une équivalence faible). On a alors un diagramme*

$$\begin{tikzcd} & B^1 \arrow[rr, "\sim"] \arrow[ddr] & & {B'}^1 \arrow[ddr] & \\ B^3 \arrow[ur] \arrow[rr, dash, dashed, "\sim"] \arrow[ddr] & & {B'}^3 \arrow[ur] \arrow[ddr] & & \\ & & B^0 \arrow[rr, "\sim"] & & {B'}^0 \\ & B^2 \arrow[ur] \arrow[rr, "\sim"] & & {B'}^2 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

où le morphisme entre les produits fibrés homotopiques B^3 *et* ${B'}^3$ *est une équivalence faible, et où chaque rectangle est commutatif à homotopie près.*

Démonstration

Par définition du produit fibré homotopique, on a deux triangles dans $\mathcal{B}$

$$S^{-1}B^0 \to B^3 \to (B^1 \oplus B^2) \to B^0 \quad \text{et} \quad S^{-1}B'^0 \to B'^3 \to (B'^1 \oplus B'^2) \to B'^0.$$

Le morphisme partiel de triangles

$$\begin{array}{ccccccc}
S^{-1}B^0 & \to & B^3 & \to & (B^1 \oplus B^2) & \to & B^0 \\
\downarrow\wr & & & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\
S^{-1}B'^0 & \to & B'^3 & \to & (B'^1 \oplus B'^2) & \to & B'^0
\end{array}$$

se complète dans $\mathcal{B}$ en un morphisme

$$\begin{array}{ccccccc}
S^{-1}B^0 & \to & B^3 & \to & (B^1 \oplus B^2) & \to & B^0 \\
\downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\
S^{-1}B'^0 & \to & B'^3 & \to & (B'^1 \oplus B'^2) & \to & B'^0
\end{array}$$

où $B^3 \to B'^3$ est une équivalence faible (par un diagramme des neuf

V).

3.4 Théorème d'approximation

Théorème 5 ***(d'approximation) :*** *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories de Waldhausen saturées telles que $\mathcal{A}$ possède un foncteur cylindre vérifiant l'axiome du cylindre. Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur exact tel que:*

a) f est une équivalence faible si et seulement si Ff est une équivalence faible

b) pour tout A dans $\mathcal{A}$ et tout $x : FA \to B$ morphisme de $\mathcal{B}$, il existe $a : A \to A'$ morphisme de $\mathcal{A}$ et une équivalence faible $x' : FA' \xrightarrow{\sim} B$ factorisant x:

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[d, "Fa"'] \arrow[dr, "x"] & \\
FA' \arrow[r, dashed, "\sim", "x'"'] & B.
\end{tikzcd}$$

Alors F induit un isomorphisme: $K_*(\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} K_*(\mathcal{B})$.

3.5 Théorème d'additivité et équivalence K-théorique

3.5.1 Théorème d'additivité

Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, trois catégories de Waldhausen, munies de deux foncteurs inclusions des catégories sous-jacentes :

$$i : \mathcal{A} \to \mathcal{C} \quad \text{et} \quad j : \mathcal{B} \to \mathcal{C}.$$

On suppose ces foncteurs exacts en tant que foncteurs entre catégories de Waldhausen. Soit $E(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{B})$ la catégorie des suites cofibrantes $A \rightarrowtail C \twoheadrightarrow B$ de $\mathcal{C}$, où A est l'image par i d'un objet de $\mathcal{A}$, B est l'image par j d'un objet de $\mathcal{B}$. Choisissons pour cofibrations de $E(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{B})$ les morphismes

$$(a,b,c) \quad : \quad \begin{array}{ccccc}
A & \overset{f}{\rightarrowtail} & C & \overset{g}{\twoheadrightarrow} & B \\
a\downarrow & & c\downarrow & & \downarrow b \\
A' & \overset{f'}{\rightarrowtail} & C' & \overset{g'}{\twoheadrightarrow} & B'
\end{array}$$

tels que a et b soient images de cofibrations de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ et tels que $A' \cup_A C \to C'$ soit une cofibration de $\mathcal{C}$. Choisissons pour équivalences faibles les morphismes (a, b, c) tels que a et b proviennent d'équivalences faibles de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, et tels que c soit une équivalence faible de $\mathcal{C}$. La catégorie $E(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{B})$ porte alors une structure de catégorie de Waldhausen.

On dispose de quatre foncteurs exacts:

$$E(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{B}) \xrightarrow{s} \mathcal{A} \qquad E(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{B}) \xrightarrow{t} \mathcal{B}$$

$$(A \rightarrowtail C \twoheadrightarrow B) \mapsto A \qquad (A \rightarrowtail C \twoheadrightarrow B) \mapsto B$$

$$E(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{B}) \xrightarrow{q} \mathcal{C} \qquad \mathcal{A} \times \mathcal{B} \xrightarrow{\cup} E(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{B})$$

$$(A \rightarrowtail C \twoheadrightarrow B) \mapsto C \qquad (A, B) \mapsto (A \rightarrowtail A \cup B \twoheadrightarrow B).$$

Ce dernier scinde le foncteur

$$E(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{B}) \xrightarrow{s,t} \mathcal{A} \times \mathcal{B}$$

$$(A \rightarrowtail C \twoheadrightarrow B) \mapsto (A, B).$$

Théorème 6 (d'additivité) *Le foncteur*

$$(s, t) : E(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{B}) \to \mathcal{A} \times \mathcal{B}$$

induit un isomorphisme en K-théorie :

$$K_*(s, t) : K_*(E(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{B})) \simeq K_*(\mathcal{A}) \times K_*(\mathcal{B}).$$

Un inverse est donné par le foncteur induit par

$$\cup : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to E(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{B}).$$

Corollaire 6.1 *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories de Waldhausen. Considérons les trois foncteurs exacts F, F', F'' munis de morphismes de foncteurs tels que*

- *pour tout A dans $\mathcal{A}$, la suite*

$$F'A \rightarrowtail FA \twoheadrightarrow F''A$$

  est une suite cofibrante dans $\mathcal{B}$,

- *pour toute cofibration $A' \rightarrowtail A$ de $\mathcal{A}$, l'application induite*

$$F'A \cup_{F'A'} FA' \to FA$$

  est une cofibration.

Alors $K_*F : K(\mathcal{A}) \to K(\mathcal{B})$ s'écrit

$$K_*F = K_*F' + K_*F''.$$

3.5.2 Invariance par équivalence K-théorique

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie exacte (au sens de Quillen [9]), et $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée.

Définition Le *groupe de Grothendieck* $K_0\,\mathcal{A}$ de la catégorie exacte $\mathcal{A}$ est le groupe libre engendré par les classes d'isomorphisme $[A]$ d'objets A de $\mathcal{A}$, quotienté par le sous-groupe engendré par les différences $[A]-[B]+[C]$, où A, B et C apparaissent dans une conflation $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$. Le *groupe de Grothendieck* $K_0\,\mathcal{T}$ de la catégorie triangulée $\mathcal{T}$ est le groupe libre engendré par les classes d'isomorphisme $[A]$ d'objets A de $\mathcal{T}$, quotienté par le sous-groupe engendré par les différences $[A]-[B]+[C]$, où A, B et C apparaissent dans un triangle $A \to B \to C \to SA$ de $\mathcal{T}$.

Soit ALG la catégorie dont les objets sont les k-algèbres projectives sur k, et dont les morphismes de A vers B sont en bijection avec les classes d'isomorphisme d'objets ${}_AX_B$ de la sous-catégorie triangulée $\mathcal{S}_{A,B}$ de $\mathcal{D}(A^{\mathrm{op}} \otimes B)$ donnée par

$$\mathcal{S}_{A,B} = \{{}_AX_B \in \mathcal{D}(A^{\mathbf{op}} \otimes B) \mid X_B \in \mathsf{par}\, B\}.$$

Soient deux morphismes ${}_AX_B : A \to B$ et ${}_BY_C : B \to C$ de ALG, soient $\underline{p}^{(A^{\mathrm{op}}\otimes_k B)}\,{}_AX_B$ une résolution de X par des $(A^{\mathrm{op}} \otimes_k B)$-modules projectifs (qui est donc cofibrante sur $A^{\mathrm{op}} \otimes_k B$) et $\underline{p}^{(B^{\mathrm{op}}\otimes_k C)}\,{}_BY_C$ une résolution de Y par des $(B^{\mathrm{op}} \otimes_k C)$-modules projectifs . Alors la composition

$$({}_BY_C) \circ ({}_AX_B) \;:=\; {}_AX_B \otimes^{\mathsf{L}}_B {}_BY_C$$

est donnée par l'un des objets du diagramme

$$X \otimes_B \underline{p}^{(B^{\mathrm{op}}\otimes_k C)}\,{}_BY_C \xleftarrow{\text{qis}} \underline{p}^{(A^{\mathrm{op}}\otimes_k B)}\,{}_AX_B \otimes_B \underline{p}^{(B^{\mathrm{op}}\otimes_k C)}\,{}_BY_C \xrightarrow{\text{qis}} \underline{p}^{(A^{\mathrm{op}}\otimes_k B)}\,{}_AX_B \otimes_B {}_BY_C$$

où la dernière flèche est un quasi-isomorphisme car la résolution de X est cofibrante sur $(A^{\mathrm{op}} \otimes_k B)$ donc sur B (en effet, A est projectif sur k implique $(A^{\mathrm{op}} \otimes_k B)$ est projectif sur B).

On montre son associativité grâce à :

$$Z\circ(Y\circ X) = ({}_AX_B \otimes^{\mathsf{L}}_B {}_BY_C) \otimes^{\mathsf{L}}_C {}_CZ_D \xrightarrow{\sim} (\underline{p}^{(A^{\mathrm{op}}\otimes_k B)}\,{}_AX_B \otimes_B {}_BY_C)\otimes_C \underline{p}^{(C^{\mathrm{op}}\otimes_k D)}\,{}_CZ_D$$

$$\xrightarrow{\sim} \underline{p}^{(A^{\mathrm{op}}\otimes_k B)}\,{}_AX_B \otimes_B ({}_BY_C \otimes_C \underline{p}^{(C^{\mathrm{op}}\otimes_k D)}\,{}_CZ_D) \xrightarrow{\sim} X \otimes^{\mathsf{L}}_B (Y \otimes^{\mathsf{L}}_C Z) \xrightarrow{\sim} (Z \circ Y) \circ X\ .$$

Soit ALG_0 la catégorie dont les objets sont les k-algèbres projectives sur k, et dont l'espace des morphismes entre deux algèbres A et B est en bijection avec le groupe de Grothendieck de la sous-catégorie triangulée $\mathcal{S}_{A,B}$. La compositon est induite par le produit tensoriel dérivé.

Définition Une *équivalence K-théorique* est un isomorphisme de la catégorie ALG_0.

On a un foncteur canonique $\mathsf{ALG} \to \mathsf{ALG}_0$ universel parmi les foncteurs F de ALG vers une catégorie additive, tels que :

$$(*)\text{si} X \to Y \to Z \to SX \text{ est un triangle de } \mathcal{S}_{A,B},\ \text{ alors on a } F(Y) = F(X) + F(Z).$$

Théorème 7 *Soit k un anneau commutatif. Soient A et B deux k-algèbres projectives sur k. S'il existe une équivalence K-théorique entre les algèbres A et B, alors leurs K-théories sont isomorphes.*

Démonstration Soit X un complexe de $\mathcal{S}_{A,B}$. Le complexe X induit un foncteur $? \otimes^{\mathbb{L}}_A X \ : \ \mathsf{par}\, A \ \rightarrow \ \mathsf{par}\, B$ qui se relève (2.3) en un $\mathcal{D}$ -foncteur $? \otimes_A X$ de $\mathsf{strparc}\, A$ dans $\mathsf{parc}\, B$, lequel induit un morphisme en K-théorie :

$$K_* A \xrightarrow{K_*(X)} K_* B.$$

Montrons que ce morphisme $K_*(X)$ ne dépend que de la classe d'isomorphisme de X dans $\mathcal{S}_{A,B}$. On montrera alors que l'on a un foncteur $\mathcal{K}$ de ALG dans $\mathcal{A}b$, puis que ce dernier vérifie la condition (*). L' image de l'équivalence K-théorique par le foncteur induit entre la catégorie ALG_0 et la catégorie $\mathcal{A}$ des groupes abéliens (par la propriété universelle de ALG_0) sera alors l'isomorphisme $K_* A \xrightarrow{\sim} K_* B$ voulu. On est donc ramené à montrer :

i) le morphisme $K_* X$ ne dépend que de la classe d'isomorphisme de X dans $\mathcal{S}_{A,B}$, et on a donc une application induite

$$\begin{aligned} \text{classe d'iso}(\mathcal{S}_{A,B}) \ &\longrightarrow \ \mathcal{A}b \\ [{}_A X_B] \ &\longmapsto \ K({}_A X_B) \end{aligned}$$

ii) les applications induites permettent de définir un foncteur $\mathcal{K}$ de ALG dans $\mathcal{A}b$,

iii) et si $X \to Y \to Z \to SX$ est un triangle de $\mathcal{S}$, alors $\mathcal{K}_* Y = \mathcal{K}_* X + \mathcal{K}_* Z$.

i) Soit X' un objet de $\mathcal{S}$ isomorphe à X. Pour montrer que $K_*(X) = K_*(X')$, on peut supposer qu'il existe un quasi-isomorphisme s de X vers X'. Pour tout U complexe de $\mathsf{strparc}\ A$, le morphisme

$$U \otimes_A X \xrightarrow{1 \otimes s} U \otimes_A X'$$

est un quasi-isomorphisme. On a donc un morphisme de foncteurs

$$\mu \ : ? \otimes_A X \ \rightarrow ? \otimes_A X'$$

tels que pour tout U de $\mathsf{strparc}\ A$, le morphisme μU est une équivalence faible de $\mathsf{parc}\ B$. On a alors ([14] 1.4) :

$$K_* X = K_*(? \otimes_A X) = K_*(? \otimes_A X') = K_* X'.$$

ii) Soient ${}_A X_B$ et ${}_B Y_C$ deux complexes représentants de deux morphismes de ALG. On peut supposer que ces représentants sont cofibrants. On a :

$$\mathcal{K}_*([Y] \cdot [X]) = \mathcal{K}_*([X \otimes^{\mathsf{L}}_B Y]).$$

Puisque les complexes X et Y sont cofibrants, c'est aussi $K_*(G \circ F)$, où F et G sont les foncteurs :

$$F =? \otimes_A \ X \ : \mathsf{parc}\, A \rightarrow \mathsf{parc}\, B \quad ; \quad G =? \otimes_B \ Y \ : \mathsf{parc}\, B \rightarrow \mathsf{parc}\, C$$

Puisque K_* est un foncteur (en effet $S_.$, $w(.)$, $\mathcal{N}$, $|.|$, $\Omega(.)$ et π_* sont des foncteurs), on a

$$K_*(? \otimes_A \ (X \otimes_B Y)) = K_*(? \otimes_A X) \cdot K_*(? \otimes_B Y)$$

donc

$$\mathcal{K}_*([Y] \cdot [X]) = \mathcal{K}_*([X]) \cdot \mathcal{K}_*([Y]).$$

On définit le foncteur $\mathcal{K}_*$ de ALG dans $\mathcal{A}b$ par $\mathcal{K}_*(A) = K_*(A)$ et $\mathcal{K}_*([{}_A X_B]) = K_*(? \otimes \ {}_A X_B)$;

iii) Soit $X \to Y \to Z \to SX$ un triangle de $\mathcal{S}$, où l'on suppose X, Y et Z cofibrants. Grâce au i), on se ramène à un triangle standard :

$$X \to Y \to Z \to SX$$

provenant de la suite exacte de complexes scindée en chaque degré $0 \to X \to Y \to Z \to 0$. Considérons les trois foncteurs $F' = ? \otimes_A X$, $F' = ? \otimes_A Y$ et $F'' = ? \otimes_A Z$ de $\mathsf{parc}\, A$ dans $\mathsf{parc}\, B$. Ils sont exacts (au sens de 3.1). Montrons qu'ils sont munis de morphismes de foncteurs vérifiant les hypothèses du corollaire du théorème d'additivité :

i) Pour tout U de $\mathsf{parc}\, A$, le foncteur $U \otimes_A ?$ est exact (au sens de 3.1) donc la suite

$$U \otimes_A X \rightarrowtail U \otimes_A Y \twoheadrightarrow U \otimes_A Z$$

est encore cofibrante (au sens de 3.1) .

ii) Soit une cofibration $U' \rightarrowtail U$ de $\mathsf{parc}\, A$. On veut montrer que le morphisme

$$F'U \cup_{F'U'} FU' \rightarrowtail FU$$

est une cofibration de $\mathsf{parc}\, B$. Soit $U'' = U/U'$ et E la somme amalgamée $F'U \cup_{F'U'} FU'$. On a le morphisme de conflations

$$\begin{tikzcd}
F'U' \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & FU' \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail] & F''U' \arrow[d, tail] \\
F'U \arrow[r, tail] & FU \arrow[r, two heads] & F''U
\end{tikzcd} .$$

On forme alors le diagramme commutatif dans $\mathsf{parc}\, B$:

$$\begin{tikzcd}
F'U \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, two heads] \arrow[d] & F''U' \arrow[d, tail] \\
F'U \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & FU \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & F''U \arrow[d, two heads] \\
0 \arrow[r, tail] & F''U'' \arrow[r, equal] & F''U''
\end{tikzcd}$$

où le carré supérieur droit est cartésien. Le morphisme $E \to FU$ est le noyau de la déflation $FU \twoheadrightarrow F''U''$, donc une inflation.

4 Un corollaire du théorème 3 et d'un théorème de Beilinson

Soit k un corps algébriquement clos. Soit $n > 0$ et V un k-espace vectoriel de dimension $n+1$. Soit $A = S(V)$ l'algèbre symétrique sur V graduée telle que le degré de v est 1 pour tout v non nul de V. Elle est nœthérienne et de dimension globale finie. Soit $\mathsf{Grmod}\, A$ la catégorie des A-modules gradués sur $\mathbf{Z}$, et $\mathsf{grmod}\, A$ la sous-catégorie abélienne de $\mathsf{Grmod}\, A$ formée des modules de type fini. Soit $\mathcal{N}$ la sous-catégorie pleine de $\mathsf{grmod}\, A$ formée des modules M tels qu'il existe un N tel que pour tout $i > N$, $M_i = 0$. C'est une sous-catégorie de Serre (stable par sous-objets, quotients, et extensions). La catégorie localisée

$$\mathsf{coh}(\mathbf{P}^n) \;=\; \mathsf{grmod}\, A \,/\, \mathcal{N}\;,$$

où $\mathsf{grmod}\, A \,/\, \mathcal{N}$ signifie $(\mathsf{grmod}\, A\,)\,[\Sigma_{\mathcal{N}}^{-1}]$, est appelée la catégorie des *faisceaux algébriques cohérents* sur $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}(k^{n+1})$. C'est une catégorie exacte (et même abélienne). Soit B l'algèbre

$$\mathsf{End}_{\mathsf{Grmod}\, A}(\bigoplus_{i>0} A_i)$$

Soit $\mathcal{O}(i)$ l'image de $A_i = S^iV$ dans $\mathsf{coh}(\mathbf{P}^n)$. Soit $T = \bigoplus_{i=0}^{n}\mathcal{O}(i)$. Le foncteur $?\otimes_B T$ envoie $\mathcal{C}^b(\mathsf{mod}\; A)$ sur $\mathcal{C}^b(\mathsf{coh}\mathbf{P}^n)$.

Théorème 8 *(Beilinson [1]) Le foncteur dérivé $F = ?\otimes^{\mathbf{L}}_A T$ est une équivalence :*

$$\mathcal{D}^b\,\mathsf{mod}\, A \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^b\,\mathsf{coh}\,\mathbf{P}^n.$$

Corollaire 8.1 *On a les isomorphismes :*

$$\bigoplus_{i=0}^{n} K_*(k) \xrightarrow{\sim} K_*A \xrightarrow{\sim} K_*(\mathsf{coh}\,\mathbf{P}^n)\;.$$

Démonstration Le triplet $(\mathsf{coh}(\mathbf{P}^n), \mathcal{C}^b(\mathsf{coh}(\mathbf{P}^n)), Acycl)$ est un $\mathcal{D}$-triplet, et le foncteur $?\otimes_A T$ est un $\mathcal{D}$-foncteur entre les $\mathcal{D}$-triplets $(\mathsf{proj}\, A\,, \mathcal{C}^b(\mathsf{proj}\, A), Acycl)$ et

$$(\mathsf{coh}(\mathbf{P}^n), \mathcal{C}^b(\mathsf{coh}(\mathbf{P}^n)), Acycl).$$

L'algèbre A est noethérienne et de dimension globale finie, donc on a les équivalences

$$\mathcal{D}^b(\mathsf{mod}\, A) \xleftarrow{\sim} \mathcal{H}^b(\mathsf{proj}\, A) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^b(\mathsf{proj}\, A).$$

Le théorème de Beilinson donne alors l'équivalence des catégories dérivées associées aux deux $\mathcal{D}$-triplets :

$$\mathcal{D}^b\,\mathsf{proj}\, A \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^b\,\mathsf{coh}\,\mathbf{P}^n\;.$$

On applique le théorème 3 qui donne l'isomorphisme en K-théorie :

$$K_*(\mathsf{proj} A) \xrightarrow{\sim} K_*(\mathsf{coh}(\mathbf{P}^n), \mathcal{C}^b(\mathsf{coh}\mathbf{P}^n), Acycl).$$

Mais le théorème de Gillet ([2]) donne, pour toute catégorie exacte $\mathcal{E}$, l'isomorphisme en K-théorie :

$$K_*\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} K_*(\mathcal{E}, \mathcal{C}^b(\mathcal{E}), Acycl)$$

où la K-théorie du membre de gauche est celle de Quillen et celle du membre de droite est celle définie au 3.2. On a alors

$$K_*(\mathsf{proj}\, A) = K_*A \xrightarrow{\sim} K_*(\mathsf{coh}\;\mathsf{P}^n)\;.$$

D'autre part, on a une équivalence K-théorique entre toute algèbre A, sur un corps algébriquement clos, de dimension finie et de dimension globale finie, et son plus grand quotient semi-simple B ([5] section 2.5), donc une équivalence K-théorique :

$$\mathcal{C}^b(\mathsf{proj}\, A) \xrightarrow{?\otimes_A B} \mathcal{C}^b(\mathsf{proj}\, B)$$

Le théorème 7 donne alors l'isomorphisme :

$$K_*(\mathsf{proj}\, B) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=0}^{n} K_*(k) \xrightarrow{\sim} K_*A\;.$$

5 Démonstration du théorème 3

On introduit la catégorie $\mathcal{C}$ suivante : les objets sont les couples $(A, FA \xrightarrow{\sim} B)$ où $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$, et $FA \xrightarrow{\sim} B$ est une équivalence faible; les morphismes sont les diagrammes commutatifs:

$$\begin{array}{ccccc} A & & FA & \xrightarrow{\sim} & B \\ a \downarrow & & Fa \downarrow & & \downarrow b \\ A' & & FA' & \xrightarrow{\sim} & B'. \end{array}$$

Lemme 5.0.1 *La catégorie $\mathcal{C}$ est de Waldhausen dès qu'on la munit des cofibrations définies par les diagrammes commutatifs:*

$$\begin{array}{ccccc} A & & FA & \xrightarrow{\sim} & B \\ a \downarrow & & Fa \downarrow & & \downarrow b \\ A' & & FA' & \xrightarrow{\sim} & B'. \end{array}$$

où a est une cofibration (et donc Fa est une cofibration car F est exact), et b est une cofibration, et des équivalences faibles définies par les diagrammes commutatifs:

$$\begin{array}{ccccc} A & & FA & \xrightarrow{\sim} & B \\ a \downarrow\wr & & Fa \downarrow\wr & & b \downarrow\wr \\ A' & & FA' & \xrightarrow{\sim} & B'. \end{array}$$

où a (et donc Fa) et b sont des équivalences faibles.

Définissons un foncteur cylindre de $\mathcal{C}$ induit par ceux de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$: si $c = (a, b)$:

$$\begin{array}{ccccc} A & & FA & \xrightarrow{\sim} & B \\ a \downarrow & & Fa \downarrow & & \downarrow b \\ A' & & FA' & \xrightarrow{\sim} & B'. \end{array}$$

est dans $\mathsf{Mor}(\mathcal{C})$, définissons $T_{\mathcal{C}}(c) := (T_{\mathcal{A}}(a), FT_{\mathcal{A}}(a) \xrightarrow{\sim} T_{\mathcal{B}}(b))$, où $FT_{\mathcal{A}}(a) \simeq T_{\mathcal{B}}(Fa) \xrightarrow{\sim} T_{\mathcal{B}}(b)$ est une équivalence faible. Ce foncteur cylindre vérifie l'axiome du cylindre grâce au diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& FA \arrow[rr, "Fj_2", "\sim"'] \arrow[dl, equal] \arrow[dr, dash] & & FT(a) \arrow[r, "\sim"] \arrow[dl] \arrow[dd, "Fp"', "\sim"] & T(Fa) \\
B \arrow[rr, "j_2", "\sim"'] \arrow[ddrr] & & T(b) \arrow[dr, "Fa"] \arrow[dd, "p'", "\wr"'] & & \\
& & & FA' \arrow[dl] & \\
& & B' & &
\end{tikzcd}$$

dans lequel $FA' \to B$ est une équivalence faible.

On a alors la factorisation de F :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{F} & \mathcal{B} \\ i \downarrow & \nearrow p & \\ \mathcal{C} & & \end{array}$$

où $i : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$, $A \mapsto (A, FA = FA)$ et $p : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$, $(A, FA \xrightarrow{\sim} B) \mapsto B$.

Lemme 5.0.2 *Le foncteur i est exact, préserve les cylindres et vérifie les hypothèses du théorème d'approximation.*

Démonstration Si $A \rightarrowtail A'$ est une cofibration, le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, tail] & FA \arrow[r, equal] \arrow[d, tail] & FA \arrow[d, tail] \\
A' & FA' \arrow[r, equal] & FA'
\end{tikzcd}$$

est une cofibration de $\mathcal{C}$: i préserve les cofibrations; de même i préserve les équivalences faibles. Le foncteur i préserve les colimites, et donc la formation des carrés cocartésiens car il admet le foncteur

$$\pi \ : \ \mathcal{C} \to \mathcal{A}\,,\, (B, FB \xrightarrow{\sim} C) \mapsto B;$$

comme adjoint à droite. En effet, pour tout objet A de $\mathcal{A}$ et $C = (A', FA' \xrightarrow{\sim} B')$ de $\mathcal{C}$, la donnée d'un morphisme de $i(A) = (A, FA = FA)$ vers $(A', FA' \xrightarrow{\sim} B')$ est exactement la donnée d'un morphisme $A \to A'$ dans $\mathcal{A}$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(A, \pi(C)) \ &= \ \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(A, \pi(A', FA' \xrightarrow{\sim} B')) \\
\cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, FA \xrightarrow{\sim} FA \ ; \ A', FA' \xrightarrow{\sim} B') \ &= \ \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(i(A), C).
\end{aligned}$$

Montrons qu'il préserve les cylindres : Soit $A \xrightarrow{a} A'$ dans $\mathcal{A}$. Par définition de i, on a

$$i(T(a)) = (T_{\mathcal{A}}(a), FT_{\mathcal{A}}(a) = FT_{\mathcal{A}}(a))$$

Donc

$$T(i(a)) = T\begin{pmatrix} A & FA & = & FA \\ a\downarrow & Fa\downarrow & & \downarrow Fa \\ A' & FA' & = & FA'. \end{pmatrix} = (T_{\mathcal{A}}(a), FT_{\mathcal{A}}(a) \xrightarrow{\sim} T_{\mathcal{B}}(Fa)).$$

Mais $FT_{\mathcal{A}}(a) \xrightarrow{\mathsf{iso}} T_{\mathcal{B}}(Fa)$ donc on a un isomorphisme dans $\mathcal{C}$:

$$\begin{array}{ccccc}
T_{\mathcal{A}}(a) & & FT_{\mathcal{A}}(a) & = & FT_{\mathcal{A}}(a) \\
\downarrow \mathsf{iso} & & \downarrow \mathsf{iso} & & \downarrow \mathsf{iso} \\
T_{\mathcal{A}}(a) & & FT_{\mathcal{A}}(a) & \xrightarrow{\sim} & T_{\mathcal{B}}(Fa)
\end{array}$$

c'est-à-dire $T(i(a)) \xrightarrow{\mathsf{iso}} i(T(a))$. Vérifions les hypothèses du théorème d'approximation:

a) si $i(a)$ est une équivalence faible de $\mathcal{C}$, alors par définition des équivalences faibles de $\mathcal{C}$, le morphisme $A \xrightarrow{\sim} A'$ est une équivalence faible;

b) Soit A dans $\mathcal{A}$, et

$$\begin{array}{ccccc}
A & & FA & = & FA \\
a\downarrow & & Fa\downarrow & & \downarrow b \\
A' & & FA' & \xrightarrow{\sim} & B
\end{array}\ .$$

un morphisme de $\mathcal{C}$. On a alors un diagramme commutatif qui est une factorisation de ce morphisme :

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "a"'] \arrow[dd, "a"] \\
A' \arrow[dr, equal] & \\
 & A'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & FA \arrow[rr, equal] \arrow[dl, "Fa"'] \arrow[dd] & & FA \arrow[dl, "Fa"'] \arrow[dd, "b"] \\
FA' \arrow[rr] \arrow[dr, equal] & & FA' \arrow[dr, "\sim", "w"'] & \\
 & FA' \arrow[rr, "\sim", "w"'] & & B,
\end{tikzcd}$$

où $(F(\mathbf{1}) = \mathbf{1}, w)$ est une équivalence faible de $\mathcal{C}$. Le foncteur i induit donc un isomorphisme en K-théorie.

Lemme 5.0.3 *Le foncteur p ext exact, préserve les cocylindres et vérifie les hypothèses duales de celles du théorème d'approximation.*

Démonstration: Le foncteur p préserve les cofibrations, les équivalences faibles, et la formation des carrés cartésiens de manière immédiate. Montrons les hypothèses duales de celles du théorème d'approximation : Soit

$$\begin{array}{ccccc} A & & FA & \overset{\sim}{\to} & B \\ a\downarrow & & Fa\downarrow & & \downarrow b \\ A' & & FA' & \overset{\sim}{\to} & B'. \end{array}$$

un morphisme de $\mathcal{C}$ tel que $p(a,b) = b$ soit une équivalence faible de $\mathcal{B}$. Par saturation, $FA \overset{Fa}{\to} FA'$ est une équivalence faible de $\mathcal{B}$.

Soit le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi_{\mathcal{A}}"'] & \mathcal{B} \arrow[d, "\pi_{\mathcal{B}}"'] \\ \underline{\mathcal{A}} \arrow[r, "\overline{F}"] \arrow[d, "\mathsf{can}_{\mathcal{M}}"'] & \underline{\mathcal{B}} \arrow[d, "\mathsf{can}_{\mathcal{N}}"] \\ \mathcal{T}\mathcal{A} \arrow[r, "\mathsf{eq}", "\tilde{F}"'] & \mathcal{T}\mathcal{B} \end{tikzcd}$$

Dans la catégorie $\mathcal{T}$, le morphisme Fa induit un isomorphisme $FA \to FA'$ qui provient, puisque F induit une équivalence au niveau des catégories dérivées, d'un isomorphisme de $\mathcal{T}\mathcal{A}$. La catégorie de Waldhausen $\mathcal{A}$ étant saturée, la partie multiplicative $\pi_{\mathcal{A}}(\Sigma_{\mathcal{M}})$ de $\underline{\mathcal{A}}$ est saturée, donc $\overline{a}$ est dans $\pi_{\mathcal{A}}(\Sigma_{\mathcal{M}})$, c'est-à-dire a est une équivalence faible de $\mathcal{A}$. On a alors que (a,b) est une équivalence faible de $\mathcal{C}$, et la première hypothèse est vérifiée. Donnons-nous un morphisme de $\mathcal{B}$:

$$B' \to p(A, FA \overset{\sim}{\to} B) = B,$$

et cherchons un morphisme de $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccccc} A'' & & FA'' & \overset{\sim}{\to} & B'' \\ a''\downarrow & & Fa''\downarrow & & \downarrow b'' \\ A & & FA & \overset{\sim}{\to} & B \end{array}$$

et un morphisme $B' \to B''$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} p(A, FA \overset{\sim}{\to} B) & & B' \arrow[ll] \arrow[dll] \\ p(A'', FA'' \overset{\sim}{\to} B'') \arrow[u, "p(a'',b'')"] & & \end{tikzcd}$$

commute et que $B' \to B''$ soit une équivalence faible de $\mathcal{B}$. On veut donc, à partir d'un diagramme dans $\mathcal{B}$

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\sim"] & B \\ & & B', \arrow[ul, "b"'] \end{tikzcd}$$

construire un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, "\sim"] & B & \\
FA'' \arrow[u] \arrow[r, "\sim"] & B'' \arrow[u] & \\
& & B' \arrow[ul, "\sim"] \arrow[uul, "b"']
\end{tikzcd} \qquad (\mathfrak{D}).$$

Le foncteur $\tilde{F}$ est une équivalence donc est dense, donc il existe A^1 dans $\mathcal{A}$ tel que, dans $\mathcal{T}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}, \mathcal{N})$, le morphisme $FA^1 \to B'$ soit un isomorphisme. Par calcul des fractions, ce morphisme correspond à la donnée d'une fraction

$$\begin{tikzcd}
FA^1 \arrow[r, "\sim"] & B^1 & \\
& & B', \arrow[ul, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

où $FA^1 \to B^1$ aussi est dans $\pi_{\mathcal{B}}(\Sigma_{\mathcal{N}})$ car $FA^1 \to B'$ est un isomorphisme. Dans $\mathcal{T}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}, \mathcal{N})$, la composée $FA^1 \to B' \to B$ suivie de l'inverse de $FA \overset{\sim}{\to} B$ (qui est devenu un isomorphisme dans $\mathcal{T}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}, \mathcal{N})$) donne un morphisme de FA^1 vers FA, qui provient d' un morphisme de $\mathcal{T}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}, \mathcal{M})$ car $\tilde{F}$ est une équivalence. Ce morphisme s'écrit sous la forme d'une fraction

$$\begin{tikzcd}
A^1 \arrow[dr] & \\
& A^2, \\
A \arrow[ur, "\sim"'] &
\end{tikzcd}$$

et donne par F une fraction dans $\mathcal{T}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}, \mathcal{N})$:

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\sim"] & & B & \\
& FA^2 & & \\
FA^1 \arrow[ur] \arrow[rr, "\sim"] & & B^1 & \\
& & & B'. \arrow[ul, "\sim"'] \arrow[uuul]
\end{tikzcd}$$

Formons la somme amalgamée homotopique du coin :

$$\begin{tikzcd}
& FA^2 & \\
FA^1 \arrow[ur] \arrow[rr, "\sim"] & & B^1
\end{tikzcd}$$

soit :

$$\begin{tikzcd}
& FA^2 \arrow[rr, "\sim"] & & B'^2 . \\
FA^1 \arrow[ur] \arrow[rr, "\sim"] & & B^1 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Formons la somme amalgamée homotopique du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\sim"] \arrow[drrr] & & B & & . \\
& FA^2 \arrow[rr, "\sim"] & & B'^2 &
\end{tikzcd}$$

On obtient un diagramme dans $\mathcal{B}$, où les carrés sont commutatifs à homotopie près :

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\sim"] & & B \arrow[dr, "\sim"] & \\
& FA^2 \arrow[rr, "\sim"] & & B''^2 . \\
FA^1 \arrow[ur] \arrow[rr, "\sim"] & & B^1 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Par une propriété du calcul des fractions, on peut choisir $B''^2 \xrightarrow{\sim} B^2$ tel que

$$\begin{tikzcd}
B' \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d, "\wr"] \\
B^1 \arrow[r] & B^2
\end{tikzcd}$$

commute à homotopie près. Formons les produits fibrés homotopiques de

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[dr, "\sim"] & & & \text{et de} & B \arrow[dr, "\sim"] & \\
& FA^2 & & & & B^2 , \\
FA^1 \arrow[ur] & & & & B^1 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

que l'on notera B'^3 (resp. B^3). Le foncteur F conservant les produits fibrés homotopiques, B'^3 est l'image par F du produit fibré homotopique A^3 de

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "\sim"] & \\
& A^2 . \\
A^1 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

On a un morphisme induit entre FA^3 et B^3 par la propriété universelle, qui est une équivalence faible par le lemme 3.3.2.

On a obtenu le diagramme :

$$
\begin{tikzcd}
 & & FA \arrow[rrrr, "\sim"] \arrow[ddr, "\sim"] & & & & B \arrow[ddr, "\sim"] & \\
FA^3 \arrow[urr] \arrow[rrrr, "\sim"] \arrow[ddr, "\sim"] & & & & B^3 \arrow[urr] \arrow[ddr, "\sim"] & & & \\
 & & & FA^2 \arrow[rrrr, "\sim"] & & & & B^2 \\
 & FA^1 \arrow[urr] \arrow[rrrr, "\sim"] & & & & B^1 \arrow[urr] & & \\
 & & & & B' \arrow[uuu, "\sim"] \arrow[uuuurr, bend right=90] & & &
\end{tikzcd}
.
$$

où toutes les faces du parallélépipède commutent à homotopie près, et où le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
B' \arrow[r] \arrow[dr] & B^3 \arrow[d] \\
 & B
\end{tikzcd}
$$

commute dans $\mathcal{B}$. Considérons le fragment de diagramme suivant :

$$
\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, "\sim"] & B & \\
FA^3 \arrow[u] \arrow[r, "\sim"] & B^3 \arrow[u] & \\
 & & .B' \arrow[ul, "\sim"] \arrow[uul, bend right]
\end{tikzcd}
$$

Soit B'' le produit fibré homotopique du diagramme

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, equal] & B \\
 & B^3 \arrow[u]
\end{tikzcd}
\ ;
$$

on a alors

$$
\begin{tikzcd}
FA \arrow[rr, "\sim"] & & B \\
 & B \arrow[ur, equal] & \\
FA^3 \arrow[uu] \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, dashed] & & B^3 \arrow[uu] \\
 & B'' \arrow[uu] \arrow[ur] & B' \arrow[l, dashed, "\sim"] \arrow[uul] \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd}
$$

où l'on a une flèche induite $FA^3 - -- > B''$ car les deux composées

$$FA^3 \to FA \to B \ \text{ et } \ FA^3 \overset{\sim}{\to} B^3 \to B$$

sont homotopes. Par saturation, c'est une équivalence faible. On a obtenu le diagramme commutatif dans $\mathcal{B}$ voulu $\mathfrak{D}$:

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, "\sim"] & B & \\
FA^3 \arrow[u, "F(.)"] \arrow[r, "\sim"] & B'' \arrow[u] & \\
& & B' . \arrow[ul, "\sim"] \arrow[uul, bend right]
\end{tikzcd}$$

Références bibliographiques

[1] A. A. Beilinson, *Coherent sheaves on* P^n *and problems of linear algebra*, Funct. Anal. Appl. **12** (1979), 214–216.

[2] H. Gillet, *Riemann-Roch theorems for higher algebraic K-theory*, Adv. Math. **40** (1981), 203–289.

[3] D. Happel, *Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras*, Séminaire d'algèbre Paul Dubreil et Marie-Paule Malliavin, 39e année (Paris 1987/1988), Springer LMN **1404** (1989), 108–126.

[4] D. Happel, *On the derived category of a finite-dimensional algebra*, Comment. Math. Helv. **62** (1987), 339–389.

[5] B. Keller, *Invariance and localisation for cyclic homology of DG algebras*, J. Pure Appl. Alg. **123** (1998), 223–273.

[6] A. Neeman, *K-theory for triangulated catégories I(A) : homological functors*, Asian Math. **1** (1997), n°2, 330–417.

[7] A. Neeman, *K-theory for triangulated catégories I(B) : homological functors*, Asian Math. **1** (1997), n°3, 435–529.

[8] A. Neeman, *K-theory for triangulated catégories II : subtlety of the theory and potential pitfalls*, Asian Math. **2** (1998), n°1, 1–125.

[9] A. Quillen, *Higher algebraic K-theory I*, Higher K-theories, Springer Lect. Notes in Math. **341** (1973), 85–147.

[10] J. Rickard, *Morita theory for derived categories*, J. London Math. Soc. **39** (1989), 436–456.

[11] J. Rickard, *Derived equivalences as derived functors*, J. London Math. Soc. **43** (1991), 37–48.

[12] R. W. Thomason et T. Trobaugh, *Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories*, Grothendieck Festschrift III, Progress in Math. **86**, Birkhäuser (1988), 248–435.

[13] J. L. Verdier, *Catégories dérivées*, SGA 4 1/2, Lect. Notes in Math. **569** (1977), 262–311.

[14] F. Waldhausen, *Algebraic K-theory of spaces*, Algebraic and Geometric Topology, Springer Lect. Notes in Math. **1126** (1985), 318–419.

[15] C. Weibel et D. Yao, *Localisation for the K-theory of noncommutative rings*, Algebraic K-theory, Commutative Algebra, and Algebraic Geometry (Santa Margherita Ligure, 1989), Contemporary Math. **125** (1992) 219–230.