Représentations elliptiques ; caractérisation et formule de transfert de caractères

C. Mœglin
Avec un appendice de J.-L. Waldspurger

Le but de cet article est de généraliser l'article d'Arthur [2] au cas tordu. La seule différence est que l'on donne une caractérisation des représentations elliptiques à la Harish-Chandra, c'est ce qu'Harish-Chandra appelle supertempéré. Une représentation elliptique est une représentation virutelle combinaison linéaire de représentations tempérées ; les modules de Jacquet (avec la généralisation définie dans le texte de cette notion aux places archimédiennes) ont donc des exposants dans la chambre de Weyl obtuse positive fermée et les représentations elliptiques sont caractérisées par le fait que la trace tordue (pour l'espace de Levi convenable) dans l'espace relatif aux exposants qui ne sont pas à l'intérieur de cette chambre est nulle ; cela a été démontré en [4] pour le cas archimédien non tordu et en [9] pour le cas non archimédien non tordu.

Les conséquences sont importantes comme dans [2] : on montre que toute représentation d'un espace tordu est transfert d'une combinaison linéaire convenable de représentations stables pour les groupes associés aux données endoscopiques elliptiques et que toute identité de transfert qui ne met en jeu que des représentations elliptiques est réalisée si et seulement si elle est correcte pour les fonctions cuspidales, c'est-à-dire les fonctions dont les intégrales orbitales sont nulles en tout point semi-simple régulier non elliptique.

Cette dernière propriété est par exemple indispensable pour la classification des séries discrètes des groupes classiques.

1 Quelques définitions de base

On fixe un groupe réductif connexe sur un corps local, F, de caractéristique 0 ; on fixe aussi un G-bitorseur $\tilde{G}$ et un caractère ω de G. On appelle ω-représentation de $\tilde{G}$, un espace vectoriel complexe V et des morphismes, l'un noté $\pi^{\tilde{G}}$ de $\tilde{G}$ dans $\mathrm{Aut}(V)$ et l'autre un morphisme de groupes, noté π de G dans le même espace relis par la propriété :

$$\forall \gamma \in \tilde{G}, \forall g, g' \in G, \pi^{\tilde{G}}(g\gamma g') = \pi(g)\pi^{\tilde{G}}(\gamma)\pi(g')\omega(g').$$

La notion d'isomorphisme est la notion évidente et il est facile de voire que les classes d'isomorphismes de ω-représentations de $\tilde{G}$ sont en bijection avec les classes d'isomorphismes des couples π, A où π est une représentation de G et où A est un isomorphisme de $\pi \circ ad(\gamma_0) \simeq \pi \otimes \omega$, où γ_0 est un élément fixé de $\tilde{G}$.

Pour alléger la rédaction, on parlera plutôt de représentations de $\tilde{G}$ que de ω-représentations.

2 Caractérisation des représentations elliptiques

La caractérisation des représentations elliptiques est foncièrement la même dans le cas archimédien et dans le cas non archimédien : ce sont les représentations super-tempérées mais pour clarifier la situation on préfère séparer ces deux cas.

2.1 Rappel des définitions de [17]

On fixe un sous-groupe de Levi M de G et une série discrète σ de M. On note $Stab_{\tilde{G}}(M, \sigma, \omega)$ l'ensemble des éléments de $\tilde{G}$ de la forme $\tilde{\gamma}$ qui stabilisent M et vérifient $\tilde{\gamma}.\sigma \simeq \omega \otimes \sigma$; un tel ensemble est un espace homogène sous $Stab_G(M, \sigma)$. On suppose que $Stab_{\tilde{G}}(M, \sigma, \omega) \neq \emptyset$ et soit $\tilde{r}$ dans cet ensemble, on définit $\tilde{\pi}_{\sigma,\tilde{r}}$ une ω représentation de $\tilde{G}$ de la façon suivante : on fixe P un sous-groupe parabolique de G de sous-groupe de Levi M et on note $\tilde{r}.P$ le sous-groupe de Levi formé des éléments $p' \in G$ tel que $p'\tilde{r} \in \tilde{r}P$. C'est un sous-groupe de Levi de G de groupe de Levi M. Pour λ un caractère de M, on note $M_{\tilde{r}.P|P}(\lambda, \sigma, \omega)$ l'opérateur d'entrelacement standard de l'induite pour le parabolique P de la représentation $\lambda \otimes \sigma$ de M vers l'induite de cette même représentation pour le parabolique $\tilde{r}.P$. L'action naturelle de $\tilde{r}$ envoie cette dernière induite vers l'induite pour P de la représentation $\lambda'\sigma \otimes \omega$ (on peut sortir le caractère ω) où λ' est le composé de λ avec l'action de $\tilde{r}$. On obtient ainsi un opérateur de l'induite pour P de $\sigma \otimes \lambda$ vers l'induite de $\sigma \otimes \omega \otimes \lambda'$ qui dépend méromorphiquement de λ. On fixe une fonction méromorphe de λ de sorte qu'après multiplication par cette fonction l'opérateur soit holomorphe et non nul en $\lambda = 0$ et on note $M_0(\tilde{r})$ l'opérateur ainsi obtenu ; il n'est défini qu'à un scalaire près et est un homomorphisme de la représentation induite de la représentation σ de P à G dans l'induite de $\sigma \otimes \omega$ de P à G. On note π la représentation induite de σ de P à G et pour tout $g \in G$, on pose $\tilde{\pi}(\tilde{r}g) := \tilde{\pi}(r)\pi(g)$ et c'est une ω représentatio.Elle dépend du choix de l'opérateur d'entrelacement, et n'est donc bien définie qu'à un scalaire près ; on lui demande d'être unitaire ce qui fait qu'elle est définie à un nombre complexe de module un près.

2.2 La théorie du R-groupe

On dispose de la théorie du R groupe pour l'induite de σ avec les notations du paragraphe précédent. On note $W_{M,\sigma} := Stab_G(M, \sigma)/M$ et $W_{0,\sigma}$ le sous-groupe défini par Harish-Chandra : $W_{0,\sigma}$ est un sous-groupe distingué de $W_{M,\sigma}$ et il est stable sous l'action de $\tilde{r}$. Ainsi $\tilde{r}$ opère par adjonction sur R. En fait, il est préférable de rappeler comment on construit l'action du R-groupe : pour toute paire de sous groupes paraboliques de G de sous-groupe de Levi M, (P, P') on fixe une famille d'opérateurs d'entrelacement dépendant méromorphiquement de $\lambda \in A_M^*$, de $Ind_P^G(\sigma_\lambda)$ dans $Ind_{P'}(\sigma_\lambda)$, noté $N_{P'|P}(\sigma, \lambda)$ qui vérifient la formule d'inversion $N_{P|P'}(\sigma, \lambda) \circ N_{P'|P}(\sigma, \lambda) = 1$. Pour P un sous-groupe parabolique de G de Levi M, on remarque que $Ind_P(\sigma_{\lambda^{-1}})$ est une représentation duale de $Ind_P(\sigma_\lambda)$; on impose alors aussi aux opérateurs construits d'être adjoints pour cette dualité. Ainsi ces opérateurs sont holomorphes en $\lambda \equiv 1$ et on pose $N_{P'|P}(\sigma)$ la valeur en ce point.

Pour $w \in W_{M,\sigma}$, on fixe un représentant de w dans G, encore noté w et un isomorphisme entrelaçant $w.\sigma$ et σ et en appliquant cet opérateur on obtient un isomorphisme pour tout sous groupe-parabolique P' de $Ind_{P'}(w.\sigma)$ sur $Ind_{P'}(\sigma)$ qui commute à l'action induite de G. D'autre part on a une application naturelle $f(g) \in Ind_P(\sigma) \mapsto f(w^{-1}g) \in Ind_{w.P}(w.\sigma)$ et en composant on obtient un opérateur de $Ind_P(\sigma)$ dans $Ind_{w.P}(\sigma)$ qui commute aux actions de G. On note $N(w, \sigma)$ le composé de l'opérateur que l'on vient de construire avec $N_{P|w.P}(\sigma)$. Cet opérateur dépend évidemment des choix précédents mais n'en dépend qu'à un scalaire près.

Alors $W_{0,\sigma}$ est précisément l'ensemble des éléments $w \in W_{M,\sigma}$ tel que l'opérateur ci-dessus soit un scalaire.

On remarque aussi que l'action de $\tilde{r}$ construite dans le paragraphe précédent est de même nature toutefois $N(\tilde{r}, \sigma)$ entrelace l'action de G et l'action de G tordu par un automorphisme ; même si l'automorphisme est intérieur ce n'est pas la même chose et $W_{0,\sigma}$ est relatif à G et non à $\tilde{G}$.

Comme il n'est pas clair pour F un corps p-adique que l'on puisse faire des choix tel que $N(w, \sigma)$ soit trivial pour $w \in W_{0,\sigma}$ et donne par passage au quotient une action du groupe R sur $Ind_P(\sigma)$ (quand on a fixé P), il faut considérer que ce n'est pas R qui agit mais une extension de R (cf. [1]). On oublie cette difficulté ci-dessous et on considère qu'il n'y a pas besoin d'extension de R, cela ne change pas grand chose.

On revient à la décompostion $Ind_P^G(\sigma) \simeq_{\rho \in \hat{R}} \pi_\rho \otimes \rho$.

L'action par adjonction de $\tilde{r}$ conjugue les représentations de R d'une part et les composantes isotypiques avec une torsion par ω d'autre part de façon évidemment compatible. On ne considère que le sous-espace de $ind_P^G \sigma$ isomorphe à $\oplus_{\rho \in \hat{R}; \tilde{r}.\rho \simeq \rho} \pi_\rho \otimes \rho$. L'opérateur $M_0(\tilde{r})$ envoie ce sous-espace sur son analogue pour l'induite de $\sigma \otimes \omega$; en identifiant ces deux espaces, on obtient une ω-représentation de $\tilde{G}$ que l'on peut décrire ainsi : pour chaque ρ intervenant, on fixe $\tilde{\rho}(\tilde{r})$ un opérateur entrelaçant ρ et $\tilde{r}.\rho$. Un tel opérateur est uniquement défini à un scalaire près et le choix entraîne un unique choix pour un opérateur $\tilde{\pi}_\rho(\tilde{r})$ entrelaçant π_ρ et $\pi_\rho \otimes \omega$ de sorte que le produit tensoriel de ces deux opérateurs soit exactement la restriction de $M_0(\tilde{r})$ sur la composante $\pi_\rho \otimes \rho$. La représentation que nous définissons est alors pour tout $g \in G$,

$$\pi_{\sigma,\tilde{r}}(\tilde{r}g) := \oplus_{\rho; \tilde{r}.\rho \simeq \rho} \tilde{\pi}_\rho(\tilde{r}) \pi_\rho(g) \otimes \tilde{\rho}(\tilde{r}).$$

Définition *On dit que $\pi_{\sigma,\tilde{r}}$ est elliptique si $W_0(\sigma) = 1$ et $\tilde{r}$ n'est inclus dans aucun espace de Levi propre de $\tilde{G}$.*

Grâce à [17] 2.11 on peut récrire de façon moins redondante cette définition ; au lieu des deux conditions écrites, on demande qu'il n'existe pas d'espace de Levi propre de $\tilde{G}$, noté $\tilde{L}$ contenant un élément $\tilde{r}_L$ tel qu'en notant $W_0^L(\sigma)$ l'analogue de $W_0(\sigma)$ pour L et tel que l'intersection $W_0(\sigma)\tilde{r} \cap W_0^L(\sigma)\tilde{r}_L$ soit non vide.

Remarque *Avec la simplification faite ici que le R-groupe agit et non une extension, la ω-représentation virtuelle de $\tilde{G}$, $\pi_{\sigma,\tilde{r}}$ est de trace non nulle. En général ce n'est pas nécessairement le cas et il faut introduire la notion d'élément $\tilde{r}$ essentiel c'est-à-dire non conjugué dans l'extension de R qui agit effectivement à un élément de la forme $z\tilde{r}$ avec z non trivial dans le centre de l'extension. (cf. [17] 2.9)*

2.3 Caractérisation des représentations elliptiques

Soit $\tilde{\pi}$ une représentation de $\tilde{G}$ et soit $\tilde{Q}$ un espace parabolique de $\tilde{G}$ d'espace de Levi $\tilde{L}$. Ainsi, dans le cas non archimdien le module de Jacquet (normalisé) π_N défini grâce au radical unipotent du sous-groupe parabolique Q de G associé à $\tilde{Q}$ a une action naturelle de $\tilde{L}$. On note $\tilde{\pi}_N$ cette représentation de $\tilde{L}$. On la décompose suivant les caractères généralisés pour l'action du centre de M ; on note $\pi_{L,u}$ la somme des espaces propres généralisés pour les caractères unitaires de ce groupe ; l'espace vectoriel où se réalise naturellement $\pi_{L,u}$ est un sous-espace de l'espace de $\tilde{\pi}_N$ qui est stable sous $\tilde{L}$. On note $\tilde{\pi}_{L,u}$ cet espace muni des opérateurs venant de $\tilde{L}$. Seule la trace nous intéresse et elle ne dépend que de l'espace de Levi et non de l'espace parabolique.

Dans le cas archimédien, une construction analogue sera donnée en 2.6, on l'admet ici.

On suppose que $\tilde{\pi}$ est une combinaison linéaire de représentations tempérées. Ainsi l'image de $\tilde{\pi}$ dans le groupe de Grothendieck des représentations tempérées de $\tilde{G}$ (modulo les représentations de traces nulles) est une combinaison linéaire d'induites de représentations elliptiques. On veut montrer, en suivant l'article de R. Herb [9] :

Théorème *La représentation $\tilde{\pi}$ est une somme de représentations elliptiques si et seulement si pour tout espace de Levi $\tilde{L}$ de $\tilde{G}$ la trace de $\tilde{L}$ opérant sur $\tilde{\pi}_{L,u}$ est nulle.*

2.4 Calcul de modules de Jacquet dans le cas non archimédien

Ici $\tilde{\pi}$ est une représentation tempérée de $\tilde{G}$ et on suppose que la représentation sous-jacente π de G est irréductible (on dira plus rapidement que $\tilde{\pi}$ est irréductible). On sait que deux induites de séries discrètes ayant un facteur commun sont isomorphes ; ainsi à π est associé une paire L, σ formé d'un sous-groupe de Levi et d'une série discrète telles que Q étant un sous-groupe parabolique de G ayant L comme sous-groupe de Levi, l'induite de σ de Q à G contient π comme sous-quotient irréductible et cette paire est unique à conjugaison près sous G. On note $I_Q^G(\sigma)$ cette induite dont la classe d'isomorphie est bien déterminée.

On définit de façon usuelle W_σ comme le stabilisateur dans G de la paire L, σ modulo L et on définit $\tilde{W}_\sigma$ comme l'analogue dans $\tilde{G}$. Ainsi $\tilde{W}_\sigma$ est un W_σ torseur. Soit $\tilde{\ell} \in \tilde{W}_{sigma}$ vu comme un élément de $\tilde{G}$; en notant $\tilde{L}$ la classe à gauche sous L de l'élément $\tilde{\ell}$, on définit un L bitorseur. Et on a $\tilde{L}W_\sigma = L\tilde{W}_\sigma$. On prolonge σ en une représentation $\sigma, \tilde{\sigma}$ de ce torseur. Ainsi, on munit I_Q^G d'un prolongement à $\tilde{G}$ dont la trace tordu ne dépend que du choix de $\tilde{\sigma}$; ce prolongement est donc bien défini à un scalaire près en tant que distribution sur les fonctions lisses sur $\tilde{G}$.

On reprend les notations de 2.2. On a fixé un prolongement $\tilde{\rho}$ à $\tilde{R}$ uniquement défini à un scalaire près et cela force une action de $\tilde{G}$ sur Π_ρ, notée

$\tilde{\Pi}_{\tilde{\rho}}$ qui est uniquement définie de façon à ce que le produit tensoriel $\tilde{\Pi}_{\tilde{\rho}} \otimes \tilde{\rho}$ soit la restriction de l'action de $\tilde{G} \times \tilde{R}$ à cette sous-représentation.

Revenons à $\tilde{\pi}$ fixée au départ; il existe ρ tel que, à un scalaire près $\pi, \tilde{\pi}$ soit $\Pi_\rho, \tilde{\Pi}_\rho$; on peut évidemment modifier le choix de $\tilde{\rho}$ de façon à ce que ce scalaire soit 1.

Soit $M, \tilde{M}$ un espace de Levi de $G, \tilde{G}$; alors on définit les modules de Jacquet ordinaires, $\pi_M, \tilde{\pi}_M$. Et on note $\pi_{M,u}, \tilde{\pi}_{M,u}$ la sous-représentation qui dans le groupe de Grothendieck donne la somme des sous-quotients ayant un caractère central unitaire; en d'autres termes les sous-quotients irréductibles de $\pi_{M,u}$ sont exactement les sous-quotients irréductibles de π_M qui sont tempérés.

Lemme *On suppose que $W_{\sigma,0} = \{1\}$; alors $\pi_{M,u}$ est semi-simple et il est nul si M ne contient pas L.*

Ce lemme est en fait dû à R. Herb. En effet en [9] 3.5, elle a calculé le semi-simplifié de $\pi_{M,u}$. En particulier, elle a montré que ce module de Jacquet est nul si, à conjugaison près, M ne contient pas L. En supposant que M contient L, on construit l'induite $I^M_{Q\cap M}(\sigma)$ qui est une représentation tempérée. Alors, d'après loc.cite, le semi-simplifié de $\pi_{M,u}$ est la somme directe des τ, sous-modules irréductibles de $I^M_{Q\cap M}(\sigma)$, chacun intervenant avec multiplicité la multiplicité de π dans l'induite de τ à G. Mais par la réciprocité de Frobenius,

$$Hom_G(\pi, I(\tau)) \simeq Hom_M(\pi_M, \tau) = Hom_M(\pi_{M,u}, \tau). \qquad (1)$$

Ainsi τ intervient comme quotient irréductible de π avec cette même multiplicité. D'où la semi-simplicité.

On suppose que $\pi_{M,u}$ n'est pas nul et on suppose donc que M contient L. On a alors clairement le corollaire suivant :

Corollaire *La représentation de $\tilde{M}$, $\tilde{\pi}_{M,u}$ a même trace que la trace de la représentation $\oplus_\tau \tau \otimes Hom_M(\tau, \pi_{M,u})$ où l'action de $\tilde{M}$ se fait sur $\pi_{M,u}$ et où τ parcourt l'ensemble des sous-M-représentations irréductibles (prises à isomorphisme près) incluses dans $Ind^M_{P\cap M}(\sigma)$.*

2.5 Calcul de la trace tordue sur les modules de Jacquet

Evidemment, dans le corollaire précédent, on peut ne considérer que les représentations τ stables sous-l'action par conjugaison de $\tilde{M}$, et donc construire une représentation $\tilde{\tau}$. Ainsi $\oplus_{\tilde{\tau}} \tilde{\tau} \otimes Hom_M(\tilde{\tau}, \tilde{\pi}_{M,u})$ a une action de $\tilde{M}$ le produit tensoriel de l'action de $\tilde{M}$ sur $\tilde{\tau}$ avec l'action diagonale sur $Hom_M(\tilde{\tau},\tilde{\pi}_{M,u})$ qui s'en déduit ; cette action diagonale est évidemment triviale sur M et donne donc uniquement un opérateur, qui est l'action de $\tilde{M}/M$. Il faut interpréter ce scalaire à l'aide du $\tilde{R}$-groupe.

On fixe $\tilde{L},\sigma$ et $\tilde{r}$ dans le $\tilde{R}$-groupe de l'induite de σ. On a donc défini $\pi_{\tilde{r}}$; c'est une représentation virtuelle et ses modules de Jacquet sont bien définis. Avec un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$ comme dans le paragraphe précédent, on a donc défini $\pi_{\tilde{r},\tilde{M},u}$ qui est une représentation semi-simple de $\tilde{M}$. Comme ci-dessus, la trace de l'action de $\tilde{M}$ sur ce module de Jacquet est la somme des traces sur chacune des composantes : $\tilde{\tau}\otimes Hom_M(\tilde{\tau},\tilde{\pi}_{M,u})$.

On revient à [1] page 88 et 89 pour fixer de façon compatible les extensions des représentations. On a fixé des opérateurs $N(w,\sigma)$ pour tout $w\in\tilde{R}$ opérant dans $Ind_P^G(\sigma)$. Si $w\in\tilde{R}_M$, cet opérateur est induit d'un opérateur analogue sur $Ind_{P\cap M}^M(\sigma)$ car $\tilde{M}$ est un espace de Levi de $\tilde{G}$. Pour toute sous-représentation irréductible de R_M, χ_τ intervenant pour l'action de R_M dans la décomposition de l'induite $Ind^M_{P\cap M}(\sigma)$, stable sous $\tilde{R}_M$, on fixe une extension $\chi_{\tilde{\tau}}$ et on définit $\tilde{\tau}$ la représentation irréductible de $\tilde{M}$ par sa trace : pour tout $\tilde{\gamma}$ semi-simple régulier dans $\tilde{M}$:

$$tr\,\tilde{\tau}(\tilde{\gamma}):=|R_M|^{-1}\sum_{\tilde{w}\in\tilde{R}_M}\overline{tr\chi_{\tilde{\tau}}(\tilde{w})}tr\,(N(\tilde{w},\sigma)I^L_{P\cap M}(\sigma)(\tilde{w}^{-1}\tilde{\gamma})). \qquad (1)$$

Par rapport au paragraphe précédent, on a inversé l'ordre des choix et on les rend compatibles aux choix faits pour $\tilde{G}$. On induit (1), comme en loc.cite et pour tout $\tilde{\gamma}\in\tilde{G}$ semi-simple régulier, pour cela il faut remarquer que pour $w'\in R$ et pour $\tilde{w}\in\tilde{R}$ on a

$$tr\,(N(w'\tilde{w}(w')^{-1},\sigma)I^G_P(\sigma)(w'\tilde{w}^{-1}(w')^{-1}\tilde{\gamma}))=tr\,(N(\tilde{w},\sigma)I^G_P(\sigma)(\tilde{w}^{-1}\tilde{\gamma})).$$

C'est l'analogue de l'assertion de [1] avant dernière formule de la page 89. Et ceci résulte des définitions, pour tout $w''\in\tilde{R}$

$$tr\,(N(\tilde{w''},\sigma)I^G_P(\sigma)(\tilde{w''}^{-1}\tilde{\gamma}))=\sum_\rho\chi_{\tilde{\rho}}(w'')tr\,\tilde{\rho}(\tilde{\gamma}). \qquad (2)$$

Maintenant on peut induire (1) pour obtenir :

$$tr\,Ind\,\tilde{\tau}(\tilde{\gamma})=|R|^{-1}\sum_{\tilde{w}\in\tilde{R}}\overline{tr\chi_{\tilde{\tau}}(\tilde{w})}tr\,(N(\tilde{w},\sigma)I^G_P(\sigma)(\tilde{w}^{-1}\tilde{\gamma})). \qquad (3)$$

En reportant (2) dans (3), on trouve que

$$tr\,Ind\,\tilde{\tau}(\tilde{\gamma})=\sum_\rho(|R|^{-1}\sum_{\tilde{w}\in\tilde{R}}\overline{tr\chi_{\tilde{\tau}}(\tilde{w})}tr\,\chi_{\tilde{\rho}}(\tilde{w}))tr\,\tilde{\rho}(\tilde{\gamma}).$$

Le terme entre parenthèse $(|R|^{-1}\sum_{\tilde{w}\in\tilde{R}}\overline{tr\chi_{\tilde{\tau}}(\tilde{w})}tr\,\chi_{\tilde{\rho}}(\tilde{w}))$ est un scalaire qui calcule la "multiplicité" de $\chi_{\tilde{\rho}}$ dans l'induite de $\chi_{\tilde{\tau}}$ et que l'on note $x(\tilde{\tau},\tilde{\rho})$. Avec ces choix, pour tout $\tilde{\rho}$ intervenant ci-dessus, $Hom_G(Ind\tilde{\tau},\tilde{\rho})$ a précisément pour action diagonale de $\tilde{G}$ un opérateur dont la trace est ce scalaire $x(\tilde{\tau},\tilde{\rho})$.

Lemme *Soit $\tilde{r}\in\tilde{R}$. L'action de $\tilde{G}$ dans $Hom_G(Ind\,\tilde{\tau},\pi_{\tilde{r}})$ a pour trace la trace de $\tilde{r}$ agissant dans $ind\chi_{\tilde{\tau}}$, c'est-à-dire $tr\,ind\,\chi_{\tilde{\tau}}(\tilde{r})$.*

Par définition $\pi_{\tilde{r}}$ vaut $\sum_{\tilde{\rho}} tr\tilde{\rho}(\tilde{r})\tilde{\rho}$ et avec les calculs fait ci-dessus, la trace cherchée vaut $\sum_{\tilde{\rho}} x(\tilde{\tau},\tilde{\rho})tr\tilde{\rho}(\tilde{r})$ ou encore $tr\,ind\chi_{\tilde{\tau}}(\tilde{r})$.

Lemme *Avec les notations précédentes, la trace de l'action de $\tilde{M}$ dans $Hom_M(\tilde{\tau},\pi_{\tilde{r},M})$ est $tr\,ind\chi_{\tilde{\tau}}(\tilde{r})$. En particulier cette trace est nulle si $\tilde{r}$ n'est pas conjugué d'un élément de $\tilde{M}$.*

On obtient ce lemme à partir du lemme précédant en remarquant que la réciprocité de Frobenius identifie $Hom_M(\tilde{\tau},\pi_{\tilde{r},M})$ et $Hom_G(Ind,\tilde{\tau},\pi_{\tilde{r}})$. Or $\tilde{M}/M=\tilde{G}/G$ et l'identification est compatible à l'action de $\tilde{M}$.

Corollaire *Avec les notations précédentes et en supposant que L est inclus dans M, alors $\tilde{\pi}_{M,u}$ est la somme des représentations de $\tilde{M}$ associées aux triplets $(L,\sigma,\tilde{r}')$ où $\tilde{r}'$ parcourt les conjugués de $\tilde{r}$ inclus dans $\tilde{M}$.*

C'est un corollaire du lemme précédent.

2.6 Le cas archimédien

Ici on suppose que $F=\mathbb{R}$ puisque le cas $F=\mathbb{C}$ en résulte par restriction des scalaires. On fixe, comme précédemment, un sous-espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$ et on note $\tilde{P}$ un espace parabolique d'espace de Levi $\tilde{M}$. On note P et M les sous-groupes correspondant à $\tilde{P}$ et $\tilde{M}$.

Harish-Chandra a défini le terme constant le long de P pour des fonctions satisfaisant des conditions de croissance en [5] section 21 ; en [4] thm 1 et 2, avec les références de loc.cite, il étend cette définition aux distributions tempérées.

Soit $\pi,\tilde{\pi}$ une représentation de $G,\tilde{G}$ que l'on suppose tempérée ; on rappelle que d'après [3] 3.5.1, le caractère de $\tilde{\pi}$ est tempéré au sens d'Harish-Chandra (cf. loc. cite). On définit alors le terme constant du caractère de π et de $\tilde{\pi}$, notée $\theta_{\pi,P}$ et $\theta_{\tilde{\pi},P}$ respectivement.

En [4] 5.6, Harish-Chandra a donné une interprétation de $\theta_{\pi,P}$. En effet, notons V un espace de π. L'espace vectoriel des coefficients matriciels pour

π et celui pour $\tilde{\pi}$ coïncident ; on note W le sous-espace de V formé des éléments tels que le terme constant de tout coefficient matriciel dont un des éléments est dans W est nul. On pose $\overline{V} := V/W$; c'est une représentation pour $M, \tilde{M}$, admissible (c'est un quotient de l'homologie en degré 0 pour le radical unipotent de P qui est une représentation admissible d'après [22] section 5.8). D'après [4] 5.6, le terme constant $\theta_{\pi,P}$ en tant que fonction sur M est le caractère pour l'action de M sur $\overline{V}$. Ce théorème n'a pas de démonstration mais il ne semble pas très difficile : soit v, v' des éléments de V et V' (le dual lisse de V) donnant lieu à un coefficient matriciel ; dans V' on considère l'orthogonal de W noté $W^{\perp}$. On note p, p' la projection de V sur $\overline{V}$ et celle de $W^{\perp}$ sur le dual lisse de $\overline{V}$. La distribution $f \mapsto < \pi(f)v, v' >$ est tempérée et son terme constant est caractérisé, d'après[4] 2.1, par la valeur de la distribution sur les fonctions à support compact dans $\overline{N}MN$ où $\overline{N}$ est le radical unipotent du parabolique opposé à P. Or pour $v' \in W^{\perp}$ et $\overline{n}mn$ dans cette décomposition, on a :

$$< p(\pi(\overline{n}mn)v), p'(v') >=< \overline{\pi}(m)p(v), p'(v') > .$$

Ainsi (à la constante près défini par loc. cite qui vient des mesures), le terme constant du coefficient matriciel associé à v, v' est le coefficient matriciel associé à $p(v), p'(v')$. On en déduit ensuite l'assertion de [4] 5.6. Ainsi la même assertion est vraie dans le cas tordu c'est-à-dire pour $\tilde{\pi}$ et l'action de $\tilde{M}$ dans $\overline{V}$: $\theta_{\tilde{\pi},\tilde{P}}$ est la trace de $\tilde{M}$ opérant dans $\overline{V}$.

On note $\overline{V}_u$ le sous-espace de $\overline{V}$ sur lequel le tore déployé maximal du centre de M opère par des caractères généralisés unitaires. C'est une représentation pour M et pour $\tilde{M}$.

On note $\mathfrak{n}$ l'algèbre de Lie du radical unipotent de P et on définit aussi, $V_{N,u}$ le sous-espace de $H_0(\mathfrak{n}, V)$ (l'homologie en degré 0) sur lequel le tore déployé du centre de M agit par des caractères généralisés unitaires. Il existe une application naturelle surjective de $V_{N,u}$ sur $\overline{V}_u$, $M, \tilde{M}$ équivariante. Sous l'hypothèse que la représentation V est tempérée, les exposants unitaires sont nécessairement maximaux et il résulte vraisemblablemen de [6] 1.3 que la bijection du lemme ci-dessous ne nécessite pas d'hypothèse sur le R-groupe ; par contre la deuxième assertion du lemme (la semi-simplicité) est très vraisemblablement fausse sans l'hypothèse faite.

Lemme *Soit V une représentation tempérée de G donc sous-module d'une induite de série discrète, σ, (uniquement déterminée) ; on suppose que $W_{0,\sigma} = 1$. L'application naturelle de $V_{M,u}$ dans $\overline{V}_{M,u}$ est une bijection et chacun de ces espaces est une représentation semi-simple de M.*

On note σ, L, Q un triplet formé d'un sous-groupe parabolique Q de G, d'un sous-groupe de Levi L de Q et d'une série discrète unitaire σ de L tel que π soit sous-quotient de l'induite $I_Q^G(\sigma)$. On vérifie d'abord que $V_{N,u}=0$ si M ne contient pas un conjugué de L : en effet supposons que $V_{N,u}$ ne soit pas nul. Alors il existe un quotient irréductible τ (qui est nécessairement une représentation tempérée) de cette représentation et par la réciprocité de Frobenius, π est une sous-module de l'induite de τ. Ainsi τ est un sous-quotient d'une induite $I_{Q'\cap M}^M(\sigma')$ de série discrète pour M. Par unicité des données, le couple L,σ est conjugué du couple L',σ' où L' est un sous-groupe de Levi convenable de $Q'\cap M$. D'où l'assertion.

On montre que $(I_Q^G(\sigma))_{N,u}$ (défini de façon analogue à $V_{N,u}$) est la somme directe des représentations $I_{Q'\cap M}^M(\sigma')$ où $Q'\cap M$ est un sous-groupe parabolique de M contenant un sous-groupe de Levi L' tel que L',σ' soit conjugué de L,σ, ces couples étant pris à association près sous l'action de M : c'est un calcul sur le caractère des induites (cf. par exemple [6] page 122 preuve de (b) ; le ν de loc.cite est ici n'importe quel caracètre unitaire sachant qu'un tel caractère est extrêmal ; si on utilise [4] 5.8, il n'y a pas besoin d'utiliser l'homologie mais loc. cite n'a malheureusement pas de démonstration). Par semi-simplicité, $(I_Q^G(\sigma))_{N,u}$ est la somme directe des $V_{N,u}$ quand π parcourt l'ensemble des sous-représentations de l'induite $I_Q^G(\sigma)$; par réciprocité de Frobenius, $V_{N,u}$ admet comme quotient la somme directe des représentations $\tau\otimes Hom_G(\pi, I_P^G(\tau))$ où τ parcourt l'ensemble des représentations tempérées de M et coïncide donc avec ce quotient. Ainsi $V_{N,u}$ est semi-simple en tant que représentation de M. D'autre part $\overline{V}_{M,u}$ a exactement les mêmes propriétés que $V_{N,u}$ pour la réciprocité de Frobenius d'après [4] 5.7 ; ceci force le fait que l'application naturelle de $V_{N,u}$ sur $\overline{V}_{M,u}$ soit un isomorphisme.

2.7 Calcul des modules de Jacquet dans le cas archimédien

Soit $\tilde{\pi}$ une représentation de $\tilde{G}$ associée à un triplet essentiel $(L,\sigma,\tilde{r})$ (cf. [17] 2.12). Et soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$. On définit $\tilde{\pi}_{M,u}$ en sommant sur les espaces définis dans le paragraphe précédent pour une représentation tempérée irréductible. Alors on a :

Corollaire *La trace de $\tilde{M}$ dans $\tilde{\pi}_{M,u}$ est nul si $(L,\sigma,\tilde{r})$ n'est pas un triplet pour $\tilde{M}$ à conjugaison près. On suppose maintenant que L est inclus dans M, alors la trace est la somme des traces de $\tilde{M}$ sur les représentations associées aux triplets $(L,\sigma,\tilde{r}')$ où $\tilde{r}'$ parcour l'ensemble des conjugués sous $\tilde{R}$ de $\tilde{r}$ inclus dans $\tilde{M}$, pour une normalisation convenable.*

Dans cet énoncé, on n'a pas précisé la normalisation, elle est forcée par celle de $\tilde{\pi}$, cela ne nous importe pas.

Ce corollaire est un corollaire de la preuve du lemme précédent : en effet dans le lemme précédent on a calculé $\tilde{\pi}_{M,u}$ exactement dans les mêmes termes que dans le cas non archimédien. La démonstration de 2.5 ne fait ensuite qu'utiliser les résultat de [1] qui sont valables dans le cas archimédien, c'est d'ailleurs là que l'on fixe les normalisations. D'où le corollaire.

2.8 Preuve du théorème de 2.3

Rappelons-en d'abord l'énoncé. On revient à une représentation $\tilde{\pi}$ tempérée de $\tilde{G}$. On écrit $\tilde{\pi}$ dans la base du groupe de Grothendieck des représentations de $\tilde{G}$ définie par les couples $(\tilde{M}, \tilde{\tau})$ (pris à conjugaison près sous G) où $\tilde{M}$ est un sous-espace de Levi de $\tilde{G}$ et où $\tilde{\tau}$ en est une représentation elliptique irréductible, c'est-à-dire correspondant à un triplet $(L, \sigma, \tilde{r})$ où L est un sous-groupe de Levi de M, σ en est une série discrète irréductible et $\tilde{r}$ est un élément régulier de $\tilde{R}^{\tilde{M}}$ du $\tilde{R}$-groupe de σ dans $\tilde{M}$ (avec $W_{0,\sigma}^{\tilde{M}} = 1$) (cf. [17] 2.12) et ces triplets sont essentiels au sens de loc.cite.

Par définition $\tilde{\pi}$ est elliptique si dans cette décomposition il n'intervient que les $\tilde{M}$ qui coïncident avec $\tilde{G}$ et le théorème dit que ceci est équivalent à ce que, pour tout espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$, la trace de $\tilde{M}$ dans les $\tilde{\pi}_{M,u}$ est nulle.

Montrons cela. pour L un sous-groupe de Levi de G et σ une série discrète irréductible de L, on note $\tilde{\pi}[L, \sigma]$ la somme des composantes de $\tilde{\pi}$ correspondant à des couples $\tilde{M}, \tilde{\tau}$ où (quitte à conjugué ce couple sour G), $\tilde{M}$ contient L et $\tilde{\tau}$ correspond à un triplet de la forme $(L, \sigma, \tilde{r})$ où L, σ sont les données fixées. Donc $\tilde{\pi}$ est la somme des $\tilde{\pi}[L, \sigma]$ quand (L, σ) parcourt l'ensemble des classes de conjugaison que l'on vient de décrire.

On fixe (L, σ) tel que $\tilde{\pi}[L, \sigma] \neq 0$; on fixe aussi $\tilde{M}$ minimal tel que L soit un sous-groupe de Levi de M vérifiant $W_{0,\sigma}^{\tilde{M}} = 1$ et il existe $\tilde{r}$ dans le $\tilde{R}^{\tilde{M}}$ et $\tilde{\pi}[L, \sigma]$ contient avec un coefficient non nul la représentation de $\tilde{G}$ associé au triplet $(L, \sigma, \tilde{r})$; cela force, par construction, ce triplet a être essentiel pour $\tilde{G}$.

Montrons que la condition de minimalité sur $\tilde{M}$ entraîne que $\tilde{\pi}[L, \sigma]_{M,u}$ est une représentation elliptique de $\tilde{M}$: on fixe $\tilde{r}$ tel que la représentation associée à $(L, \sigma, \tilde{r})$ contribue à $\tilde{\pi}[L, \sigma]$. Si $\tilde{r}$ n'est pas dans $\tilde{M}$ alors la représentation ne contribue pas au module de Jacquet $\tilde{\pi}[L, \sigma]_{M,u}$ d'après le corollaire de 2.5 et 2.7. Et par minimalité de $\tilde{M}$, un élément $\tilde{r}$ qui contribue est nécessairement régulier d'après [17] 2.11 et alors la contribution de cette représentation à $\tilde{\pi}[L, \sigma]_{M,u}$ est exactement la représentation de $\tilde{M}$ associée au triplet $(L, \sigma, \tilde{r})$ d'après le corollaire de 2.5 et 2.7.

Imposons maintenant à $\tilde{M}$ la condition de minimalité précédente mais en acceptant en plus que (L, σ) varie. Ainsi $\tilde{\pi}_{M,u}$ est la somme des représentations elliptiques associées aux triplets (essentiels pour $\tilde{G}$) $(L, \sigma, \tilde{r})$ tels qu'à conjugaison près $(L, \sigma, \tilde{r})$ soit un triplet elliptique pour $\tilde{M}$ qui intervient dans $\tilde{\pi}$ (les normalisations pour $\tilde{M}$ sont celles imposées par les choix pour $\tilde{\pi}$ comme cela a été fait en 2.5). Ainsi la trace de $\tilde{M}$ sur $\tilde{\pi}_{M,u}$ n'est pas nulle puisqu'un triplet $(L, \sigma, \tilde{r})$ qui est essentiel pour $\tilde{G}$ l'est aussi pour $\tilde{M}$ (s'il est inclus dans $\tilde{M}$) et $\tilde{\pi}$ est elliptique si et seulement si le seul choix pour $\tilde{M}$ est $\tilde{M} = \tilde{G}$. Cela prouve le théorème.

2.9 Transfert de représentations elliptiques

Corollaire *Soit $\tilde{\pi}$ une représentation de $\tilde{G}$; on suppose que la $\tilde{G}$-trace de $\tilde{\pi}$ est un transfert d'une combinaison linéaire stable de représentations elliptiques de groupes endoscopiques elliptiques de $\tilde{G}$. Alors $\tilde{\pi}$ est elliptique.*

La preuve du corollaire est la même dans le cas archimédien et le cas non archimédien, seules les notations diffèrent. On la donne dans le cas archimédien, le cas non archimédien sera traité dans un cadre plus général en 4.3

2.10 Preuve du corollaire dans le cas archimédien

On montre d'abord que $\tilde{\pi}$ est tempérée. On écrit $\tilde{\pi}$ dans la base du groupe de Grothendieck formée par les représentations induites à partir de représentations elliptiques modulo le centre d'espaces paraboliques (standard) de $\tilde{G}$. Si $\tilde{\pi}$ n'est pas tempérée, dans cette écriture intervient des induites avec des paramètres dans la chambre de Weil négative pour l'espace parabolique. On fixe une telle induite, en supposant d'abord que l'espace parabolique est minimal pour ce choix puis (à espace parbolique fixé) que l'exposant est minimal pour ce choix :

on note $\tilde{P}$ un espace parabolique d'espace de Levi noté $\tilde{M}$ minimal avec la propriété qu'en notant A un tore déployé maximal dans le centre de M il existe un caractère ν de A et une représentation elliptique $\tilde{\sigma}$ de M intervenant dans l'écriture ci-dessus avec ν dans la chambre de Weyl négative. On précise le choix de σ en faisant la combinaison linéaire de toutes les représentations elliptiques intervenant avec le caractère ν et on suppose que la trace de $\tilde{\sigma}$ est non nulle. Il faut vérifier que pour tout $\tilde{m}$ élément fortement régulier de $\tilde{M}$ la limite quand a tend vers l'infini dans la direction de P de $\nu(a)^{-1}\theta_{\tilde{G}}\tilde{\pi}(am) = \theta_{\tilde{\sigma}}(m)$, où les caractères sont normalisés de la façon usuelle. C'est la démonstration du cas non tordu : on remarque d'abord que dans le terme de gauche, quand on écrit $\tilde{\pi}$ dans le groupe de Grothendieck n'interviennent que des induites à partir d'espaces paraboliques contenant $\tilde{M}$ puis on utilise la minimalité de l'éxposant, ν.

Or $\theta_{\tilde{G}}\tilde{\pi}(am)$ se calcule par transfert. Explicitons : on fixe l'ensemble fini des couples $(\mathbf{G}', \mathbf{m}')$ formée d'une donnée endoscopique elliptique, $\mathbf{G}'$ de $\tilde{G}$ et d'un élément $m' \in \tilde{G}'(\mathbb{R})$ se tranférant en m ; ces couples sont pris à équivalence près. Pour chaque $(\mathbf{G}', \mathbf{m}')$ le choix d'un diagramme permettant le transfert (cf. [18], 1.8) permet d'envoyer $A_{\tilde{M}}$ en un sous-tore déployé A' de $G'_{m'} \subset G'$. On note M' le commutant de A' dans G'. D'où un application $a \mapsto a'$ de $A_{\tilde{M}}$ dans $A_{M'}$. Et on a

$$\theta_{\tilde{G}}\tilde{\pi}(am) = \sum_{(\mathbf{G}',\mathbf{m}')} \Delta^{\mathbf{G}'}(am, a'm')\theta_{\mathbf{G}'}\pi'(a'm'),$$

pour les représentations π' de $\mathbf{G}'$ qui déterminent $\tilde{\pi}$ par transfert et où les $\Delta^{\mathbf{G}'}$ sont les facteurs de transfert. Pour tout $(\mathbf{G}', \mathbf{m}')$, l'espace parabolique associé à P détermine un sous-groupe parabolique P' de G' de sous-groupe de Levi M' tel que la chambre positive pour P dans $A_{\tilde{M}}$ s'envoie sur la chambre positive pour P' de $A_{M'}$. On fait tendre a vers 0 dans la formule ci-dessus après avoir multiplié par $\nu(a)^{-1}$; a' tend lui aussi vers 0 dans la direction de P'. Les facteurs de transfert sont des nombres complexes de module 1 donc leur norme vaut constamment 1. Par hypothèse les représentations π' sont elliptiques donc $|\theta_{\mathbf{G}'}\pi'(a'm')|$ reste borné et la limite $\nu(a)^{-1}|\theta_{\mathbf{G}'}\pi'(a'm')|$ tend vers 0. Ainsi la limite quand on multiplie par $\nu(a)^{-1}$ est nulle ce qui donne la contradiction cherchée.

Maintenant que l'on est ramené aux représentations tempérées, on peut utiliser la caractérisation de la proposition précédente. Pour cela il suffit de remarquer que par définition du terme constant donnée en 2.6, la trace tordue sur les termes constants unitaires sont des transferts de leurs analogues pour les groupes endoscopiques exactement comme ci-dessus. Ils sont donc nuls pour les espaces paraboliques propres puisque ceci est vrai pour les représentations elliptiques que l'on transfère.

3 Stabilité

A partir de maintenant on suppose que le corps de base est non archimédien ; les résultats dans le cas archimédien sont démontrés dans [20]. Ici on suppose que $\tilde{G}$ est à torsion intérieure et que G est quasi-déployé et $\omega = 1$.

Théorème *soit $\pi, \tilde{\pi}$ une représentation elliptique de $\tilde{G}$; on suppose que pour toute fonction cuspidale $\tilde{f}$ sur $\tilde{G}$ vérifiant $S(\tilde{\gamma}, \tilde{f}) = 0$ pour tout élément $\tilde{\gamma} \in \tilde{G}$ fortement régulier, on a $trace(\tilde{\pi})(\tilde{f}) = 0$ alors cette nullité est vraie en enlevant l'hypothèse de cuspidalité sur $\tilde{f}$.*

En termes simples, une représentation virtuelle elliptique stable aux points elliptiques est stable.

Dans le cas, où l'on est, du corps de base non archimédient La démonstration se fait par voie globale en suivant [2] et en remplaçant les arguments de [2] 8.2 à 8.4 par l'utilisation des propriétés locales démontrées précédemment. C'est la méthode que l'on va suivre pour démontrer 4 ci-dessous. On ne fait pas la démonstration ici d'autant que ce théorème résulte du même théorème démontré en [2] puiqu'en [19] 2.3 et suivants, il a été montré que le cas quasidéployé et à torsion intérieure, on peut se ramener au cas non tordu. Avec cette démonstration elliptique, il n'est pas clair de voir pourquoi on élimine le cas du corps de base archimédien ; en fait comme on le verra plus loin, dans l'utilisation de la formule des traces, il faut impérativement savoir que le transfert des fonctions peut se faire en gardant la K-finitude. Cela est démontré en [20] et tous les théorèmes ci-dessous sont démontrés en [20], pas dans le même ordre et sans utilisation de la formule des traces.

3.1 Décomposition des représentations stables de $\tilde{G}$

On suppose encore ici que $\tilde{G}$ est quasi-déployé à torsion intérieure. Soit $\tilde{\pi}$ une représentation virtuelle de $\tilde{G}$, on la suppose stable, c'est-à-dire que pour toute fonction f sur $\tilde{G}$ dont les intégrales orbitales stables sont nulles, $tr\, \tilde{\pi}(f) = 0$.

On décompose $\tilde{\pi}$ dans le groupe de Grothendieck et en particulier pour toute classe de conjugaison de sous-espace de Levi $\tilde{L}$ de $\tilde{G}$, on définit $\tilde{\pi}_L$ une représentation virtuelle combinaison linéaires de représentations elliptiques modulo le centre de $\tilde{L}$, invariante sous l'action de $Stab_G \tilde{L}$ (groupe noté habituellement $W^G(\tilde{L})$ en particulier en [17]) de telle sorte que $\tilde{\pi}$ est la somme des induites de $\tilde{\pi}_L$ (le choix de l'espace parabolique pour induire n'a pas d'importance).

Corollaire *Chaque $\tilde{\pi}_L$ est stable.*

C'est essentiellement la même démonstration que dans le cas non tordu mais on la redonne.

Soit f une fonction cuspidale. On a évidemment $tr\,\tilde\pi(f) = tr\,\tilde\pi_G(f)$; ainsi l'hypothèse de stabilité de $\tilde\pi$ entraîne que $\tilde\pi_G$ est stable sur les éléments elliptiques ; ici $\tilde\pi_G$ est uniquement supposé une combinaison linéaire de représentations elliptiques modulo le centre.

On fixe $\tilde L$ une classe de conjugaison d'espace de Levi de $\tilde G$ et on suppose que l'on a déjà montré que $\tilde\pi_{L'}$ est stable pour tout espace $\tilde L'$ contenant strictement un conjugué de $\tilde L$. En remplaçant $\tilde\pi$ par la différence de $\tilde\pi$ avec l'induite de ces représentations, on garde la même hypothèse de stabilité mais on a en plus que $\tilde\pi_{L'} = 0$ si L' contient un conjugué de L.

On montre que $\tilde\pi_L$ est stable. On fixe un espace parabolique $\tilde P$ d'espace de Levi $\tilde L$ et on calcule le module de Jacquet de $\tilde\pi$ pour le radical unipotent de cet espace parabolique.

Le module de Jacquet d'une induite, $Ind_Q^G\pi'$ est, d'après Bernstein et Zelevinski la somme des induites $Ind_{Q_w}^L(w.\pi'_{Q'_w})$ où w parcourt un ensemble de représentants des doubles classes du groupe de Weyl de G modulo celui de L et celui d'un Levi, M_Q de Q, de longueur minimale dans leur double classe et où Q_w est un sous-groupe parabolique de L de Levi $L \cap wM_Qw^{-1}$ tandis que Q'_w est le sous-groupe parabolique de M_Q, $w^{-1}Lw \cap M_Q$. Ainsi Q_w est un sous-groupe parabolique propre de L sauf si $w^{-1}Lw$ est inclus dans Q ; dans ce dernier cas $\tilde\pi_Q = 0$ par hypothèse sauf si $Q = P$ (plus exactement si Q et P sont dans la même classe d'association mais on les a alors supposé égaux). Comme on a précisé que $\tilde\pi_L$ est invariant par conjugaison sous le groupe de Weyl de G stabilisant L, le module de Jacquet cherché est donc la somme d'un multiple de $\tilde\pi_L$ avec des induites propres en tant que représentation de L et non de $\tilde L$. Toutefois ici on est dans le cas où G est quasi-déployé et où l'action de $\tilde G$ sur G est intérieure. Tous les sous-groupes paraboliques considérés contiennent le même tore tordu et en particulier sont des espaces paraboliques. L'action de $\tilde L$ est naturelle sur toutes les induites. Donc ainsi le module de Jacquet de $\tilde\pi$ en tant que représentation virtuelle de $\tilde L$ est la somme d'un multiple non nul de $\tilde\pi_L$ et de représentations induites propres. Ce module de Jacquet est certainement stable puisque $\tilde\pi$ est stable et $\tilde\pi_L$ est alors stable sur les éléments elliptiques (propriété qui ne voit pas les induites propres). On sait donc, grâce au théorème précédent, que c'est une représentation stable. Ceci termine la preuve.

4 Représentations elliptiques comme transfert

Théorème *Soit $\tilde\pi$ une représentation elliptique de $\tilde G$; alors $\tilde\pi$ est le transfert d'une combinaison linéaire de représentations elliptiques de sous-groupes* *endoscopiques elliptiques de $\tilde{G}$. Et réciproquement, le transfert d'une représentation elliptique stable d'un groupe endoscopique elliptique de $\tilde{G}$ est une représentation elliptique de $\tilde{G}$.*

Ce théorème se démontre en suivant exactement la preuve de [2]. On résume ici la preuve du sens direct du théorème (le plus difficile, en fait) et on l'explicite dans les paragraphes suivant. Soit $\tilde{\tau}$ une représentation elliptique de $\tilde{G}$ dont on note $\phi_{\tilde{\tau}}$ un pseudo coefficient qui est une fonction cuspidale sur $\tilde{G}$; ici nous avons une difficulté quand $A_{\tilde{G}} \neq 1$. On fixe un caractère unitaire μ de $A_{\tilde{G}}$, on suppose que $\tilde{\tau}$ se transforme suivant ce caractère et que $\phi_{\tilde{\tau}}$ se transforme suivant le caractère μ^{-1}, c'est un pseudo coefficient avec un caractère central (cf. [17] 7.2). Bien entendu μ doit satisfaire à la condition de transformation : $ad(\gamma).\mu = \mu\omega$ pour tout γ dans $\tilde{G}$ pour que l'énoncé ne soit pas vide.

Soit $\mathbf{H}$ une donnée endoscopique elliptique de $\tilde{G}, \omega$. Le tranfert de $\phi_{\tilde{\tau}}$ est une fonction cuspidale avec caractère central pour $\tilde{H}$ (quand on fait vraiment intervenir les données auxiliaires indispensables même si on les néglige aussi, on a de toute façon un caractère pour un sous-groupe du centre de H' la donnée auxiliaire). On note $\phi_{\tilde{\tau}}^H$ ce transfert qui n'est bien défini que dans $SI_{cusp}(\mathbf{H})$. On voit $SI_{cusp}(\mathbf{H})$ comme un sous-espace vectoriel de $I_{cusp}(\mathbf{H})$ qui est l'orthogonal pour le produit scalaire elliptique des éléments de $I_{cusp}(\mathbf{H})$ obtenu par transfert à partir des données endoscopiques elliptiques propres de $\mathbf{H}$ (cf. [18] (i) de 4.11). On identifie alors par la dualité de [17] 7.2 la fonction $\phi_{\tilde{\tau}}^H$ a une somme de pseudo coefficients de représentations elliptiques de $\mathbf{H}$ avec un caractère central déterminé par μ ou encore cela détermine une représentation elliptique $\tilde{\tau}^H$ sur laquelle la trace sur $\phi_{\tilde{\tau}}^H$ vaut 1 et qui donne la trace 0 à tous les éléments de $I_{cusp}(\mathbf{H})$ (avec le même caractère central que $\phi_{\tilde{\tau}}^H$) orthogonaux pour le produit scalaire elliptique à $\phi_{\tilde{\tau}}^H$). En particulier $\tilde{\tau}^H$ annule toutes les fonctions cuspidales instables (c'est-à-dire ayant leurs intégrales orbitales stables nulles) et, grâce au théorème de 3 est donc une représentation elliptique stable de $\mathbf{H}$. On note donc $\tilde{\tau}^H$ par $\tau_{H,st}$.

On vient donc de construire pour toute donnée endoscopique elliptique $\mathbf{H}$ de $\tilde{G}$ une représentation elliptique $\tau_{H,st}$ stable et il est à peu près claire que l'on a l'égalité :

$$tr\, \tilde{\tau}(f) = \sum_{\mathbf{H}} tr\, \tau_{H,st}(f^{\mathbf{H}}) \tag{1}$$

pour toute fonction cuspidale f sur $\tilde{G}$. Et pour démontrer la première partie du théorème, il suffit donc de montrer que puisque (1) est vrai pour les fonctions cuspidales alors (1) est vrai pour toutes les fonctions.

Pour cela on fixe une fonction f_0 et on pose

$$\phi_{f_0} := \sum_{\tilde{\tau}} \phi_{\tilde{\tau}} \Big(tr\, \tilde{\tau}(f_0) - \sum_{\mathbf{H}} tr\, \tau_{H,st}(f_0^{\mathbf{H}}) \Big), \tag{2}$$

où $\tilde{\tau}$ parcourt l'ensemble des représentations elliptiques de $\tilde{G}$ (prises à homothétie près) ayant μ comme caractère cental. Le terme de droite est fini on le montrera avant de commencer la preuve.

L'argument consiste ensuite à globaliser la situation et à montrer que toute fonction test globale ayant ϕ_{f_0} en la place qui nous intéresse et étant cuspidale en deux autres places (de façon à avoir une formule des traces simple), annule le côté spectral de la formule des traces. Par approximation on en déduira que les ω-intégrales orbitales de ϕ_{f_0} en les points elliptiques de $\tilde{G}$ sont nulles et comme ϕ_{f_0} est une fonction cuspidale cela suffit pour savoir que toute les ω-intégrales orbitales pour des éléments semi-simple réguliers de $\tilde{G}$ sont nulles. D'après le théorème et donc que ϕ_{f_0} est d'image nulle dans $I_{cusp}(\tilde{G})$. Comme les éléments $\phi_{\tilde{\tau}}$ sont linéairement indépendant dans $I_{cusp}(\tilde{G})$ d'après [17] 7.2, le coefficient affectant $\phi_{\tilde{\tau}}$ dans la définition de ϕ_{f_0} est nul pour toute représentation elliptique $\tilde{\tau}$ et cela donne l'égalité (1) pour f_0.

4.1 Une propriété de finititude des représentations elliptiques

Une représentation elliptique est dite irréductible si elle est associée à un triplet (M, σ, r) où M est un sous-groupe de Levi de G, σ est une série discrète de M et r est un élément régulier du R-groupe tordu de σ (cf. [17] 2.11 et 2.12). On dit que deux représentations elliptiques sont homothétiques s'il existe $x \in \mathbb{C}^*$ (de norme 1) tel que l'une des représentations se déduise de l'autre par multiplication par x. Un triplet comme précédemment ne détermine que la classe d'homothétie d'une représentation elliptique.

La proposition suivante est essentiellement un corollaire d'un résultat de finitude dû à Harish-Chandra, comme la preuve va le montrer.

Proposition *Soit K un sous-groupe compact de G. Modulo l'action par tensorisation des caractères non ramifiés de G, $\tilde{G}$-invariants, il n'y a qu'un nombre fini de représentations elliptiques irréductibles de $\tilde{G}$ ayant des vecteurs invariants sous K à homothétie près.*

En effet fixons une représentation elliptique de $\tilde{G}$. Elle, ou plutôt sa classe d'homothétie, est associée à un triplet (M, σ, r). On suppose que cette représentation elliptique a des vecteurs invariants sous K. A fortiori, la représentation de G obtenu en induisant σ a des vecteurs invariants sous K. On fixe M et r que l'on relève en un élément de $Norm_{\tilde{G}}(M)$ que l'on suppose régulier. On considère l'ensemble des séries discrètes σ' de M ayant des vecteurs invariants sur $K \cap M$ et étant normalisé (à isomorphisme près) par w ; σ fait partie de cet ensemble. On en extrait un sous-ensemble fini $\mathcal{E}(M, K, w)$ tel que pour tout σ' ayant les propriétés précédentes, il existe σ_0 dans $\mathcal{E}(M, K, w)$ et un caractère non ramifié χ de M tel que $\sigma' = \chi \otimes \sigma_0$; ceci est possible car modulo l'action des caractères non ramifiés de M, il n'y a qu'un nombre fini de séries discrètes de M ayant des vecteurs $K \cap M$ invariants d'après Harish-Chandra. Remarquons que puisque σ' et σ_0 sont normalisés par w, on a aussi que $\chi\, {}^w\chi^{-1}$ est dans le stabilisateur de σ_0 pour l'action des caractères non ramifiés. On restreint au tore déployé central A_M de M. Le groupe des caractères unitaires de ce tore est le quotient de l'espace vectoriel réel, $i\mathfrak{a}_M^*$ par un réseau ; on voit le stabilisateur de σ_0 comme un sous-réseau de $i\mathfrak{a}_M^*$ contenant le réseau précédent. L'élément w agit dans $i\mathfrak{a}_M^*$ de façon semi-simple. Le sous-espace vectoriel $i\mathfrak{a}_{\tilde{G}}^*$ est aussi stable par w et est exactement l'espace propre pour la valeur propre 1 parce que w est régulier ; w laisse stable le réseau stabilisant σ_0 et par passage au quotient w agit de façon semi-simple, l'espace propre pour la valeur propre 1 étant exactement l'image de $i\mathfrak{a}_{\tilde{G}}^*$. Ainsi, il existe un caractère unitaire de G invariant sous $\tilde{G}$ dont la restriction à A_M est χ. Notons χ_0 ce caractère et χ diffère donc de χ_0 par un caractère χ_1 non ramifié de M, trivial sur A_M, il n'y en a qu'un nombre fini. On a donc montré que modulo l'action des caractères de $A_{\tilde{G}}$, il n'y a qu'un nombre fini de séries discrètes de M ayant des vecteurs invariants par $K \cap M$ et invariantes sous l'action de w. Le $\tilde{R}$-groupe d'une représentation σ est le même que celui d'une représentation $\sigma \otimes \chi_1$ si χ_1 est un caractère de $A_{\tilde{G}}$ et on a donc montré que modulo l'action des caractères de $A_{\tilde{G}}$ il n'y a qu'un nombre fini de couples (σ, w) pour M fixé et tel que (M, σ, r) (r est l'image de w comme précédemment) soit un triplet elliptique. En faisant varier M dans un ensemble de représentants des classes de conjugaison sous G de sous-groupe de Levi de G, on obtient la proposition.

Corollaire *L'expression (2) du paragraphe 4 est une somme finie.*

En effet on a fixé f_0 avec un caractère central ; cette fonction est K-finie pour un bon sous-groupe compact ouvert K de G. Il n'y a donc qu'un nombre fini de représentations elliptiques irréductible (à homothétie près) ayant des vecteurs invariants sous K et ayant le caractère central fixé, d'après le lemme précédent. Il n'y a qu'un nombre fini de données endoscopiques elliptiques $\mathbf{H}$ pour $\tilde{G}$ et ω. On en fixe une et il faut encore montrer que $tr\,\tau_{\mathbf{H},st}(f_0^{\mathbf{H}}) = 0$ sauf pour un nombre fini de représentations $\tilde{\tau}$. On décompose $f_0^{\mathbf{H}}$ suivant le théorème de Paley-Wiener ce qui nécessite de voir $f_0^{\mathbf{H}}$ comme un élément de $I_{cusp}(\mathbf{H})$ relevant l'élément bien défini uniquement dans $SI(\mathbf{H})$. On note $f_{0,cusp}^{\mathbf{H}}$ la composante elliptique dans cette décomposition et $f_{0,cusp,st}^{\mathbf{H}}$ la projection de cette composante elliptique dans $SI_{cusp}(\mathbf{H})$; on remarque que $f_0^{\mathbf{H}}$ est invariant sous les automorphismes de la donnée endoscopique, on suppose donc comme on a le droit que $f_{0,cusp}^{\mathbf{H}}$ puis $f_{0,cusp,st}^{\mathbf{H}}$ ont aussi cette propriété d'invariance. Alors il existe un élément de $I_{cusp}(\tilde{G})$, noté f_0' un élément de $I_{cusp}(\tilde{G})$ dont le transfert a même image que $f_{0,cusp,st}^{\mathbf{H}}$ dans $SI_{cusp}(\mathbf{H})$ (cf. encore [18], 4.11 (i)) et on note K_1 un sous-groupe compact ouvert de G tel que f_0' soit biinvariante sous K_1. On a donc pour toute représentation elliptique $\tilde{\tau}$ de $\tilde{G}$: $tr\,\tau_{\mathbf{H},st}(f_0^{\mathbf{H}}) = tr\,\tau_{\mathbf{H},st}(f_{0,cusp}^{\mathbf{H}})$ car $\tau_{\mathbf{H},st}$ est elliptique, puis cela vaut encore $tr\,\tau_{\mathbf{H},st}(f_{0,cusp,st}^{\mathbf{H}})$ car la représentation est stable, puis $tr\,\tilde{\tau}(f_0')$ car $\tau_{\mathbf{H},st}$ est un transfert au moins en les points elliptiques de $\tilde{\tau}$. Et ceci est donc nul dès que $\tilde{\tau}$ n'a pas de vecteurs invariants sous K_1. On applique alors encore le lemme de finitude précédent pour avoir la nullité cherchée pour presque toute représentation elliptique $\tilde{\tau}$ avec les hypothèses faites.

4.2 Globalisation et approximation

Ici on note F_0 le corps de base p-adique qui était noté F dans les paragraphes précédents. Et de même on note $G_0, \tilde{G}_0, \omega_0$ les données notées $G, \tilde{G}, \omega$ jusquà présent. Soit $\phi_0 \in I_{cusp}(\tilde{G}_0, \omega)$; on a remis ici le ω puisqu'il introduit une réelle difficulté. On suppose aussi que ϕ_0 a un caractère unitaire, ν_0, sous l'action de $A_{\tilde{G}}$.

On suppose que pour toute donnée globale, $F, G, \tilde{G}, \omega$ qui en une place v_0 de F se localise en $F_0, G_0, \tilde{G}_0, \omega_0$ et pour toute fonction test $f^{v_0} := \otimes_{v \neq v_0} f_v$ qui est cuspidale et à support dans les éléments semi-simple régulier en au moins deux places, on a $I_{geo}^{\tilde{G}}(\omega, \phi_0 \otimes f^{v_0} \otimes \phi_0) = 0$ où la distribution écrite est le côté géométrique de la formule des traces avec un caractère central (cf. 9).

Proposition *Sous ces hypothèses, ϕ_0 est nulle dans $I_{cusp}(\tilde{G}, \omega)$.*

Cette proposition est démontrée dans l'appendice en 8.

4.3 Preuve de la première partie du théorème

On note $\tilde{\mathcal{H}}^v$ l'algèbre de Hecke hors de v et on se limite aux fonctions qui sont cuspidales en au moins deux places et qui en une place sont à support dans l'ensemble des éléments semi-simples réguliers ; on suppose en plus que ces fonctions sont invariantes sous $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$ qui est le $\mathfrak{A}_G^\theta$ de [11] début du paragraphe 6. On a donc une formule des traces simples, dont la partie géométrique se stabilise grâce à [11] 6.4.C et [12] V.4.2 : pour tout $\dot{\tilde{f}}^v \in \tilde{\mathcal{H}}^v$ et pour tout $\tilde{f}$ dans l'algèbre de Hecke de $\tilde{G}$:

$$I(\dot{\tilde{f}}^v \tilde{f}) = \sum_{\tilde{\mathbf{H}}} i(\tilde{G}, \tilde{H}) S^{\tilde{\mathbf{H}}}(\dot{\tilde{f}}^{v,H} \tilde{f}^H), \qquad (*)$$

où à droite on a des distributions stables appliquées à des fonctions transfert de $\dot{\tilde{f}}^v \tilde{f}$ ce qui est la formulation de [12] plutôt que celle de [11].

Comme dans [2] 8.1 cette égalité se coupe à l'aide es multiplicateurs ; ceci est possible car toutes les fonctions apparaissant aux places archimédiennes sont K-finies, on utilise donc [20] 3.4. Pour le lecteur qui ne veut pas utiliser cette référence qui utilise elle-même la première partie de cet article, on peut aussi suppose que les places archimédiennes sont toutes des places complexes où la situation est bien plus simple.

On fixe V un ensemble de places suffisamment grand et on ne regarde que les fonctions qui hors de V sont les fonctions caractériques des compacts hyperspéciaux.

On fixe ν un caractère infinitésimal qui apparaît pour une représentation unitaire de $G(F_\infty)$. Il n'est pas difficile de définir a priori $I_\nu(\dot{\tilde{f}}^v \tilde{f})$: cette distribution, grâce à la formule des traces simple se décompose en une somme de distribution qui sont des traces pour des représentations automorphes de carré intégrable de $\tilde{G}(\mathbb{A})$ et on ne garde que celles dont le caractère infinitésimal est ν.

C'est plus compliqué pour les termes du côté droit puisqu'on n'a pas (pour le moment) de stabilisation spectrale. On procède ainsi : on vérifie d'abord que pour $\tilde{\mathbf{H}}$ une donnée endoscopique elliptique fixé, la distribution qui à $f_{\mathbf{H}} \in I_{simp}(\tilde{\mathbf{H}})$ (où $\tilde{\mathbf{H}}$ représente une donnée auxiliaire pour la donnée endoscopique) associe $S^{\tilde{\mathbf{H}}}(f_{\mathbf{H}})$ est une somme de caractères stables dans V (finie quand les K_H-types de $f_{\mathbf{H}}$ sont fixés dans V) ; l'indice *simp* signifie que l'on ne regarde que des fonctions cuspidales en au moins deux places de V et à support dans les éléments semi-simples réguliers. Cela se montre par récurrence en considérant cette distribution comme la différence du côté géométrique de la formule des traces pour $\tilde{\mathbf{H}}$ avec les transferts pour les données endoscopiques propres de $\tilde{\mathbf{H}}$; la stabilité est démontrée puisque c'est le côté géométrique. Quand on développe en termes de caractères, on garde la stabilité et le fait que l'on puisse donc développer en une somme de caractères stable résulte alors de 3.1 appliqué dans V. On définit alors $S_\nu(\cdots)$ en ne gardant que les représentations dont le caractère infinitésimal se transfère en ν.

En utilisant les multiplicateurs on transforme l'égalité (*) en son analogue en ajoutant ν en indice. Ici on utilise la convergence absolue démontré par Müller [14] pour la partie discrète de la formule des traces pour pouvoir passer à la limite comme dans [2] 8.1 (qui utilise une majoration que nous n'avons pas établie).

On développe les distributions obtenues à ν fixé pour séparer la partie elliptique en v (c'est-à-dire les traces sur les représentations elliptiques de $\tilde{G}(F_v)$) de la partie parabolique en v. Ce qui nous intéresse est la distribution :

$$\tilde{f} \mapsto I_\nu(\dot{\tilde{f}}^v \tilde{f}),$$

où $\dot{\tilde{f}}^v$ est fixé, dans le groupe de Grothendieck de $G, \tilde{G}$ et plus précisément sur la base obtenue à l'aide des induites de représentations elliptiques :

$$I_\nu(\dot{\tilde{f}}^v \tilde{f}) = \sum_{\tilde{\pi},\text{elliptique}} I_\nu(\dot{\tilde{f}}^v, \tilde{\pi})\tilde{\pi}(\tilde{f}) \oplus \sum_{\tilde{\sigma},\text{induite}} I_\nu(\dot{\tilde{f}}^v, \tilde{\sigma})\tilde{\sigma}(\tilde{f}). \qquad (1)$$

On décompose aussi le côté droit de (*) : d'abord les données endoscopiques globales $\tilde{\mathbf{H}}$ qui se localisent en un groupe endoscopique non elliptique en la place v fournissent une combinaison linéaire stable de représentations qui se transfèrent en des représentations nécessairement induites. On ne considère donc que les données endoscopiques globales qui se localisent en la place v en une donnée endoscopique elliptique locale. On a alors à transférer des distributions stables écrites comme dans 3.1 comme une somme d'induites de représentations stables.

On ne transfère pour le moment que celles qui sont des induites propres. Si l'induite se fait à partir d'un sous-groupe de Levi qui ne se transfère pas à $\tilde{G}$ la contribution de ce sous-groupe de Levi qui est une trace d'un transfert de f est nécessairement nulle sur ce transfert de f. Pour les Levi qui se transfèrent on peut transférer les représentations en des représentations induites et on le fait.

Ainsi du côté droit de (*), il ne reste que des représentations elliptiques en la place fixée et du côté gauche, on a d'une part la partie elliptique écrite en (1) que l'on n'a pas modifiée et une combinaison linéaire d'induites propres de représentations elliptiques. On va montrer que cette combinaison linéaire est nécessairement nulle. Récapitulons d'abord les notations, ici on fixe f^v et on note $\tilde{\Pi}_{par}$ la combinaison linéaire telle que pour tout fonction f_v on ait

$$\sum_{\tilde{\pi},\text{elliptique}} I_\nu(\dot{\tilde{f}}^v, \tilde{\pi})\tilde{\pi}(f_v) \oplus tr\,\tilde{\Pi}_{par}(f_v) =$$

$$\sum_{\tilde{\mathbf{H}},\pi_{\mathbf{H},\mathbf{st}}} S_\nu(\dot{\tilde{f}}^{v,H}, \pi_{H,st}) tr\,\pi_{H,st}(\tilde{f}^H), \tag{2}$$

où H parcourt les sous-groupes endoscopiques elliptiques de G (locaux) et où $\pi_{H,st}$ parcourt une base des représentations elliptiques stables de H. Et on démontre que $tr\,\tilde{\Pi}_{par}(f_v) = 0$ pour tout f_v.

On fixe un support cuspidal pour une représentation irréductible de G qui intervient réellement dans Π_{par} ; il n'y a alors plus qu'un nombre fini de représentation ayant ce support cuspidal. Le support cuspidal fixe un sous-groupe de Levi standard de G (pas de $\tilde{G}$), M_{cusp} ; on a aussi un sous-groupe parabolique standard P_{cusp} de sous-groupe de Levi M_{cusp}. D'où une chambre de Weyl obtuse positive ouverte C^+ dans $\mathfrak{a}^*_{M_{cusp}}$. On munit $\mathfrak{a}^*_{M_{cusp}}$ de l'ordre partiel, $\lambda < \mu$ si $\mu - \lambda \in C^+$. On fixe un exposant λ_0 minimal pour cet ordre et intervenant dans le module de Jacquet de l'une des sous-représentations irréductibles de Π_{par}. La minimalité de λ_0 assure que λ_0 est un exposant pour l'un des quotients de Langlands des induites constituant Π_{par}. On note $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ et $\tilde{\sigma}$ la représentation elliptique de $\tilde{M}$ (modulo le centre) telle que l'induite de $\tilde{\sigma}$ intervient dans Π_{par} et a parmi ses quotients de Langlands une représentation ayant λ_0 comme exposant (il y a plusieurs quotients de Langlands car $\tilde{\sigma}$ est uniquement virtuelle) avec les données cuspidales fixées. On impose en plus à $\tilde{M}$ d'être minimal avec ces conditions. On considère le module de Jacquet de Π_{par} pour l'espace parabolique de Levi $\tilde{M}$ et ce module de Jacquet contient σ mais il y a aussi, a priori, d'autres contributions. D'abord on remarque que λ_0 est un exposant minimal de $\tilde{\sigma}$ et est donc un caractère du tore déployé maximal du centre de M invariant sous $\tilde{M}$. On note M_0' le sous-groupe de Levi minimal de G admettant λ_0 comme caractère et M_0' est nécessairement le sous-groupe de Levi sous-jacent à un espace de Levi car il est déterminé par λ_0 qui est stable sous $\tilde{M}$. La minimalité de λ_0 entraîne que les seules contributions au module de Jacquet de Π_{par} ayant comme support cuspidal le support cuspidal fixé et l'exposant fixé, λ_0, viennent de sous-espace de Levi, M', contenant M_0' (à conjugaison près et on suppose donc que M' contient M_0'). De plus la minimalité de λ_0 entraîne que λ_0 est aussi un exposant pour

M' et les contributions viennent des modules de Jacquet des induites de représentations elliptiques de M' ayant λ_0 comme exposant. On calcule ces modules de Jacquet suivant la formule de Bernstein-Zelevinski généralisée au cas tordu par Henniart et Lemaire [8] 2.10 : ce sont des induites de restrictions. Si la restriction se fait pour un sous-espace parabolique de $\tilde{M}'$ ne contenant pas (à conjugaison près $\tilde{M}'_0$), l'exposant est supérieur strictement à λ_0 et on n'a pas à en tenir compte. La restriction d'une représentation elliptique de $\tilde{M}'$ à un de ses espaces de Levi est de trace tordue nulle si cet espace de Levi est propre. Il faut donc que $M' = M_0$ pour qu'il y ait une contribution de trace tordue non nulle. Donc le module de Jacquet de Π_{par} calculé suivant l'espace parabolique standard d'espace de Levi $\tilde{M}_0$ a une composante de trace tordue non nulle avec un exposant λ_0. On peut encore ajouter le module de Jacquet de la partie elliptique correspondant à $\tilde{G}$ sans perdre la non nullité : en effet, cette contribution à l'exposant λ_0 nécessite que celui-ci soit unitaire mais même dans ce cas, grâce à 2.3, la contribution est de trace tordue nulle.

Pour terminer la preuve, on voudrait que le module de Jacquet du côté gauche de (2) soit un transfert d'un module de Jacquet pour le membre de droite de (2) ; le côté droit n'a que des représentations elliptiques dont les modules de Jacquet propres sont de traces nulles dans la λ_0 composante pour la même raison que ci-dessus et cela donnerait la contradiction montrant que la trace tordue de Π_{par} annule toutes les fonctions sur $\tilde{G}$. Le problème est que le membre de droite est a priori une somme infinie qui ne devient finie que quand on fixe f_v et pas seulement un K-type selon lequel f_v se transforme. On ne peut donc pas comparer les modules ; pour pouvoir les comparer, il faut avoir une égalité de la forme $tr\, \tilde{\sigma}(f_v) = \sum_{\mathbf{H}} tr\, \sigma_{H,st}(f_v^{\mathbf{H}})$ avec des représentations de longueur finie, définie indépendamment de f_v, f_v variant dans une famille de fonctions, famille stable par translation à gauche sous $a \in A_{\tilde{M}_0}$ au moins pour a vérifiant $|\alpha(a)| < \eta$ (où $\eta \in \mathbb{R}_{>0}$ est fixé) pour tout α racine positive de l'espace parabolique standard de Levi M_0. Grâce à Labesse [12], on peut le faire en introduisant comme en [15] 4.2 la famille de fonctions suivantes : soit $f_{M_0} \in C_c^\infty(\tilde{M}_0)$ et K un groupe compact ouvert de G que l'on suppose suffisamment petit. Alors il existe $\eta > 0$ de sorte que pour tout $a \in A_{\tilde{M}_0}$ vérifiant comme ci-dessus $|\alpha(a)| < \eta$ pour toute racine de $A_{\tilde{M}_0}$ agissant dans le radical unipotent de P il existe une fonction ${}^a f^K$ sur $\tilde{G}$ vérifiant :

(1) ${}^a f^K$ est K-invariante à droite sous K

(2) si $g \in \tilde{G}$ est un élément semi-simple régulier non conjugué du support de $a^f_{M_0}$ (fonction obtenue en translatant f à gauche par a), alors

$I(g,\omega,\, {}^a f_{M_0}^K) = 0$

(3) et si $g \in \tilde{M}_0$ est un élément semi-simple régulier de $\tilde{M}_0$ appartenant au support de ${}^a f_{M_0}$, alors $I(g,\omega,\, {}^a f_{M_0}^K) = I^{\tilde{M}_0}(g,\omega,\, {}^a f_{M_0})$.

On fixe f_{M_0}, K et η.

On fixe $\mathbf{M}_H$ une donnée endoscopique elliptique de $\tilde{M}_0$ incluse dans $\mathbf{H}$. On note $f_{M_0}^{\mathbf{M}_H}$ un transfert de f_{M_0} à cette donnée. Pour toute donnée endoscopique elliptique $\mathbf{H}$ de $\tilde{G}$ contenant $\mathbf{M}_H$, on fixe K_H, η_H tel que l'on puisse faire la construction précédente dans $\mathbf{H}$ en partant de cette fonction ; on note alors ${}^a f_H^{K_H}$ le résultat, ici on a encore $a \in A_{\tilde{M}_0} = A_{M_H}$ par ellipticité. On a fixé toutes les données et on considère η_1 suffisamment petit pour que les toutes les fonctions associées aux élements $a \in A_{\tilde{M}_0}$ tel que $|\alpha(a)| < \eta'$ (pour α comme ci-dessus) soient définies. Avec les propriétés (2) et (3) ci-dessus appliquées à ${}^a f^K$ et ${}^a f_H^{K_H}$, on voit que la deuxième fonction est un transfert de la première pour les intégrales orbitales correspondant à des éléments de $\tilde{G}$ stablement conjugué d'un élément de $\tilde{M}$ se transferant en une classe de conjugaison stable de $\mathbf{M}_H$. En sommant sur tous les choix de $\mathbf{M}_H$ (à équivalence près) on construit ainsi les transferts non nuls des fonctions ${}^a f^K$. On a ainsi vérifié qu'il existe η suffisamment petit tel que pour toute donnée endoscopique elliptique $\mathbf{H}$ de $\tilde{G}$, un sous-groupe compact ouvert K_H tel que pour toutes les fonctions ${}^a f^K$ quand a varie en vérifiant pour toute racine positive α (cf. ci-dessus) $|\alpha(a)| < \eta$, admette un transfert à $\mathbf{H}$ invariant sous K_H.

On se rappelle que le côté droit de (2) n'a alors plus qu'un nombre fini de représentations qui ont une trace non nulle sur les fonctions ${}^a f_H^{K_H}$ (on a fixé le caractère infinitésimal et la fonction aux places autres que v). On s'est donc ramené à une situation finie où on peut faire tendre $a \in A_{\tilde{M}_0}$ vers 0 (ou l'infini suivant les goûts). Cela permet de comparer les modules de Jacquet associés à ces représentations évaluées en les fonctions que l'on vient de définir. A droite, on ne voit pas l'exposant λ_0 puisque cet exposant est au plus unitaire et comme il est à gauche, on a une contradiction qui prouve que $tr\, \tilde{\Pi}_{par}(f_v) = 0$.

Toute représentation elliptique $\tilde{\pi}$ de $\tilde{G}$ se transfère sur les elliptiques (cf. 4 les explications qui suivent l'énoncé) ce qui veut dire qu'il existe une combinaison linéaire finie, $\sum_{\mathbf{H},\tilde{\pi}_{\mathbf{H,st}}} c(\tilde{\pi}, \tilde{\pi}_{H,st})\tilde{\pi}_{H,st}$ de représentations elliptiques stables avec la bonne propriété de variance sous le groupe d'automorphismes, où $\pi_{H,st}$ parcourt une base des représentations elliptiques stable (cf. ci-dessus) telle que pour toute fonction cuspidale $\tilde{f}$ on ait l'égalité :

$$\tilde{\pi}(\tilde{f}) = \sum_{\mathbf{H},\tilde{\pi}_{\mathbf{H},\mathbf{st}}} c(\tilde{\pi}, \tilde{\pi}_{H,st})\tilde{\pi}_{H,st}(\tilde{f}^H).$$

On rappelle que les représentations que l'on considère ont un caractère sous l'action de $A_{\tilde{G}}$ que l'on a fixé. On prend pour base des représentations elliptiques stables quand $\mathbf{H}$ varie, l'image de la base de $I_{cusp}(\tilde{G})$ engendré par les pseudo coefficients des représentations elliptiques irréductibles de $\tilde{G}$ (c'est-à-dire associé à un triplet elliptique en [17] 7.2).

On a donc l'égalité :

$$\sum_{\tilde{\pi},\text{elliptique}} I_\nu(\dot{\tilde{f}}^v, \tilde{\pi})\left(\tilde{\pi}(\tilde{f}) - \sum_{\mathbf{H},\tilde{\pi}_{\mathbf{H},\mathbf{st}}} c(\tilde{\pi}, \tilde{\pi}_{H,st})\tilde{\pi}_{H,st}(\tilde{f}^H)\right) \tag{3}$$

$$=$$

$$\sum_{\mathbf{H},\tilde{\pi}_{\mathbf{H},\mathbf{st}}} \left(S_\nu(\dot{\tilde{f}}^{v,H}, \tilde{\pi}_{H,st}) - \sum_{\tilde{\pi},\text{elliptique}} I_\nu(\dot{\tilde{f}}^v, \tilde{\pi})c(\tilde{\pi}, \tilde{\pi}_{H,st})\right)\tilde{\pi}_{H,st}(\tilde{f}^H).$$

Si on suppose $\tilde{f}$ cuspidale le membre de gauche est nulle par définition, le membre de droite l'est donc aussi mais cela force la nullité des coefficients :

$$S_\nu(\dot{\tilde{f}}^{v,H}, \tilde{\pi}_{H,st}) - \sum_{\tilde{\pi},\text{elliptique}} I_\nu(\dot{\tilde{f}}^v, \tilde{\pi})c(\tilde{\pi}, \tilde{\pi}_{H,st}),$$

puisque tout pseudo coefficient des $\tilde{\pi}_{H,st}$ peut être obtenu par transfert à partir d'une fonction cuspidale sur $\tilde{G}$ (c'est la construction de la base décrite ci-dessus). Ainsi (3) est nulle pour tout $\tilde{f}$. On veut montrer que cela force l'égalité pour tout $\tilde{\pi}$ représentation elliptique de $\tilde{G}$ et pour tout $\tilde{f}$

$$\tilde{\pi}(f) - \sum_{\mathbf{H},\tilde{\pi}_{\mathbf{H},\mathbf{st}}} c(\tilde{\pi}, \tilde{\pi}_{H,st})\tilde{\pi}_{H,st}(\tilde{f}^H). \tag{4}$$

Pour cela, on fixe $\tilde{f}$ et on pose

$$\phi_{\tilde{f}} := \sum_{\tilde{\pi},\text{elliptique}} \phi_{\tilde{\pi}}\left(\tilde{\pi}(f) - \sum_{\mathbf{H},\tilde{\pi}_{\mathbf{H},\mathbf{st}}} c(\tilde{\pi}, \tilde{\pi}_{H,st})\tilde{\pi}_{H,st}(\tilde{f}^H)\right),$$

où $\phi_{\tilde{\pi}}$ est un pseudo coefficient cuspidal de $\tilde{\pi}$; la somme est nécessairement finie. Comme $\phi_{\tilde{f}}$ est cuspidale,

$$I_\nu(\dot{\tilde{f}}^v \phi_{\tilde{f}}) = \sum_{\tilde{\pi},\text{elliptique}} I_\nu(\dot{\tilde{f}}^v, \tilde{\pi})\tilde{\pi}(\phi_{\tilde{f}}).$$

Et ceci est nulle puisque cela vaut (3) par construction. Puisque ceci est vrai pour tout ν, on a $I(\dot{\tilde{f}}^v \phi_{\tilde{f}}) = 0$ pour tout $\dot{\tilde{f}}^v$. Cela entraîne donc que le côté géométrique est nulle (c'est le même) d'où pour tout $\dot{\tilde{f}}^v$, $I_{geo}(\dot{\tilde{f}}^v \phi_{\tilde{f}}) = 0$.

On utilise alors 4.2 pour conclure que $\phi_{\tilde{f}}$ a toutes ses ω-intégrales orbitales nulle. Cette fonction est donc de trace nulle dans toute représentation et en particulier sur les représentations elliptiques. Mais comme elle est une combinaison linéaire de pseudo coefficient cela veut dire que les coefficients de la combinaison linéaire sont tous nuls ce que nous voulions puisque cette nullité réalise toute représentation elliptique de $\tilde{G}$ comme un transfert de représentations elliptiques stables des groupes endoscopiques elliptiques de $\tilde{G}$.

4.4 Prolongement des formules de transfert entre représentations elliptiques et fin de la preuve

On récrit ici un peu différemment, ce que l'on vient de démontrer, pour pouvoir le citer aisément.

Pour tout sous-groupe endoscopique elliptique $\mathbf{H}$ de $\tilde{G}$, fixons une représentation virtuelle elliptique stable $\pi_{H,st}$. Soit $\tilde{\pi}$ une représentation virtuelle elliptique de $\tilde{G}$. On suppose que pour toute fonction cuspidale f sur $\tilde{G}$ on a l'égalité de transfert :

$$tr\, \tilde{\pi}(f) = \sum_{\mathbf{H}} tr\, \pi_{H,st}(f^{\mathbf{H}}). \tag{1}$$

Corollaire *Alors (1) est vrai pour toute fonction f.*

On peut d'abord décomposer (1) (sur les elliptiques) en fonction des caractères unitaires de $A_{\tilde{G}}$ et se ramener à démontrer l'égalité en supposant en plus que $\tilde{\pi}$ à un caractère unitaire sous $A_{\tilde{G}}$. C'est alors exactement ce que l'on a démontré.

On peut maintenant terminer la preuve du théorème. On fixe $\mathbf{H}$ un sous-groupe endoscopique elliptique de $\tilde{G}$ et $\pi_{H,st}$ une représentation elliptique stable de $\mathbf{H}$. Le groupe d'automorphismes de la donnée endoscopique agit canoniquement sur l'ensemble des représentations elliptiques stables ; plutôt que sur l'ensemble des représentations c'est sur l'ensemble des fonctions cuspidales que ce groupe opère (cf. [18] 2.6) et on passe de l'un des ensembles à l'autre via les pseudo-coefficients. La composante neutre de ce groupe agit trivialement ([18] 2.6) et on note $\pi_{H,st}^{Aut(\mathbf{H})}$ la projection de $\pi_{H,st}$ sur l'espace des invariants sous ce groupe d'automorphisme. Pour toute fonction f cuspidale sur $\tilde{G}$, le transfert f^H est une fonction cuspidale sur $\mathbf{H}$ invariante sous ce groupe d'automorphismes. Ainsi on a $tr\, \pi_{H,st}(f^H) = tr\, \pi_{H,st}^{Aut(\mathbf{H})}(f^H)$. On transfère cette représentation sur les elliptiques c'est-à-dire que l'on note $\tilde{\pi}$ la représentation elliptique de $\tilde{G}$, uniquement déterminée par le fait que pour toute fonction cuspidale f sur $\tilde{G}$, on ait, $tr\, \tilde{\pi}(f) = tr\, \pi_{H,st}(f^H)$: pour voir que cela existe, on suppose qu'un caractère est fixé pour l'action de $A_{\tilde{G}}$ et on note $f_{\tilde{\pi}}$ l'unique fonction cuspidale sur $\tilde{G}$ dont tous les transferts relatifs aux données endocopiques elliptiques non isomorphe à $\mathbf{H}$ sont nuls et dont le transfert à $\mathbf{H}$ est une fonction nulle sur l'orthogonal de $\pi_{H,st}^{Aut(\mathbf{H})}$ et qui vaut 1 sur cette représentation. Alors $\tilde{\pi}$ n'est autre que la représentation elliptique dans l'orthogonal du noyau de la forme linéaire $\tilde{\sigma} \mapsto tr\, \tilde{\sigma}(f_{\tilde{\pi}})$ et qui a pour trace 1 sur $f_{\tilde{\pi}}$.

Cette représentation vérifie (1) et avec le corollaire elle est donc un transfert de $\pi_{H,st}$. Cela prouve la fin du théorème.

5 Conséquences

Ici le corps est de nouveau un corps local archimédien ou non archimédien pour unifier le contexte.

5.1 Prolongement des formules de transfert

Soit $\mathbf{H}$ un sous-groupe endoscopique elliptique de $\tilde{G}$ et soit $\tilde{\pi}_{H,st}$ une représentation stable de H

Corollaire *Il existe une représentation $\tilde{\pi}$ de $\tilde{G}$ telle que pour toute fonction f sur $\tilde{G}$, on ait l'égalité de transfert*

$$tr\, \tilde{\pi}(f) = tr\, \pi_{H,st}(f^{\mathbf{H}}).$$

En 3.1, on a décomposé $\pi_{H,st}$ en somme de représentations induites à partir de représentations elliptiques (modulo le centre) stables. Comme l'induction est compatible au transfert, il suffit d'appliquer le corollaire de 4.4 dans le cas non archimédien et son analogue [19] 3.2 dans le cas archimédien.

5.2 Un critère spectral de nullité pour le transfert d'une fonction

Le corollaire ci-dessous a sans doute une démonstration plus élémentaire.

Corollaire *(i) On suppose que G est quasi-déployé et que $\tilde{G}$ provient d'une torsion intérieure de G. Soit f une fonction sur $\tilde{G}$. On suppose que $tr\,\tilde{\pi}(f) = 0$ pour toute représentation tempérée stable de $\tilde{G}$, alors les intégrales orbitales stables de f en tous les points semi-simples réguliers de $\tilde{G}$ sont nulles.*

(ii) On ne fait pas d'hypothèses sur $\tilde{G}$. Soit $\mathbf{H}$ une donnée endoscopique elliptique de $\tilde{G}$ et soit f une fonction sur $\tilde{G}$. On suppose que $tr\,\tilde{\pi}(f) = 0$ pour toute représentation tempérée de $\tilde{G}$ qui est un transfert d'une représentation stable de $\mathbf{H}$. Alors la fonction identiquement nulle est un transfert de f à $\mathbf{H}$.

On rappelle qu'en utilisant la formule des traces locale non invariante, Waldspurger a montré en [17] 5.5, que si f annule toutes les représentations tempérées alors les intégrales orbitales de f en tous les points semi-simples réguliers sont nulles. C'est donc ici une version stable et endoscopique de ce résultat.

Montrons (i) par récurrence sur le rang de $\tilde{G}$; on fixe f ayant la propriété de l'énoncé. Soit $\tilde{\gamma}$ un élément semi-simple régulier de $\tilde{G}$. On suppose d'abord que $\tilde{\gamma}$ n'est pas elliptique et on note $\tilde{L}$ un espace de Levi tel que $\tilde{\gamma}$ soit elliptique dans $\tilde{L}$. L'intégrale stable de f en $\tilde{\gamma}$ se calcule en fonction de l'intégrale stable de $f_{\tilde{L}}$ en $\tilde{\gamma}$: vérifions cela. Le centralisateur de $\tilde{\gamma}$ dans G et dans L sont les mêmes. Ainsi toute classe de conjugaison sous G dans la classe de conjugaison stable sous G dans la classe de conjugaison stable de $\tilde{\gamma}$ coupe $\tilde{L}$ et coupe $\tilde{L}$ en une classe de conjugaison sous $Stab_{\tilde{G}}(\tilde{L})$. De plus $f_{\tilde{L}}$ annule aussi toutes les représentations tempérées stables de $\tilde{L}$ car l'induction est compatible à la stabilité. Par l'hypothèse de récurrence on obtient donc que l'intégrale orbitale stable de f en $\tilde{\gamma}$ est nulle. Pour démontrer la même propriété quand $\tilde{\gamma}$ est elliptique on globalise la situation comme en 4.3. On remarque que l'hypothèse faite sur f et 3.1 assure que $tr\,\tilde{\pi}(f) = 0$ pour toute représentation $\tilde{\pi}$ stable (pas seulement les tempérées). On vérifie alors que le côté spectral de la formule des traces simples appliqué à ff^v est nulle pour toute fonction f^v cuspidale en au moins deux places différentes de v et à support dans les éléments réguliers. Le côté géométrique est une somme d'intégrale orbitales stables. Comme dans 4.2, on en déduit que les intégrales orbitales stables en tout point elliptique de $\tilde{G}$ de f sont nulles. Cela termine la preuve de (i).

(ii) résulte essentiellement de (i). Soit $\pi_{\mathbf{H},st}$ une représentation tempérée stable de $\mathbf{H}$. On note $\tilde{\pi}$ le transfert de $\pi_{\mathbf{H}}$ qui existe d'après le corollaire précédent. On a $tr\,\tilde{\pi}(f) = 0 = tr\,\pi_{\mathbf{H}}(f^{\mathbf{H}})$. Ainsi $f^{\mathbf{H}}$ satisfait aux conditions de (i) et la conclusion de (i) est alors la conclusion cherchée de (ii).

6 Transfert et ramification

Lemme *Soit K un sous-groupe compact ouvert de G ; pour toute donnée endoscopique elliptique $\mathbf{G}'$ de $\tilde{G}$, il existe un sous-groupe ouvert compact K' de G' tel que pour tout élément f de $I_{cusp}(\tilde{G})$ qui annule toute représentation elliptique n'ayant pas de vecteur invariant sous K, il existe un transfert $f^{\mathbf{G}'}$ de f dans $SI_{cusp}(G')$ annulant toute représentation n'ayant pas de vecteur invariant sous K'.*

On note $I_{cusp}(\tilde{G}, K)$ l'ensemble des fonctions cuspidales sur $\tilde{G}$ annulant les représentations elliptiques n'ayant pas de vecteurs K-invariants. Par le théorème de Paley-Wiener, cet espace s'identifie à un produit de fonctions de Paley-Wiener sur $iA^*_{\tilde{G},F}$, produit indexé par un système de représentants des classes d'homothétie de représentations elliptiques de $\tilde{G}$, modulo l'action de $iA^*_{\tilde{G},F}$, ayant des vecteurs invariants sous K. En tenant compte de la proposition précédente cet ensemble de représentant est fini. Soit $\mathbf{G}'$ une donnée endoscopique elliptique de $\tilde{G}$. On considère le sous-espace vectoriel $Ell_{st}(G', K)$ de $Ell_{st}(G')$ engendré par les images des représentations elliptiques de $\tilde{G}$ ayant des vecteurs invariants sous K, c'est-à-dire l'espace vectoriel engendré par les représentations combinaison linéaires de représentations elliptiques de G', stables, dont le transfert vers $\tilde{G}$ modulo le transfert d'une représentation convenable des autres données endoscopiques elliptiques est l'une des représentation elliptiques de $\tilde{G}$ ayant des vecteurs K-invariants. Puisque $\mathbf{G}'$ est une donnée endoscopique elliptique de $\tilde{G}$, $\mathfrak{a}^*_{G'} = \mathfrak{a}^*_{\tilde{G}}$; cette égalité est compatible au transfert au sens de [20] 2.1 (ii) (cf. la remarque de cette référence) et elle donne une correspondance entre les caractères de $A_{G',F}$ et ceux de $A_{\tilde{G},F}$ compatible au transfert : en effet, la correspondance entre éléments semi-simples de $\tilde{G}$ et de G' de [18] 1.3 et 1.8 donne une application naturelle de $A_{\tilde{G},F}$ dans G'. Donc un caractère non ramifié de $A_{G',F}$ donne un caractère de G' qui se restreint en un caractère de $A_{\tilde{G},F}$ et c'est la correspondance précédente (cf. [20] 2.1).

L'espace $Ell_{st}(G', K)$ est donc stable par tensorisation sous $iA^*_{G',F}$; on note $SI_{cusp,st}(G', K)$ l'ensemble des fonctions de Paley-Wiener sur $Ell_{st}(G', K)$; on voit cet espace comme un sous-espace de $SI_{cusp}(G')$ en prolongeant par 0 sur l'orthogonal de $Ell_{st}(G', K)$ dans $Ell_{st}(G')$ pour le produit scalaire elliptique. Comme le transfert est compatible au produit scalaire elliptique d'après la proposition 4.17 de [18], par transfert la projection de $I_{cusp}(\tilde{G}, K)$ sur $SI_{cusp}(G')$ est incluse dans $SI_{cusp,st}(G', K)$. Par finitude, il existe un sous-groupe compact ouvert K' de G' tel que $SI_{cusp,st}(G', K)$ annule les représentations elliptiques de G' n'ayant pas de vecteurs invariants sous K'. Cela prouve le lemme.

Théorème *(i) Soit K un sous-groupe compact ouvert de G ; pour toute donnée endoscopique elliptique $\mathbf{G}'$ de $\tilde{G}$, il existe un sous-groupe ouvert compact K' de G' tel que pour tout élément f de $I(\tilde{G})$ qui annule toute représentation tempérée n'ayant pas de vecteur invariant sous K, il existe un transfer $f^{\mathbf{G}'}$ de f dans $SI(G')$ annulant toute représentation tempérée n'ayant pas de vecteur invariant sous K'.*

(ii) Soit $\mathbf{G}'$ une donnée endoscopique elliptique de $\tilde{G}$ et soit K' un sous-groupe compact ouvert de G' ; alors il existe un sous-groupe compact ouvert K de G tel que pour toute représentation tempérée stable de $\mathbf{G}'$ dont toutes les composantes irréductibles ont des vecteurs K'-invariant, le transfert est une représentation de $\tilde{G}$ dont toutes les composantes irréductibles ont des vecteurs K-invariants.

On fixe un espace de Levi $\tilde{M}$ et on démontre le théorème pour les éléments de $I(\tilde{G})$ dont les composantes de Paley-Wiener sont nulles sauf celles correspondant à la classe de conjugaison de $\tilde{M}$ et aux représentations elliptiques de $\tilde{M}$. Par passage aux termes constants cet espace de fonctions s'identifie à $I_{cusp}(\tilde{M})^{Norm_{\tilde{G}}(M)}$. Soit f une telle fonction que l'on suppose en plus bi-invariante sous K et $f_{\tilde{M}}$ son terme constant. On fixe $\mathbf{G}'$ une donnée endoscopique elliptique de $\tilde{G}$; si cette donnée ne contient pas de sous-groupe de Levi qui se transfère en un conjugué de M, le transfert des fonctions considérées à $\mathbf{G}'$ est zéro et il n'y a rien à démontrer pour $\mathbf{G}'$. Sinon, on fixe M' un tel sous-groupe de Levi. Grâce au lemme précédent, on fixe $K'_{M'}$ un sous-groupe ouvert de M' tel que $f_{\tilde{M}}$ ait un transfert à M' invariant sous $K'_{M'}$, on fixe un tel transfert, $f'(M')$; quitte à restreindre $K'_{M'}$, on suppose que $f'(M')$ est invariant sous le normalisateur dans G' de M'. On fait cela pour toutes les données endoscopiques elliptiques $\mathbf{M}'$ de $\mathbf{M}$ incluses dans $\mathbf{G}'$. Ainsi un transfert de f à $\mathbf{G}'$ annule nécessairement toute représentations tempérées de $\mathbf{G}'$ qui n'est pas sous-quotient d'une représentation induite à partir de l'une de ces données $\mathbf{M}'$ et d'une représentation elliptique de cette donnée ayant des vecteurs invariants sous $K_{M'}$. Il existe alors K' un sous-groupe compact ouvert de G' tel que tout transfert de f à $\mathbf{G}'$ annule nécessairement toute représentation tempérée de $\mathbf{G}'$ n'ayant pas de vecteurs invariants sous K'. Ce K' convient. Cela prouve le (i) du théorème.

Pour la preuve de (ii), on fixe $\mathbf{G}'$ et K' comme dans l'énoncé. Pour tout espace de Levi $\mathbf{M}'$ de $\mathbf{G}'$, il existe un sous-groupe compact ouvert $K'_{M'}$ de $\mathbf{M}'$ tel que pour toute représentation elliptique irréductible σ' de M' l'induite de

σ' a des vecteurs K' invariant uniquement si σ' a des vecteurs $K'_{M'}$ invariant. Ensuite on procède comme dans la preuve ci-dessus.

Corollaire *(i) Soit K un sous-groupe compact ouvert de G et soit $\mathbf{G}'$ une donnée endoscopique elliptique de $\tilde{G}$. Alors il existe un sous-groupe compact ouvert K' de $\mathbf{G}'$ tel que pour toute fonction f sur $\tilde{G}$ qui est K-biinvariante, il existe une fonction f' sur $\mathbf{G}'$ qui est K'-biinvariante et qui soit un transfert de f.*

(ii) Pour toute donnée endoscopique elliptique $\mathbf{G}'$ de $\tilde{G}$ on fixe un sous-groupe compact ouvert $K_{G'}$ de G'. Alors il existe un sous-groupe compact ouvert K de G tel pour tout ensemble de fonctions $f_{G'}$ indexées par les données $\mathbf{G}'$ chacune des fonctions étant invariante sour $K_{G'}$ s'il existe une fonction f sur $\tilde{G}$ dont chacune des $f_{G'}$ est un transfert pour $\mathbf{G}'$, alors f est bi-invariante sour K.

Cela résulte du théroème précédent via le théorème de Paley-Wiener : en effet dans (i) comme dans (ii), le théroème précédent dit que la fonction que l'on cherche ne vit que sur un ensemble fini de composante de Paley-Wiener.

7 Appendices

Ces appendices ont été écrits par Jean-Loup Waldspurger.

7.1 Préliminaires sur les classes de conjugaisons stables modulo le centre

7.1.1 Lemme 1

Soient F_0 un corps p-adique, $\hat{T}, \hat{U}$ des tores complexes munis d'une action continue de Γ_{F_0} et un homomorphisme Γ_{F_0}-équivariant, $\hat{\phi} : \hat{U} \to \hat{T}$. On définit le groupe $H^{1,0}(W_{F_0}; \hat{U} \xrightarrow{\hat{\phi}} \hat{T})$, ce groupe est défini par Kottwitz-Shelstad en [11] A3 et par Labesse en [12] : on note $Z^{1,0}(W_{F_0}; \hat{U} \xrightarrow{\hat{\phi}} \hat{T})$ l'ensemble des couples $(w \mapsto u(w); t)$ formés d'un cocycle de W_{F_0} dans $\hat{U}$ et d'un élément de $\hat{T}$ satisfaisant à $\forall w \in W_{F_0}, \hat{\phi}(u(w)) = w(\hat{t})\hat{t}^{-1}$ et $H^{1,0}(W_{F_0}; \hat{U} \xrightarrow{\hat{\phi}} \hat{T})$ est l'ensemble des classes d'équivalence dans $Z^{1,0}(W_{F_0}; \hat{U} \xrightarrow{\hat{\phi}} \hat{T})$ pour la relation d'équivalence la plus naturelle (cf. [18] 1.12) :

$$\forall x \in \hat{U}; (u(w), t) \simeq (u(w)w(x)x^{-1}, t\hat{\phi(x)}).$$

Soit E_0 une extension galoisienne finie de F_0 tel que Γ_{E_0} agisse trivialement sur $\hat{U}$ et $\hat{T}$. Un élément de $Z^{1,0}(W_{F_0};\hat{U} \xrightarrow{\hat{\phi}} \hat{T})$ se restreint à W_{E_0} en donnant un homomorphisme de W_{E_0} dans $Ker\,\hat{\phi}$; cette restriction ne dépend que de la classe d'équivalence de l'élément fixé et est donc attaché à un élément de $H^{1,0}(W_{F_0};\hat{U} \xrightarrow{\hat{\phi}} \hat{T})$.

On fixe $\delta_0 \in H^{1,0}(W_{F_0};\hat{U} \xrightarrow{\hat{\phi}} \hat{T})$ et une extension galoisienne E_0 de F_0. On dit que E_0 est adaptée à F_0 si Γ_{E_0} agit trivialement sur $\hat{U}$ et $\hat{T}$ et si δ_0 restreint à Γ_{E_0} est un homomorphisme non ramifié de W_{E_0} dans $(Ker\,\hat{\phi})^{\Gamma_{F_0},0}$.

Lemme *Quand δ_0 est fixé, il existe des extensions galoisiennes E_0 de F_0 adaptées à δ_0.*

Voir le paragraphe 9 de [13].

7.1.2 Lemme 2

On garde les notations du paragraphe précédent et on fixe δ_0 et une extension galoisienne E_0 de F_0 adaptée à δ_0. On fixe aussi un corps de nombres F et une extension galoisienne finie E de F. On suppose qu'il existe une place v_0 de F tel que $F_{v_0} = F_0$ et qu'il n'existe qu'une seule place de E au-dessus de F et que l'on ait $E_{v_0} = E_0$. On a alors un isomorphisme $Gal(E/F) \simeq Gal(E_0/F_0)$. Ainsi $\hat{T}, \hat{U}$ sont munis d'action de $Gal(F)$ triviales sur $Gal(E_0)$. On définit le groupe $H^{1,0}(W_F;\hat{U} \xrightarrow{\hat{\phi}} \hat{T})$ de façon analogue à la situation locale et on a un homomorphisme de localisation :

$$H^{1,0}(W_F;\hat{U} \xrightarrow{\hat{\phi}} \hat{T}) \to H^{1,0}(W_{F_0};\hat{U} \xrightarrow{\hat{\phi}} \hat{T}).$$

Lemme *L'image de l'homomorphisme de localisation ci-dessus contient δ_0.*

Voir le paragraphe 9 de [13].

7.2 Action centrale et classe de conjugaison stable

Soit F un corps local ; si $F = \mathbb{R}$, il faudrait passer aux K-espaces, on ne le fait pas ici. On considère l'espace tordu $\tilde{G}$ de groupe sous-jacent G, définis sur F et ayant des points sur F et le caractère ω de $G(F)$. On fixe aussi un caractère unitaire μ de $A_{\tilde{G}}(F)$. On pose $G_\flat := G/A_{\tilde{G}}$.

Soit γ un élément de $\tilde{G}(F)$; on suppose que l'image de γ dans $G_\flat(F)$ est un élément fortement régulier. On note $\tilde{T}$ le tore tordu de $\tilde{G}$ contenant γ. On définit alors

$$X_\gamma := \{\gamma' \in \tilde{G}; \exists g \in G(\overline{F}), \exists a \in A_{\tilde{G}}(\overline{F}) \mid \gamma' = ag^{-1}\gamma g\}.$$

Le groupe $A_{\tilde{G}}(F)$ agit sur X_γ par translation et le groupe $G(F)$ y agit par conjugaison.

On s'intéresse aux fonctions sur X_γ ω-invariantes sous l'action de $G(F)$ et se transformant par le caractère μ sous l'action de $A_{\tilde{G}}(F)$, c'est-à-dire les fonctions ϕ vérifiant :

$$\phi(ag^{-1}\gamma' g) = \omega(g)\mu(a)\phi(\gamma'),$$

pour tout a, g, γ'. On remarque qu'une telle fonction est invariante sous l'action de l'image $\pi(G_{sc}(F))$ dans $G(F)$.

Pour décrire les orbites de $A_{\tilde{G}}(F) \times G(F)$ dans X_γ on commence par décrire les orbites sous l'action de $\pi(G_{sc})(F)$ (π est ici l'application naturelle de G_{sc} dans G) puis on décrira l'action de $A_{\tilde{G}}(F) \times G_{ab}(F)$ où $G_{ab}(F) = (G/\pi(G_{sc}))(F) = G(F)/\pi(G_{sc})(F)$. On rappelle que, T étant un tore fixé de G et T_{sc} étant un tore de G_{sc} d'image T, $G_{ab}(F)$ s'identifie naturellement à $H^{1,0}(\Gamma_F, T_{sc} \xrightarrow{\pi} T)$: en effet soit $g \in G_{ab}(F)$. Alors il existe $z \in Z_G(\overline{F})$ et $g' \in G_{sc}(\overline{F})$ tel que g soit l'image dans $G_{ab}(F)$ de l'élément $z\pi(g') \in G(F)$. Ainsi le cocycle $w \in W_F \mapsto w(g')(g')^{-1}$ est à valeur dans $Z(G_{sc})$ et son image sous π est le cobord défini par z. On définit donc ainsi un élément de $Z^{1,0}(\Gamma_F, Z_{G_{sc}} \xrightarrow{\pi} Z_G)$. Cet élément dépend du choix de z mais sa classe dans $H^{1,0}(\Gamma_F, Z_{G_{sc}} \xrightarrow{\pi} Z_G)$ n'en dépend pas. De plus changer g par $g' \in g\pi(G_{sc})$ permet de garder le même choix de z et il est facile de voir que $G_{ab}(F)$ s'identifie bien à

$$H^{1,0}(\Gamma_F, Z_{G_{sc}} \xrightarrow{\pi} Z_G) \simeq H^{1,0}(\Gamma_F, T_{sc} \xrightarrow{\pi} T).$$

On introduit aussi le sous-tore U de T engendré par $A_{\tilde{G}}$ et $(1-\theta)T$ (où θ est l'action adjointe sur T de n'importe quel élément de $\tilde{T}$) et le groupe

$$H^{1,0}(\Gamma_F, T_{sc} \overset{(1-\theta)\circ\pi}{\to} U).$$

On a des applications naturelles de

$$H^0(\Gamma_F, A_{\tilde{G}}) = A_{\tilde{G}}(F) \to H^{1,0}(\Gamma_F, T_{sc} \overset{(1-\theta)\circ\pi}{\to} U) \quad a \mapsto (1, a) \tag{1}$$

et

$$G_{ab}(F) = H^{1,0}(\Gamma_F, T_{sc} \xrightarrow{\pi} T) \to H^{1,0}(\Gamma_F, T_{sc} \overset{(1-\theta)\circ\pi}{\to} U)$$

$$(t_{sc}(w), t) \mapsto (t_{sc}(w), t\theta(t)^{-1}). \tag{2}$$

D'où une action de $A_{\tilde{G}}(F) \times G(F)$ dans $H^{1,0}(\Gamma_F, T_{sc} \overset{(1-\theta)\circ\pi}{\rightarrow} U)$, $G(F)$ agissant via son quotient $G_{ab}(F)$.

Lemme *Il existe une application surjective*

$$\gamma' \in X_\gamma \mapsto \underline{\gamma'} \in H^{1,0}(\Gamma_F, T_{sc} \overset{(1-\theta)\circ\pi}{\rightarrow} U)$$

équivariante pour les actions de $A_{\tilde{G}}(F) \times G(F)$ définis sur chacun des termes. Les fibres de cette application sont précisément les orbites de l'action de $G_{sc}(F)$ agissant via π et la conjugaison sur X_γ.

Soit $\gamma' \in X_\gamma$. On fixe $a \in A_{\tilde{G}}(\overline{F}), g \in G(\overline{F})$ tel que $\gamma' = ag^{-1}\gamma g$. Soit $\sigma \in \Gamma_F$ et on écrit que $\sigma(\gamma') = \gamma'$:

$$(g\sigma(g)^{-1})^{-1}\gamma(g\sigma(g)^{-1}) = \sigma(a)a^{-1}\gamma.$$

Comme l'image de γ dans $G_\flat(F)$ est fortement régulière par hypothèse, cela veut dire que $g\sigma(g)^{-1} \in T(\overline{F})$. Comme $\gamma \in \tilde{T}$ l'égalité précédente devient

$$(\theta - 1)(g\sigma(g)^{-1}) = \sigma(a)a^{-1}.$$

Ecrivons $g = z\pi(g_{sc})$ avec $g_{sc} \in T_{sc}(\overline{F})$ et $z \in Z_G(\overline{F})$. Considérons l'application de Γ_F dans $T_{sc}(\overline{F})$, $\sigma \mapsto \alpha(\sigma) := g_{sc}\sigma(g_{sc})^{-1}$. On calcule :

$$(1-\theta)\pi(\alpha(\sigma)) = a(\theta - 1)(z)\sigma(a)^{-1}\sigma(\theta-1)(z)^{-1}.$$

Posons $x := a(\theta - 1)(z) \in U(\overline{F})$ et l'élément $(\sigma \mapsto \alpha(\sigma), x)$ est un élément de $Z^{1,0}(\Gamma_F, T_{sc} \overset{(1-\theta)\circ\pi}{\rightarrow} U)$.

Montrons que l'image de cet élément dans $H^{1,0}(\Gamma_F, T_{sc} \overset{(1-\theta)\circ\pi}{\rightarrow} U)$ ne dépend pas des choix : il est clair que le choix de la décomposition $g = z\pi(g_{sc})$ n'intervient pas, il faut donc uniquement considérer le premier choix celui de a et g. Soit donc a', g' tel que

$$\gamma' = a'(g')^{-1}\gamma g' = ag^{-1}\gamma g.$$

Donc $g' \in gT(\overline{F})$; on peut donc trouver $t_{sc} \in T_{sc}(\overline{F})$ tel que dans les choix ci-dessus $g'_{sc} = t_{sc}g_{sc}$; cela change α en le cocylce $\sigma \mapsto \alpha(\sigma)g_{sc}\sigma(t_{sc})^{-1}$ et x en $x(1-\theta)\pi(t_{sc})$. Ceci est l'invariance cherchée.

On vérifie aisément que remplacer γ' par $a'\gamma'$ avec $a' \in A_{\tilde{G}}(F)$ ci-dessus revient à remplacer $(\alpha(\sigma), x)$ par $(\alpha(\sigma), xa')$. Remplaçons maintenant γ' par

$\pi(g'_{sc})^{-1}\gamma'\pi(g'_{sc})$ avec $g'_{sc}\in G_{sc}(F)$. Alors x ne change pas ci-dessus et $\alpha(\sigma)$ est remplacé par $\alpha(\sigma)g'_{sc}\sigma(g'_{sc})^{-1}=\alpha(\sigma)$ car g'_{sc} est un point à valeurs dans F.

Montrons la surjectivité : soit $(\alpha(\sigma),x)$ un élément de $H^{1,0}(\Gamma_F,T_{sc}\stackrel{(1-\theta)\circ\pi}{\to}U)$. On écrit $x=x'(1-\theta)\pi(t_{sc})$ avec $t_{sc}\in T_{sc}(\overline{F})$ et $x'\in A_{\tilde{G}}(\overline{F})(1-\theta)(Z_G)(\overline{F})$. Suivant cette décomposition, on écrit $x'=a(1-\theta)(z)$. On se ramène à $t_{sc}=1$ en changeant $\alpha(\sigma)$ en un cocycle homologue. Ainsi $x=x'=a(1-\theta)z$. On considère l'image du cocycle défini par α comme un cocycle à valeurs dans G_{sc} ; il est nécessairement trivial car on a supposé que $F\neq\mathbb{R}$. Ainsi il existe g_{sc} tel que $\alpha(\sigma)=g_{sc}\sigma(g_{sc})^{-1}$. On pose alors $g=zg_{sc}$ et $\gamma':=ag^{-1}\gamma g$, c'est un élément dans $\tilde{G}(F)$ et donc de X_γ ; clairement il est dans la préimage de l'élément fixé dans $H^{1,0}(\Gamma_F,T_{sc}\stackrel{(1-\theta)\circ\pi}{\to}U)$. Sur cette construction, on vérifie que la fibre de cet élément est l'ensemble des éléments obtenu en remplaçant g_{sc} par n'importe quel élément dans $g_{sc}G_{sc}(F)$.

Le reste du lemme est sans difficulté en suivant les constructions.

Remarque *Il y a des fonctions sur X_γ, $\omega\times\mu$-équivariantes sous l'action de $G(F)\times A_{\tilde{G}}(F)$ si et seulement si il existe un caractère du groupe $H^{1,0}(\Gamma_F,T_{sc}\stackrel{(1-\theta)\circ\pi}{\to}U)$ dont la restriction à $G_{ab}(F)\times A_{\tilde{G}}(F)$ (cf. (1) et (2) ci-dessus) est le caractère $\omega\times\mu^{-1}$.*

L'espace vectoriel (nécessairement de dimension finie) des fonctions sur X_γ avec les bonnes propriétés d'équivariance et en bijection naturelle avec l'espace vectoriel engendré par les caractères de $H^{1,0}(\Gamma_F,T_{sc}\stackrel{(1-\theta)\circ\pi}{\to}U)$ dont la restriction à $G_{ab}(F)\times A_{\tilde{G}}(F)$ est le caractère $\omega\times\mu^{-1}$. La remarque s'en déduit.

Remarque *On peut remplacer le corps local par un corps de nombres du moment que $H^1(\Gamma_F,G_{sc})=1$. Ceci se produit si toutes les places archimédiennes de F sont complexes. Fixons $\gamma\in\tilde{G}(F)$ d'image fortement régulière dans $\tilde{G}_\flat(F)$ et notons X_γ le sous-ensemble de $\tilde{G}(F)$ contenant les éléments de $\tilde{G}(F)$ stablement conjugué d'un élément de $A_{\tilde{G}}(F)\gamma$. Alors les orbites de $G_{sc}(F)$ dans X_γ et les orbites de $A_{\tilde{G}}(F)\times G(F)$ dans X_γ se décrivent comme ci-dessus.*

8 Approximation

8.1 Enoncé

On fixe $F_0, G_0, \tilde{G}_0, \omega_0$ et un caractère unitaire μ_0 de $A_{\tilde{G}}(F_0)$. On note $C^\infty_{\mu_0,c}(\tilde{G}_0(F_0))$ les fonctions C^∞ sur $\tilde{G}_0(F_0)$ à support compact modulo le tore central $A_{\tilde{G}_0}(F_0)$ et se transformant sous $A_{\tilde{G}_0(F_0)}$ par le caractère μ_0. On considère dans cet espace le sous-espace vectoriel des fonctions dont toutes les ω-intégrales orbitales en des éléments semi-simples réguliers non elliptiques sont nulles. Et $I_{\mu_0}(\tilde{G}, \omega)$, $I_{cusp,\mu_0}(\tilde{G}, \omega)$ sont, par définition, les quotients des espaces vectoriels que l'on vient de définir par le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions dont toutes les ω-intégrales orbitales sont nulles.

Soit $f_0 \in I_{cusp,\mu_0}(\tilde{G}, \omega)$. On suppose que pour tout corps de nombres F muni d'une place v_0, tout ensemble de données globales $G, \tilde{G}, \omega, \mu$ qui se localisent en la place v_0 en $F_0, G_0, \tilde{G}_0, \omega_0, \mu_0$ et pour toute fonction test $f^{v_0} = \otimes'_{v \neq v_0} f_v \in I_\mu(\tilde{G}(\mathbb{A}_F^{v_0}), \omega)$ cuspidale en au moins deux places et à support dans les éléments semi-simples réguliers en au moint une place, on a :

$$I^{\tilde{G}}_{geo}(\omega, f^{v_0} f_0) = 0 \tag{1}$$

Théorème *Sous ces hypothèses, f_0 est nul dans $I_{cusp,\mu_0}(\tilde{G}_0)$.*

Le côté gauche de (1) est une somme finie d'intégrale orbitale sur des éléments de $\tilde{G}(F)$ semi-simple régulier. La démonstration consiste à démontrer que pour un choix judicieux de globalisation et d'une fonction f^{v_0}, le côté gauche de (1) est un multiple avec un coefficient non nul de l'intégrale $I^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f^{v_0} f_0)$ et que $\prod_{v \neq v_0} I^{\tilde{G}}(\gamma_v, \omega_v, f_v) \neq 0$.

La preuve consiste d'abord à construire une situation globale où par localisation l'image de $\tilde{G}(F)$ est dense dans $\tilde{G}(F_0)$; il suffit de démontrer que $I^{\tilde{G}}(\gamma, \omega_{v_0}, f_0) = 0$ pour tout élément γ de $\tilde{G}(F)$ (fortement régulier).

On fixe un tel γ et on s'autorise encore des extensions galoisiennes de F et on peut encore jouer sur le choix de f^{v_0}. A partir de là, les démonstrations deviennent de plus en plus compliqué quand on passe du cas non tordu de [2], au cas tordu mais sans caractère de [10] et au cas traité ici.

On peut toujours réduire le support de f^{v_0} de façon à ce que du côté gauche de (1) il n'y ait que des éléments γ' dont les composantes locales hormis éventuellement en la place v_0, sont soient conjugués des composantes locales de γ soit sont des éléments de $\tilde{K}_v$.

Alors [10] (et on reviendra ici sur les hypothèses qu'il faut pour appliquer ce résultat) montre que pour de tels γ', la conjugaison locale vaut aussi en la place v_0. A partir de là les arguments différent.

Dans le cas non tordu, on peut s'arranger pour qu'il n'y ait qu'une classe de conjugaison, celle de γ du côté gauche et il est alors facile de conclure. Dans le cas tordu où $\omega = 1$ traité par [10], on garde (en général) plusieurs intégrales orbitales du côté gauche de (1) mais elles sont toutes égales ; chacune est affectée d'un coefficient positif et la nullité de la somme permet de conclure.

Dans le cas qui nous concerne, la difficulté supplémentaire vient du fait que les ω intégrales orbitales locales a priori dépendent du choix de l'élément qui sert de point de base. Donc même si γ et γ' sont des éléments rationnels dans $\tilde{G}(F)$ dont toutes les composantes locales sont soit conjuguées soit dans $\tilde{K}_v$, les ω intégrales orbitales n'ont pas de raison d'être les mêmes. Il faut donc le démontrer, au moins pour des bons choix.

8.2 Rappel des globalisations

Pour démontrer le théorème, il faut évidemment des globalisations avec des propriétés fines. On rappelle que d'après [10], on peut globaliser $F_0, G_0, \tilde{G}_0$ de sorte que $\tilde{G}(F)$ est dense dans $\tilde{G}_0(F_0)$ (par localisation en une place fixée v_0) et tel que $A_{\tilde{G}} = A_{\tilde{G}_0}$, c'est-à-dire que $A_{\tilde{G}}$ n'est pas plus déployé en la place v_0 que globalement. On note $\tilde{G}(F)_*$ l'ensemble des éléments de $\tilde{G}(F)$ dont l'image dans $(\tilde{G}/A_{\tilde{G}})(F)$ est fortement régulier. Cet ensemble est encore dense par localisation dans $\tilde{G}_0(F_0)$. Il faut donc prouver que $I^{\tilde{G}_0}(\omega, \gamma_0, f_0) = 0$ pour tout γ_0 composante locale d'un élément de $\tilde{G}(F)_*$. On fixe donc $\gamma \in \tilde{G}(F)_*$ et on note γ_0 sa composante locale en v_0. On note $\tilde{T}$ le tore tordu de $\tilde{G}$ tel que $\tilde{T}(F)$ contienne γ. Si $\tilde{T}$ n'est pas elliptique en la place v_0, la composante de γ en cette place n'est pas elliptique et $I(\omega_0, \gamma_0, f_0) = 0$ par cuspidalité de f_0. On suppose donc que $\tilde{T}$ est elliptique en v_0 et $\tilde{T}$ est alors elliptique puisque $A_{\tilde{G}} = A_{\tilde{G}_0}$.

En 7.2, on a définit X_{γ_0} comme sous-ensemble de $\tilde{G}(F_0)$. La fonction $\gamma' \in X_{\gamma_0} \mapsto I(\omega_0, \gamma', f_0)$ est une fonction sur X_{γ_0}, $\omega_0 \times \mu_0$-invariante pour l'action de $G(F_0) \times A_{\tilde{G}}(F_0)$. Il n'y a rien à démontrer si cette application est identiquement nulle ; on suppose qu'il n'en est pas ainsi et conformément à la remarque de 7.2 on fixe un caractère, δ'_0, de $H^{1,0}(\Gamma_{F_0}, T_{sc} \overset{(1-\theta)\circ\pi}{\to} U)$ qui se restreint en le caractère $\omega_0 \times \mu_0^{-1}$ de $G_{0,ab}(F_0) \times A_{\tilde{G}}(F_0)$. D'après [11] A3, le groupe des caractères de $H^{1,0}(\Gamma_{F_0}, T_{sc} \overset{(1-\theta)\circ\pi}{\to} U)$ est le quotient de $H^{1,0}(\Gamma_{F_0}, \hat{U} \overset{(1-\hat{\theta})}{\to} \hat{T}_{ad})$ par l'image de $\hat{T}_{ad}^{\Gamma_{F_0},0}$. On fixe $\delta_0 \in H^{1,0}(\Gamma_{F_0}, \hat{U} \overset{(1-\hat{\theta})}{\to} \hat{T}_{ad})$ qui s'envoie sur δ'_0.

8.3 Globalisation fine

Il faut encore montrer que quitte à remplacer F par une extension galoisienne sans modifier $\gamma, \tilde{T}$, le caractère δ_0 du paragraphe précédent est la localisation d'un analogue global. Il faut avoir les hypothèses de 7.1.2 ci-dessus.

On note $T_\flat := T/A_{\tilde{G}}$ et on note encore θ l'action de θ sur $T_\flat$. Comme le groupe $H^1(\Gamma_{F_0}, X^*(T_\flat^\theta))$ est fini, on fixe E_0 une extension galoisienne de F_0 tel que T soit déployé sur E_0. On a une application naturelle :

$$H^1(Gal(E_0/F_0), X^*(T_\flat^\theta)) \to H^1(\Gamma_{F_0}, X^*(T_\flat^\theta)) \tag{1}$$

qui, par finitude, est surjective si E_0 est suffisamment grande. On fixe E_0 tel que (1) soit surjective et tel que E_0 soit adapté à δ_0 (cf 7.1.2). Cela ne sert que pour pouvoir utiliser le lemme 4 de [10] qui est un lemme clé pour ce que nous faisons.

On va maintenant définir E quitte à étendre F : on commence par remplacer F par une extension galoisienne totalement déployée en v_0 et n'ayant que des places archimédiennes complexes. L'existence d'une telle extension est bien connue et rappelée en [13] 3.6. Ensuite on fixe une extension galoisienne E de F tel que T se déploie sur E et il existe une place v_0' de E au dessus de v_0 tel que $E_{v_0'}$ contienne E_0. On remplace alors F par le corps des points fixes du fixateur de v_0' dans $Gal(E/F)$ et on remplace alors v_0 par la restriction de v_0' à F. Cela nous ramène au cas où E n'a qu'une place au dessus de v_0 que l'on note v_0. On va encore démultiplier v_0 en au moins trois places : en tensorisant F et E par une extension de degré supérieure ou égale à trois, totalement décomposée en la place v_0, on fixe, v_0 et u_i pour $i = 1, 2$ telle qu'en ces trois places on retrouve la situation locale de départ. On remarque (ce qui est aussi une hypothèse pour pouvoir utiliser [10]) qu'avec ces constructions l'application de localisation de $Gal(E/F)$ dans $Gal(E_0/F_0)$ est un isomorphisme.

On applique le lemme de 7.1.2 : on fixe un élément

$$\delta \in H^{1,0}(W_F, \hat{U} \stackrel{(1-\hat{\theta})}{\to} \hat{T}_{ad})$$

qui se localise en δ_0 en la place v_0. On a maintenant construit ω et μ des globalisations de ω_0 et μ_0 : il suffit de restreindre δ à $G_{ab}(\mathbb{A}_F) \times A_{\tilde{G}}(\mathbb{A}_F)$ suivant les applications décrites en 7.2 (1) et (2). Et ω, μ sont des caractères automorphes par la théorie du corps de classe. On rappelle qu'en toute place v, δ_v vérifie la dernière remarque de 7.1.2, c'est-à-dire qu'il y a des fonctions non triviales sur X_{γ_v} et que ces fonctions séparent les orbites sous $A_{\tilde{G}}(F_v) \times G(F_v)$.

8.4 Début de la preuve du théorème

On fixe toutes les données comme dans le paragraphe précédent. On fixe aussi un ensemble de places V de F, contenant v_0, u_1, u_2, V_{ram}, tel que ω, μ soient non ramifiés hors de V et que $\gamma_v \in \tilde{K}_v$ pour tout $v \notin V$. On demande aussi que V soit suffisamment grand pour que le lemme 5 de [10] soit applicable.

On définit les fonctions f^{v_0} de 8.1 : pour $v \notin V$, on prend une fonction à support dans $A_{\tilde{G}}(F_v)\tilde{K}_v$ invariante sous K_v et se transformant par μ_v sous $A_{\tilde{G}}(F_v)$. Pour tout $v \in V$, on fixe $f_v \in I_{\mu_v}(\tilde{G}_v, \omega_v)$ (cf 8.1 pour les notations) telle que $I^{\tilde{G}_v}(\gamma_v, \omega_v, f_v) = 1$ et $I^{\tilde{G}_v}(\gamma'_v, \omega_v, f_v) = 0$ pour tout $\gamma'_v \in X_{\gamma_v}$ qui n'est pas dans la $A_{\tilde{G}}(F_v) \times G(F_v)$ orbite de γ_v. Cela existe parce que l'on a une compatibilité entre μ_v et ω_v (7.1.2). Puisque γ_{u_i} pour $i = 1, 2$ est elliptique et fortement régulier modulo $A_{\tilde{G}}(F_{u_i})$, en ces places on prend f_{u_i} cuspidale et à support dans les éléments fortement réguliers modulo $A_{\tilde{G}}(F_{u_i})$.

On pose $f^{v_0} := \otimes_{v \neq v_0} f_v$ et on applique l'hypothèse de l'énoncé de 8.1 : $I^{\tilde{G}}_{geo,\mu}(\omega, f_0 \otimes f^{v_0}) = 0$. C'est une somme finie d'intégrales orbitales en des points $\gamma' \in \tilde{G}(F)$ avec des coefficients positifs. On restreint encore le support de f_{u_1} de façon à ne laisser subsister que les γ' qui en la place u_1 sont dans $X_{\gamma_{u_1}}$. Ecrire que γ' est dans l'orbite de γ sous l'action de $A_{\tilde{G}}(\overline{F}) \times G(\overline{F})$ revient à dire qu'un système d'équations algébriques a une solution dans $\overline{F}$; or on sait que ce système a une solution dans $\overline{F}_{u_1}$ si γ' intervient de façon non trivial dans la somme et il a donc bien aussi une solution dans $\overline{F}$. Notons Ξ l'ensemble des orbites de $A_{\tilde{G}}(F) \times G(F)$ dans X_γ et on fixe un représentant γ' dans chacune de ces orbites. On vient de montrer qu'en choisissant convenablement f_{u_1}, on a

$$I^{\tilde{G}}_{geo,\mu}(\omega, f_0 \otimes f^{v_0} = \sum_{\gamma' \in \Xi} c(\gamma') I^{\tilde{G}}(\gamma', \omega, f_{v_0} \otimes f^{v_0}),$$

où les $c(\gamma') \geq 0$ avec uniquement un nombre fini de coefficients non nuls. Il reste à montrer le lemme suivant :

Lemme *Pour tout $\gamma' \in \Xi$ tel que $I^{\tilde{G}}(\gamma', \omega, f_{v_0} \otimes f^{v_0}) \neq 0$*

$$I^{\tilde{G}}(\gamma', \omega, f_{v_0} \otimes f^{v_0}) = I^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f_{v_0} \otimes f^{v_0}),$$

ou encore que

$$I^{\tilde{G}}_{geo,\mu}(\omega, f_0 \otimes f^{v_0} = I^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f_{v_0} \otimes f^{v_0})(\sum_{\gamma' \in \Xi; I^{\tilde{G}}(\gamma', \omega, f_{v_0} \otimes f^{v_0}) \neq 0} c(\gamma')).$$

Il est alors clair que ce lemme termine la démonstration.

8.5 Preuve du lemme

Soit $\gamma' \in \Xi$; on lui associe un élément de $H^{1,0}(\Gamma_F, T_{sc} \overset{(1-\theta)\circ\pi}{\rightarrow} U)$ comme cela a été fait en 7.2. Cet élément se localise en toute place v en γ'_v ; on note $\underline{\gamma'}_v \in H^{1,0}(\Gamma_{F_v} T_{sc} \overset{(1-\theta)\circ\pi}{\rightarrow} U)$ sa classe de $G_{sc}(F_v)$-conjugaison. On note ϕ_v l'application (cf. 7.1.2 (2))

$$G_{ab}(F_v) \simeq H^{1,0}(\Gamma_{F_v}, T_{sc} \overset{\pi}{\rightarrow} T) \to H^{1,0}(\Gamma_{F_v} T_{sc} \overset{(1-\theta)\circ\pi}{\rightarrow} U),$$

et ψ_v l'application (cf. 7.1.2 (1))

$$A_{\tilde{G}}(F_v) \simeq H^0(\Gamma_{F_v}, A_{\tilde{G}}) \to H^{1,0}(\Gamma_{F_v} T_{sc} \overset{(1-\theta)\circ\pi}{\rightarrow} U).$$

On va aussi utiliser l'élément $\delta \in H^{1,0}(W_F, \hat{U} \overset{(1-\hat{\theta})}{\rightarrow} \hat{T}_{ad})$ et on le suppose non ramifié hors de V, c'est-à-dire que pour tout $v \notin V$ la restriction de δ_v à $H^{1,0}(\mathcal{O}_v^{nr}, \hat{U} \overset{(1-\hat{\theta})}{\rightarrow} \hat{T}_{ad})$ est triviale.

On impose la condition que $I^{\tilde{G}}(\gamma', \omega, f_{v_0} \otimes f^{v_0}) \neq 0$; par la condition sur f_v pour tout $v \in V - \{v_0\}$, on sait que γ' est conjugué de γ sous $A_{\tilde{G}}(F_v) \times G(F_v)$. Donc il existe $g_v \in G_{ab}(F_v)$ et $a_v \in A_{\tilde{G}}(F_v)$ tel que $\underline{\gamma'}_v = \phi_v(g_v)\psi_v(a_v)\underline{\gamma}_v$. Par choix de point de base, $\delta_v(\underline{\gamma}_v) = 1$. D'où $\underline{\gamma'}_v = \phi_v(g_v)\psi_v(a_v)$. Par définition

$$I^{\tilde{G}_v}(\gamma', \omega, f_v) = \omega_v(g_v)\mu_v(a_v)I^{\tilde{G}_v}(\gamma, \omega, f_v) = \delta(\gamma'_v)I^{\tilde{G}_v}(\gamma, \omega, f_v). \qquad (1)$$

Soit $v \notin V$. La non nullité de l'intégrale orbitale globale entraîne qu'il existe dans l'orbite de γ'_v sous $A_{\tilde{G}}(F_v) \times G(F_v)$ un élément, γ''_v dans $\tilde{K}_v$ et on écrit ici $\gamma' = a_v g_v^{-1}\gamma''_v g_v$. On a choisi V de tel sorte que γ_v est dans $\tilde{K}_v$. On introduit comme on l'a déjà fait les groupes et les espaces obtenus en quotientant par le tore $A_{\tilde{G}}$ et on note avec un $\flat$ le quotient. En particulier on a l'espace tordu $\tilde{G}_\flat = \tilde{G}/A_{\tilde{G}}$ et on note $\gamma''_{v,\flat}$ et $\gamma_\flat$ les images de γ''_v et γ dans $\tilde{G}_\flat(F_v)$.

Hors de V, K_v et $K_{v,\flat}$ sont associés à des schémas en groupes sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}_v$. On définit donc $K_v(\mathcal{O}_v^{nr})$ et $K_{v,\flat}(\mathcal{O}_v^{nr})$. On définit aussi $A_{\tilde{G}}(\mathcal{O}_v^{nr})$.

Montrons qu'il existe $k \in K_v(\mathcal{O}_v^{nr})$ et $a \in A_{\tilde{G}}(\mathcal{O}_v^{nr})$ tel que $\gamma'_v = ak^{-1}\gamma k$.

Après quotient par $A_{\tilde{G}}$, c'est-à-dire dans $\tilde{G}_{\flat,v}$, c'est le lemme 5 de [10], c'est-à-dire qu'il existe $h \in K_{\flat,v}(\mathcal{O}_v^{nr})$ tel que

$$\gamma'_{\flat,v} = h^{-1}\gamma_\flat h.$$

On vérifie que la suite :

$$1 \to A_{\tilde{G}}(\mathcal{O}_v^{nr}) \to K_v(\mathcal{O}_v^{nr}) \to K_{\flat,v}(\mathcal{O}_v^{nr}) \to 1$$

est exacte et on relève h en un élément $k \in K_v(\mathcal{O}_v^{nr})$. Alors il existe $a \in A_{\tilde{G}}(\overline{F})$ tel que $\gamma''_v = ak^{-1}\gamma k$. D'où nécessairement $a \in A_{\tilde{G}}(\overline{F}) \cap K_v(\mathcal{O}_v^{nr}) = A_{\tilde{G}}(\mathcal{O}_v^{nr})$. D'où l'assertion.

Ainsi $\delta_v(\gamma''_v) = 1$ puisque par hypothèse δ est non ramifié hors de v et :

$$I^{\tilde{G}_v}(\gamma', \omega, f_v) = \omega_v(g_v)\mu_v(a_v)I^{\tilde{G}_v}(\gamma''_v, \omega, f_v) = \delta(\gamma'_v)I^{\tilde{G}_v}(\gamma''_v, \omega, f_v).$$

Montrons encore que

$$I^{\tilde{G}_v}(\gamma''_v, \omega, f_v) = I^{\tilde{G}_v}(\gamma_v, \omega, f_v) = .1 \tag{2}$$

Pour cela on utilise le fait démontré en [16],lemme 5.6 (ii) que

$$I^{\tilde{G}_v}(\gamma''_v, \omega, 1_{\tilde{K}_v}) = I^{\tilde{G}_v}(\gamma_v, \omega, 1_{\tilde{K}_v}) = 1.$$

Pour montrer (2), il suffit donc de montrer que si $x \in G(F_v)$ vérifie $x^{-1}\gamma''_v x \in A_{\tilde{G}}(F_v)\tilde{K}_v$ alors $x^{-1}\gamma''_v x \in \tilde{K}_v$ (et le même argument va s'appliquer avec γ_v) : on fixe $\tilde{H} : \tilde{G}(F_v) \to \mathcal{A}_{\tilde{G}}$ de façon compatible à l'application analogue pour $G(F_v)$ et tel que $\tilde{H}(\tilde{K}_v) = 0$. Alors :

$$0 = \tilde{H}(\gamma''_v) = \tilde{H}(x^{-1}\gamma''_v x) = \tilde{H}(ak),$$

si on a écrit $x^{-1}\gamma''_v x = ak$ avec $a \in A_{\tilde{G}}(F_v)$ et $k \in \tilde{K}_v$. Ainsi $\tilde{H}(a) = 0$ et $a \in A_{\tilde{G}}(\mathcal{O}_v) \subset K_v$. D'où l'assertion.

Donc pour tout $v \in V$, on a aussi

$$I^{\tilde{G}_v}(\gamma', \omega, f_v) = \delta(\gamma'_v)I^{\tilde{G}_v}(\gamma''_v, \omega, f_v) = \delta_v(\gamma')I^{\tilde{G}_v}(\gamma_v, \omega, f_v). \tag{3}$$

Il reste la place v_0 ; on sait que $\gamma'_\flat$ et $\gamma_\flat$ sont localement conjugués en toute place de $V - \{v_0\}$ et qu'il sont conjugués d'un élément de $\tilde{K}_{\flat,v}$ pour tout $v \notin V$. Les hypothèses du lemme 4 de [10] sont satisfaites (on a fait ce qu'il fallait pour cela) et ce lemme montre alors que $\gamma'_{\flat,v_0}$ est conjugué de $\gamma_{\flat,v_0}$ par un élément de $G_\flat(F_{v_0})$. Comme $H^1(\Gamma_{F_{v_0}}, A_{\tilde{G}}(F_{v_0})) = 0$ car $A_{\tilde{G}}(F_{v_0})$ est un tore déployé, l'application de $G(F_{v_0})$ dans $G_\flat(F_{v_0})$ est surjective. Ainsi il existe encore $a_0 \in A_{\tilde{G}}(F_{v_0})$ et $g_0 \in G(F_{v_0})$ tel que $\gamma' = a_0 g_0^{-1}\gamma g_0$. D'où l'égalité de (1) aussi en la place v_0. En regroupant avec (3), on obtient :

$$I(\gamma', \omega, f^{v_0} f_{v_0}) = \prod_v I^{\tilde{G}_v}(\gamma', \omega, f_v) = \prod_v \delta_v(\gamma') I^{\tilde{G}_v}(\gamma, \omega, f_v)$$

$$= I^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f_{v_0} \otimes f^{v_0}) \prod_v \delta_v(\gamma').$$

Comme δ est automorphe et γ' rationnel, $\prod_v \delta_v(\gamma') = 1$ et on l'égalité ci-dessus donne

$$I^{\tilde{G}}(\gamma', \omega, f_{v_0} \otimes f^{v_0}) = I^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f_{v_0} \otimes f^{v_0}),$$

si l'intégrale de gauche est non nulle, comme annoncé. Cela termine la preuve.

9 La formule des traces simple

Soient F un corps de nombres et $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ un triplet défini sur F. On considère une fonction $f = \otimes_v f_v \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{A}_F))$ vérifiant les conditions : il existe au moins deux places v telles que f_v soit cuspidale ; il existe au moins une place v telle que f_v soit à support fortement régulier ; f_v est K_v-finie pour toute place v archimédienne. Les deux termes de la formule des traces

$$I^{\tilde{G}}_{géom}(\omega, f) = I^{\tilde{G}}_{spec}(\omega, f)$$

se simplifient de la façon suivante. On suppose fixées des mesures sur $G(\mathbb{A}_F)$ et $\mathcal{A}_{\tilde{G}} \simeq \mathfrak{A}_{\tilde{G}}$.

On a

$$I^{\tilde{G}}_{géom}(\omega, f) = \sum_{\gamma \in \tilde{G}(F)_{ell}/conj} [Z_G(\gamma; F) : G_\gamma(F)]^{-1} mes(\mathfrak{A}_{\tilde{G}} G_\gamma(F) \backslash G_\gamma(\mathbb{A}_F)) I^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f),$$

où $\tilde{G}(F)_{ell}/conj$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $G(F)$ dans l'ensemble $\tilde{G}(F)_{ell}$ des éléments fortement réguliers et elliptiques de $\tilde{G}(F)$; G_γ est la composante neutre du centralisateur $Z_G(\gamma)$; on a posé

$$I^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = \int_{G_\gamma(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} f(g^{-1}\gamma g)\omega(g)\, dg. \qquad (1)$$

On a

$$I^{\tilde{G}}_{spec}(\omega, f) = \sum_{\tilde{\pi}\in\tilde{\Pi}_{disc}} z_{\tilde{\pi}} I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, 0, f)$$

où $\tilde{\Pi}_{disc}$ est l'ensemble des ω-représentations irréductibles de $\tilde{G}(\mathbb{A}_F)$ intervenant dans la partie discrète de la formule des traces (discrète au sens d'Arthur) ; puisqu'on est dans la situation tordue, cette notion n'est définie qu'à homothétie près et on doit plutôt considérer que $\tilde{\Pi}_{disc}$ est un ensemble de représentants modulo homothétie, formé de représentations unitaires ; rappelons que, par définition, les éléments $\tilde{\pi} \in \tilde{\Pi}_{disc}$ ont un caractère central ω_π de $Z_G(\mathbb{A}_F)$ qui est trivial sur $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$; $z_{\tilde{\pi}}$ est un scalaire pas forcément positif et incluant le facteur $d(\theta)^{-1}$ qui intervient sournoisement un peu partout ; on a posé

$$I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, 0, f) = \int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}} trace\, \pi_\lambda(f)\, d\lambda.$$

10 La formule des traces simple avec caractère

Fixons de plus un caractère unitaire μ de $A_{\tilde{G}}(\mathbb{A}_F)/A_{\tilde{G}}(F)$. Pour toute place v de F, on note $C^\infty_{c,\mu_v}(\tilde{G}(F_v))$ l'espace des fonctions f_v sur $\tilde{G}(F_v)$ qui sont lisses et à support compact modulo $A_{\tilde{G}}(F_v)$, vérifient la relation $f_v(a\gamma) = \mu_v(a)^{-1} f_v(\gamma)$ pour tous $a \in A_{\tilde{G}}(F_v)$ et $\gamma \in \tilde{G}(F_v)$ et qui sont K_v-finies si v est archimédienne. Si $v \notin V_{ram}$ et μ_v est non ramifié, on note $\mathbf{1}_{\tilde{K}_v,\mu_v}$ l'unique élément de cet espace qui est à support dans $A_{\tilde{G}}(F_v)\tilde{K}_v$ et qui vaut 1 sur $\tilde{K}_v$. On note $C^\infty_{c,\mu}(\tilde{G}(\mathbb{A}_F))$ le produit tensoriel restreint des $C^\infty_{c,\mu_v}(\tilde{G}(F_v))$, c'est-à-dire l'espace engendré par les fonctions $f = \otimes_v f_v$ où $f_v \in C^\infty_{c,\mu_v}(\tilde{G}(F_v))$ pour tout v et $f_v = \mathbf{1}_{\tilde{K}_v,\mu_v}$ pour presque tout v.

On considère une telle fonction $f = \otimes_v f_v$, on suppose qu'il existe au moins deux places v telles que f_v soit cuspidale et qu'il existe au moins une place v telle que f_v soit à support fortement régulier modulo $A_{\tilde{G}}$. La notion de cuspidalité se définit aussi bien pour des éléments de $C^\infty_{c,\mu_v}(\tilde{G}(F_v))$. La notion de forte régularité modulo $A_{\tilde{G}}$ se définit de la façon suivante. On note $G_\flat = G/A_{\tilde{G}}$ et $\tilde{G}_\flat = \tilde{G}/A_{\tilde{G}}$. Alors $\tilde{G}_\flat$ est un espace tordu sous $G_\flat$. On dit qu'un élément $\gamma \in \tilde{G}$ est fortement régulier modulo $A_{\tilde{G}}$ si son image dans $\tilde{G}_\flat$ est fortement régulier. On va établir une variante de la formule des traces simples pour une telle fonction. On fixe de plus une mesure sur $A_{\tilde{G}}(\mathbb{A}_F)$.

Notons $\tilde{G}(F)_\star$ l'ensemble des éléments de $\tilde{G}(F)$ qui sont fortement réguliers modulo $A_{\tilde{G}}$ et qui sont elliptiques. Le groupe $A_{\tilde{G}}(F) \times G(F)$ agit sur $\tilde{G}(F)_\star$

par $(a,g,\gamma)\mapsto ag^{-1}\gamma g$. Notons $\tilde{G}(F)_{\star}/\sim$ l'ensemble des orbites, que l'on identifie à un ensemble de représentants. Pour tout $\gamma\in\tilde{G}(F)_{\star}$, notons $Stab(\gamma;F)$ le fixateur de γ dans $A_{\tilde{G}}(F)\times G(F)$. Il contient $G_{\gamma}(F)$ et on vérifie que le quotient $Stab(\gamma;F)/G_{\gamma}(F)$ est fini. On pose

$$I^{\tilde{G}}_{g\acute{e}om,\mu}(\omega,f)=\sum_{\gamma\in\tilde{G}(F)_{\star}/\sim}[Stab(\gamma;F):G_{\gamma}(F)]^{-1}mes(A_{\tilde{G}}(\mathbb{A}_F)G_{\gamma}(F)\backslash G_{\gamma}(\mathbb{A}_F))I^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f),$$

où $I^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f)$ est définie par la même formule (1) que dans le paragraphe précédent.

Remarques. (1) Pour $\gamma\in\tilde{G}(F)_{\star}$, on vérifie que la composante locale $I^{\tilde{G}_v}(\gamma,\omega_v,\mathbf{1}_{\tilde{K}_v,\mu_v})$ de l'intégrale précédente vaut 1 pour presque toute place v, pourvu que l'on utilise les mesures non ramifiées standard.

(2) Utilisons le groupe $G_{\flat}=A_{\tilde{G}}\backslash G$ et l'espace tordu $\tilde{G}_{\flat}=A_{\tilde{G}}\backslash\tilde{G}$. Parce que $A_{\tilde{G}}$ est déployé, le groupe $H^1(\Gamma_F;A_{\tilde{G}})$ est nul. Donc les applications $G(F)\to G_{\flat}(F)$ et $\tilde{G}(F)\to\tilde{G}_{\flat}(F)$ sont surjectives. On voit que cette dernière application envoie bijectivement $\tilde{G}(F)_{\star}/\sim$ sur un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $G_{\flat}(F)$ dans $\tilde{G}_{\flat}(F)_{ell}$. De même, pour $\gamma\in\tilde{G}(F)_{\star}$, $Stab(\gamma;F)$ est l'image réciproque dans $G(F)$ du groupe $Z_{G_{\flat}}(\gamma_{\flat};F)$, où $\gamma_{\flat}$ est l'image de γ dans $\tilde{G}_{\flat}(F)$.

On n'a pas supposé que μ était trivial sur $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$. Mais il existe un unique caractère μ' de $A_{\tilde{G}}(\mathbb{A}_F)$ trivial sur $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}A_{\tilde{G}}(F)$ et un unique élément $\nu\in i\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}$ tels que $\mu(a)=\mu'(a)e^{<\nu,H_{\tilde{G}}(a)>}$ pour tout $a\in A_{\tilde{G}}(\mathbb{A}_F)$. On note $\tilde{\Pi}_{disc,\mu}$ le sous-ensemble des $\tilde{\pi}=\tilde{\pi}'_{\nu}$ où $\tilde{\pi}'\in\tilde{\Pi}_{disc}$ et où le caractère central $\omega_{\pi'}$ coïncide avec μ' sur $A_{\tilde{G}}(\mathbb{A}_F)$. Pour une telle représentation $\tilde{\pi}$, on définit l'opérateur

$$\tilde{\pi}(f)=\int_{A_{\tilde{G}}(\mathbb{A}_F)\backslash\tilde{G}(\mathbb{A}_F)}\tilde{\pi}(\gamma)f(\gamma)\,d\gamma.$$

On pose

$$I^{\tilde{G}}_{spec,\mu}(\omega,f)=\sum_{\tilde{\pi}\in\tilde{\Pi}_{disc,\mu}}z_{\tilde{\pi}}trace\,\tilde{\pi}(f).$$

Proposition *Pour $f\in C^{\infty}_{c,\mu}(\tilde{G}(\mathbb{A}_F))$ vérifiant les conditions ci-dessus, on a l'égalité*

$$I^{\tilde{G}}_{g\acute{e}om,\mu}(\omega,f)=I^{\tilde{G}}_{spec,\mu}(\omega,f).$$

Preuve. On se ramène d'abord au cas où la restriction de μ à $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$ es trivial. Il suffit pour cela de définir la fonction f' par $f'(\gamma)=f(\gamma)e^{<\nu,H_{\tilde{G}}(\gamma)>}$

pour tout $\gamma \in \tilde{G}(\mathbb{A}_F)$ (on rappelle que l'application $H_{\tilde{G}}$ est normalisée par $H_{\tilde{G}}(\gamma) = 0$ si $\gamma \in \tilde{G}(F)$). Alors $f' \in C^\infty_{c,\mu'}(\tilde{G}(\mathbb{A}_F))$ et on vérifie trivialement que $I^{\tilde{G}}_{g\acute{e}om,\mu'}(\omega, f') = I^{\tilde{G}}_{g\acute{e}om,\mu}(\omega, f)$ et que $I^{\tilde{G}}_{spec,\mu'}(\omega, f') = I^{\tilde{G}}_{spec,\mu}(\omega, f)$. L'assertion pour f' et μ' implique donc celle pour f et μ.

Désormais, on suppose μ trivial sur $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$. On peut choisir une fonction $\varphi \in C^\infty_c(\tilde{G}(\mathbb{A}_F))$ telle que

$$f(\gamma) = \int_{A_{\tilde{G}}(\mathbb{A}_F)} \varphi(a\gamma)\mu(a)\, da$$

pour tout $\gamma \in \tilde{G}(\mathbb{A}_F)$. On voit que l'on peut imposer à φ d'être de la forme $\varphi = \otimes_v \varphi_v$, avec φ_v cuspidale en au moins deux places et φ_v à support régulier modulo $A_{\tilde{G}}$ en au moins une place. Pour tout $a \in A_{\tilde{G}}(\mathbb{A}_F)$, on a l'égalité du paragraphe précédent

$$I^{\tilde{G}}_{g\acute{e}om}(\omega, {}^a\varphi) = I^{\tilde{G}}_{spec,\mu}(\omega, {}^a\varphi),$$

où ${}^a\varphi$ est la fonction définie par ${}^a\varphi(\gamma) = \varphi(a\gamma)$. On considère les deux membres de cette égalité comme des fonctions de a. On voit que les deux membres sont invariants par translations par $A_{\tilde{G}}(F)$. Le lemme 2.1 de Stabilisation VI montre que le membre de gauche (donc aussi celui de droite) est à support compact modulo ce groupe $A_{\tilde{G}}(F)$. Evidemment, les fonctions sont lisses en a. On a donc l'égalité

$$\int_{A_{\tilde{G}}(F)\backslash A_{\tilde{G}}(\mathbb{A}_F)} I^{\tilde{G}}_{g\acute{e}om}(\omega, {}^a\varphi)\mu(a)\, da = \int_{A_{\tilde{G}}(F)\backslash A_{\tilde{G}}(\mathbb{A}_F)} I^{\tilde{G}}_{spec}(\omega, {}^a\varphi)\mu(a)\, da.$$

Posons $m = mes(\mathfrak{A}_{\tilde{G}} A_{\tilde{G}}(F)\backslash A_{\tilde{G}}(\mathbb{A}_F))$. On va prouver que le membre de gauche de cette égalité est égal à $mI^{\tilde{G}}_{g\acute{e}om,\mu}(\omega, f)$ tandis que le membre de droite est égal à $mI^{\tilde{G}}_{spec,\mu}(\omega, f)$. Cela prouvera l'énoncé.

Dans $I^{\tilde{G}}_{g\acute{e}om}(\omega, {}^a\varphi)$ intervient l'ensemble de sommation $\tilde{G}(F)_{ell}/conj$. La condition de régularité modulo $A_{\tilde{G}}$ imposée à f_v en au moins une place implique que l'on peut le remplacer par $\tilde{G}(F)_\star/conj$. Le groupe $A_{\tilde{G}}(F)$ agit par multiplication sur cet ensemble. Les orbites s'identifient à $\tilde{G}(F)_\star/\sim$. L'action n'est pas forcément libre. On note $stab(\gamma; F)$ le stabilisateur d'un élément γ (précisément, pour $\gamma \in \tilde{G}(F)_\star$, $stab(\gamma; F)$ est le groupe des $\dot{a} \in A_{\tilde{G}}(F)$ tels que $\dot{a}\gamma$ soit de la forme $g^{-1}\gamma g$ pour un $g \in G(F)$). Une somme $\sum_{\gamma\in\tilde{G}(F)_\star/conj} X(\gamma)$ s'écrit donc aussi

$$\sum_{\gamma\in\tilde{G}(F)_\star/\sim} |stab(\gamma; F)|^{-1} \sum_{\dot{a}\in A_{\tilde{G}}(F)} X(\dot{a}\gamma).$$

Ainsi

$$I^{\tilde{G}}_{g\acute{e}om}(\omega,{}^a\varphi)=\sum_{\gamma\in\tilde{G}(F)_\star/\sim}|stab(\gamma;F)|^{-1}\sum_{\dot{a}\in A_{\tilde{G}}(F)}[Z_G(\dot{a}\gamma;F):G_{\dot{a}\gamma}(F)]^{-1}$$

$$mes(\mathfrak{A}_{\tilde{G}}G_{\dot{a}\gamma}(F)\backslash G_{\dot{a}\gamma}(\mathbb{A}_F))I^{\tilde{G}}(\dot{a}\gamma,\omega,{}^a\varphi).$$

Soient γ et $\dot{a}$ intervenant ci-dessus. On a évidemment $Z_G(\dot{a}\gamma)=Z_G(\gamma)$ et $G_{\dot{a}\gamma}=G_\gamma$. L'application $(x,g)\mapsto x$ envoie $Stab(\gamma;F)$ dans $stab(\gamma;F)$ et on vérifie immédiatement que la suite suivante est exacte

$$1\to Z_G(\gamma;F)\to Stab(\gamma;F)\to stab(\gamma;F)\to 1$$

En conséquence,

$$|stab(\gamma;F)|[Z_G(\gamma;F):G_\gamma(F)]=[Stab(\gamma;F):G_\gamma(F)].$$

On a aussi

$$I^{\tilde{G}}(\dot{a}\gamma,\omega,{}^a\varphi)=I^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,{}^{\dot{a}a}\varphi).$$

Enfin,

$$mes(\mathfrak{A}_{\tilde{G}}G_\gamma(F)\backslash G_\gamma(\mathbb{A}_F))=m\,mes(A_{\tilde{G}}(\mathbb{A}_F)G_\gamma(F)\backslash G_\gamma(\mathbb{A}_F)).$$

Donc

$$I^{\tilde{G}}_{g\acute{e}om}(\omega,{}^a\varphi)=m\sum_{\dot{a}\in A_{\tilde{G}}(F)}\sum_{\gamma\in\tilde{G}(F)_\star}[Stab(\gamma;F):G_\gamma(F)]$$

$$mes(A_{\tilde{G}}(\mathbb{A}_F)G_\gamma(F)\backslash G_\gamma(\mathbb{A}_F))I^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,{}^{\dot{a}a}\varphi).$$

Multiplions cette expression par $\mu(a)$ et intégrons en $a\in A_{\tilde{G}}(F)\backslash A_{\tilde{G}}(\mathbb{A}_F)$. La somme en $\dot{a}$ et l'intégrale en a se composent en une unique intégrale en $a\in A_{\tilde{G}}(\mathbb{A}_F)$. On obtient

$$\int_{A_{\tilde{G}}(F)\backslash A_{\tilde{G}}(\mathbb{A}_F)}I^{\tilde{G}}_{g\acute{e}om}(\omega,{}^a\varphi)\mu(a)\,da=m\sum_{\gamma\in\tilde{G}(F)_\star}[Stab(\gamma;F):G_\gamma(F)]^{-1}$$

$$mes(A_{\tilde{G}}(\mathbb{A}_F)G_\gamma(F)\backslash G_\gamma(\mathbb{A}_F))\int_{A_{\tilde{G}}(\mathbb{A}_F)}I^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,{}^a\varphi)\mu(a)\,da.$$

Mais la dernière intégrale n'est autre que $I^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f)$. On obtient que le membre de droite ci-dessus est égal à $mI^{\tilde{G}}_{g\acute{e}om,\mu}(\omega,f)$, ce qui est le résultat annoncé.

Passons au côté spectral. Pour toute ω-représentation irréductible $\tilde{\pi}$, la distribution $h \mapsto I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, 0, h)$ est à support dans le sous-ensemble $\tilde{G}(\mathbb{A}_F)^1$ des éléments $\gamma \in \tilde{G}(\mathbb{A}_F)$ tels que $H_{\tilde{G}}(\gamma) = 0$. La fonction φ étant fixée, l'ensemble des $a \in A_{\tilde{G}}(F)\backslash A_{\tilde{G}}(\mathbb{A}_F)$ tels que le support de ${}^a\varphi$ coupe l'ensemble précédent est compact. Notons C ce compact. On obtient que pour tout $\tilde{\pi}$, la fonction $a \mapsto I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, 0, {}^a\varphi)$ est à support dans C. Donc

$$\int_{A_{\tilde{G}}(F)\backslash A_{\tilde{G}}(\mathbb{A}_F)} I^{\tilde{G}}_{spec}(\omega, {}^a\varphi)\mu(a)\, da = \int_C \sum_{\tilde{\pi}\in\tilde{\Pi}_{disc}} z_{\tilde{\pi}} I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, 0, {}^a\varphi)\mu(a)\, da. \quad (3)$$

Montrons que :

(4) cette expression est absolument convergente.

Il est évidemment plus fort de prouver que l'intégrale

$$\int_C \sum_{\tilde{\pi}\in\tilde{\Pi}_{disc}} |z_{\tilde{\pi}}| \int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}} |trace\, \tilde{\pi}_\lambda({}^a\varphi)|\, d\lambda\, da$$

est convergente. Or $trace\, \tilde{\pi}_\lambda({}^a\varphi) = \omega_{\pi_\lambda}(a)^{-1} trace\, \tilde{\pi}_\lambda(\varphi)$. Le caractère central est forcément unitaire, et l'intégrale ci-dessus est simplement le produit des deux expressions $\int_C da$ et

$$\sum_{\tilde{\pi}\in\tilde{\Pi}_{disc}} |z_{\tilde{\pi}}| \int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}} |trace\, \tilde{\pi}_\lambda(\varphi)|\, d\lambda.$$

La première est convergente puisque C est compact. On a prouvé la convergence de la seconde en Stabilisation X, proposition 7.3, en utilisant les résultats de Müller. D'où (4).

En conséquence, l'expression (3) vaut aussi

$$\sum_{\tilde{\pi}\in\tilde{\Pi}_{disc}} z_{\tilde{\pi}} \int_C I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, 0, {}^a\varphi)\mu(a)\, da,$$

ou encore, par le même argument de support que ci-dessus,

$$\sum_{\tilde{\pi}\in\tilde{\Pi}_{disc}} z_{\tilde{\pi}} \int_{A_{\tilde{G}}(F)\backslash A_{\tilde{G}}(\mathbb{A}_F)} I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, 0, {}^a\varphi)\mu(a)\, da. \quad (5)$$

Fixons $\tilde{\pi} \in \tilde{\Pi}_{disc}$. On a l'égalité

$$\int_{A_{\tilde{G}}(F)\backslash A_{\tilde{G}}(\mathbb{A}_F)} I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, 0, {}^a\varphi)\mu(a)\, da = \int_{A_{\tilde{G}}(F)\mathfrak{A}_{\tilde{G}}\backslash A_{\tilde{G}}(\mathbb{A}_F)}$$

$$\int_{\mathfrak{A}_{\tilde{G}}} \int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}} trace\, \tilde{\pi}_\lambda({}^{za}\varphi)\, d\lambda\, dz\, \mu(a)\, da. \tag{6}$$

On a $trace\, \tilde{\pi}_\lambda({}^{za}\varphi) = e^{-<\lambda, H_{\tilde{G}}(z)>} trace\, \tilde{\pi}_\lambda({}^{a}\varphi)$. La double intégrale intérieure ci-dessus disparaît donc par inversion de Fourier. C'est-à-dire

$$\int_{\mathfrak{A}_{\tilde{G}}} \int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}} trace\, \tilde{\pi}_\lambda({}^{za}\varphi)\, d\lambda\, dz \;=\; trace\, \tilde{\pi}({}^{a}\varphi).$$

On a aussi

$$trace\, \tilde{\pi}({}^{a}\varphi) = \omega_\pi(a)^{-1} trace\, \tilde{\pi}(\varphi)$$

et l'expression (6) devient simplement

$$trace\, \tilde{\pi}(\varphi) \int_{A_{\tilde{G}}(F)\mathfrak{A}_{\tilde{G}} \backslash A_{\tilde{G}}(\mathbb{A}_F)} \omega_\pi(a)^{-1} \mu(a)\, da.$$

Cette dernière intégrale vaut m si $\omega_\pi = \mu$, 0 sinon. Si $\omega_\pi = \mu$, on transforme le premier terme de la façon suivante :

$$\tilde{\pi}(\varphi) = \int_{\tilde{G}(\mathbb{A}_F)} \tilde{\pi}(\gamma)\varphi(\gamma)\, d\gamma = \int_{A_{\tilde{G}}(\mathbb{A}_F) \backslash \tilde{G}(\mathbb{A}_F)} \int_{A_{\tilde{G}}(\mathbb{A}_F)} \tilde{\pi}(a\gamma)\varphi(a\gamma)\, da\, d\gamma$$

$$= \int_{A_{\tilde{G}}(\mathbb{A}_F) \backslash \tilde{G}(\mathbb{A}_F)} \tilde{\pi}(\gamma) \int_{A_{\tilde{G}}(\mathbb{A}_F)} \mu(a)\varphi(a\gamma)\, da\, d\gamma = \int_{A_{\tilde{G}}(\mathbb{A}_F) \backslash \tilde{G}(\mathbb{A}_F)} \tilde{\pi}(\gamma) f(\gamma)\, d\gamma \;=\; \tilde{\pi}(f),$$

en utilisant nos définitions. En conséquence, l'expression (6) vaut $m\, trace\, \tilde{\pi}(f)$ si $\tilde{\pi} \in \tilde{\Pi}_{disc,\mu}$, 0 sinon. En utilisant l'égalité de (3) et (5), on obtient que l'expression (3) vaut $I^{\tilde{G}}_{spec,\mu}(\omega, f)$, comme annoncé. $\square$

Références

[1] J. Arthur *On elliptic tempered characters* Acta Math. **171** (1993) pp.73-138

[2] J. Arthur *On local character relations* Selecta Math. *2* (1996) pp.501-579

[3] A. Bouaziz *Sur les caractères de groupes de Lie réductifs non connexes*, Journal of Functional Analysis, **70** (1987) pp. 1-79

[4] Harish-Chandra *Supertempered distributions on real reductive groups Studies in applied Math* Adv. in Math. supplementary studies, vol 8 (1983) et Harish-Chandra collected papers, volume IV, Springer Verlag, (1970-1983) pp. 447-461

[5] Harish-Chandra *Harmonic analysis on real reductive groups I.* Journal of funct. anal. **19** (1975) pp. 104-204

[6] H. Hecht *On characters and asymptotics of representations of a real reductive Lie group* Math. Ann. **242** (1979) pp. 103-126

[7] H. Hecht, W. Schmidt *Characters, asymptotics and n-homology of Harish-Chandra modules* Acta Math. **151** (1983) pp. 49-151

[8] G. Henniart et B. Lemaire *La transformée de Fourier pour les espaces tordus sur un groupe réductif* $\mathfrak{p}$*-adique I. Le théorème de Paley-Wiener* arXiv :1309.2500

[9] R. Herb *Supertempered virtual characters*, Compositio Math. **93** (1994) pp.139-154

[10] R. Kottwitz, J. Rogawski *The Distributions in the Invariant Trace Formula Are Supported on Characters*, Canad. J. Math. **52**(4) (2000) pp. 804814

[11] R. Kottwitz et D. Shelstad *Foundations of twisted endoscopy*, Astérisque 255 (1999)

[12] J.-P. Labesse *Non invariant base change identities* Mem. Soc. Math. France **61**, (1995)

[13] C. Mœglin et J.-L. Waldspurger *Stabilisation X : stabilisation spectrale* arXiv :1412.2981

[14] W. Müller *The trace class conjecture in the theory of automorphic forms. II,* GAFA, vol 8, 1998, pp. 315-355

[15] J.-L. Waldspurger *Le groupe GL_N tordu, sur un coprs p-adique, Ière partie* Duke Math J. **137**(2), (2007) pp. 185-234

[16] J.-L. Waldspurger *L'endoscopie tordue n'est pas si tordue* Memoirs AMS, **908**(2008)

[17] J.-L. Waldspurger *Formule des traces locale tordue* prépublication 2013, http ://www.math.jussieu.fr/∼waldspur

[18] J.-L. Waldspurger *Stabilisation de la formule des traces tordue I : endoscopie tordue sur un corps local*

[19] J.-L. Waldspurger *Stabilisation de la formule des traces tordue III : intégrales orbitales et endoscopie sur un corps local non-archimédien ; réductions et preuves*

[20] J.-L. Waldspurger *Stabilisation de la formule des traces tordue IV : transfert spectral archimédien*

[21] J.-L. Waldspurger, C. Moeglin *Stabilisation de la formule des traces tordue VI : la partie géométrique de cette formule*

[22] N. Wallach *Representations of semi-simple Lie groups and Lie algebras, in Lie theories and their applications* Queen's papers in pure and applied math. **48** (1978) pp. 154-246