

 SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Cours 1:
 Introduction à l'histoire des mathématiques

LU3MA209
 ÉLÉMENTS D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

2021-2022, 2^e période
 David Aubin
 david.aubin@sorbonne-université.fr

1

PROGRAMME DE LA SÉANCE

1. Introduction: histoire, philosophie et « expérience » des mathématiques.
2. Notes sur les mathématiques pré-euclidiennes
3. Mathématiques euclidiennes (intro)

2

HISTOIRE, PHILOSOPHIE ET « EXPÉRIENCE » DES MATHÉMATIQUES.

Introduction aux Éléments d'histoire des mathématiques

3


QUE SONT LES MATHÉMATIQUES ?

Avant de faire l'histoire d'un objet, il est nécessaire de chercher à le définir.
 Mais les définitions qu'on en donne sont elles-mêmes historiquement situées.
 D'où l'obligation de se poser des questions philosophiques sur les mathématiques:

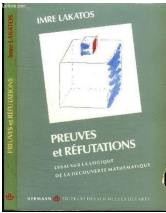
- Nature et origine des objets mathématiques?
- Leur rapport avec la réalité.
- Les math sont-elles une science?

4

HISTOIRE ET PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES



Imre Lakatos
(1922-1974)



« L'histoire des mathématique, sans le guide de la philosophie, est *aveugle*, tandis que la philosophie des mathématiques, tournant le dos aux phénomènes les plus intrigants de l'histoire des mathématiques est *vide*. »

Imre Lakatos, *Preuves et réfutations* (1976).

13/01/2022 D. AUBIN - LU3MA209 5

5

PLATON, *MÉNON*

Dialogue sensé avoir eu lieu autour de 402 avant notre ère.

Le paradoxe de Ménon :

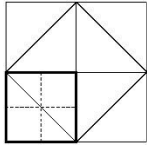
- soit on sait ce qu'on cherche, alors toute recherche est inutile;
- soit on ne le sait pas, alors on ne sait que chercher et toute recherche est impossible.

Le dialogue de l'esclave :

- Le problème de la duplication du carré – le problème – la solution intuitive – un deuxième essai – la solution exacte enseignée par Socrate.
- Quelle connaissance l'esclave a-t-il acquise ? Reminiscence – une opinion vraie.

La connaissance vs. l'opinion vraie

- La véritable connaissance s'appuie sur des principes (expériences ou démonstrations).
- La science est une opinion vraie justifiée.



13/01/2022 D. AUBIN - LU3MA209 6

6

PHILOSOPHIE DES MATHS – RÉALISME


Réalisme

- Objets mathématiques existent en dehors de l'esprit humain (Kurt Gödel, Jean-Pierre Serre).


Platonisme

- Forme extrême de réalisme selon laquelle:
- éternels et incorruptibles, les objets mathématiques existent dans le monde des idées aussi réel que le monde dans lequel nous vivons qui n'en est que l'approximation imparfaite.

Problème:
comment peut-on connaître quoique ce soit à leur propos ?



Kurt Gödel (1906 –1978)



Jean-Pierre Serre (né en 1926)

13/01/2022 D. AUBIN - LU3MA209 7


7

PHILOSOPHIE DES MATHS – EMPIRISME


Une science empirique comme les autres (J.S. Mill, Hermite).

« Je vous ferais bondir, si j'osais vous avouer que je n'admets aucune solution de continuité, aucune coupure entre les mathématiques et la physique, et que les nombres entiers me semblent exister en dehors de nous et en s'imposant avec la même nécessité, la même fatalité que le sodium, le potassium, etc. »
— Hermite à Stieljes (janvier 1889).

Argument d'indispensabilité: les maths sont indispensables pour comprendre les théories actuelles et donc si on croit à la réalité des entités de la physique moderne, il est nécessaire de croire à celle des entités mathématiques (Willard V.O. Quine et Hillary Putnam).



Charles Hermite (1822–1901)



Willard Van Orman Quine (1908–2000)

13/01/2022 D. AUBIN - LU3MA209 8

8

PHILOSOPHIE DES MATHS – FORME ET LOGIQUE

Logicisme (Frege, Russel-Whitehead, Carnap)

- Les mathématiques peuvent se réduire à la logique (Gottlob Frege, Rudolph Carnap).

Problèmes:

- les paradoxes de Russel (l'ensemble des ensembles qui ne se contiennent pas) mais il existe des solutions: théorie des types, théorie axiomatique des ensembles Zermelo-Fraenkel.
- ne fait que repousser le problème: qu'est-ce qui fonde la logique, ses entités, ses règles et ses théorèmes?


Formalisme (David Hilbert)

- L'étude des conséquences de règles qu'on se donne (Hilbert).
- Le « jeu » euclidien.


Problèmes:

- Quelle peut être la justification de ces règles? Sont-elles arbitraires?
- Montrer la complétude et la cohérence du système: la « métamathématique ».

Gottlob Frege (1848–1925)



David Hilbert (1862–1943)



13/01/2022 D. AUBIN - LU3MA209 9

9

PHILOSOPHIE DES MATHS – MATHS ET RÉALITÉ


Constructivisme:

- Les mathématiques consistent à étudier les propriétés d'objets « constructibles », c'est-à-dire dont on peut montrer l'existence à l'aide d'algorithmes explicites.
- Exemple : l'intuitionisme (Brouwer)**
 - Une activité mentale constructive de l'esprit humain.
 - Basée sur une logique intuitionniste qui rejette la loi du tiers exclus, les preuves par l'absurde et l'axiome du choix (L.E.J. Brouwer).

Structuralisme (Bourbaki):

- Fondements pour le « working mathematician ».
- Formalisation en principe; structures-mères; catégories, ...

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966)



13/01/2022 D. AUBIN - LU3MA209 10

10

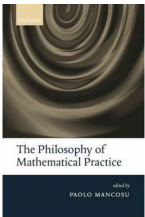
PHILOSOPHIE DE LA PRATIQUE MATHÉMATIQUE

Au delà de l'ontologie mathématique:

Explorer les notions d' « utilité », « simplicité », « évidence », « généralité », « compréhension », « explication », etc.

Le rôle des méthodes, des modèles (mentaux ou physiques), des pratiques d'écriture, des diagrammes, des collaborations interpersonnelles, etc.

The Philosophy of Mathematical Practice
edited by PAOLO MANCOSU



13/01/2022 D. AUBIN - LU3MA209 11

11

UNE PROPOSITION – L'« EXPÉRIENCE MATHÉMATIQUE »

Une approche typiquement française, début du 20^e siècle.

Les mathématiques sont comme les autres sciences. En particulier, elles sont aussi basées sur l'expérience.

- Paul Appell:** « Les axiomes de la géométrie sont des définitions suggérées par l'expérience ».
- Jules Tannery:** « Que des idées comme celle de la droite ou du plan nous aient été suggérées par l'expérience, cela n'est pas contestable »
« Les définitions abstraites, à partir du nombre entier, des nombres fractionnaires, relatifs, imaginaires, semblent arbitraires, jusqu'à en être répugnantes. Pourquoi ces définitions plutôt que d'autres [...] ? C'est l'expérience seule qui, avant que l'on en fit la théorie abstraite, a montré la valeur de ces combinaisons ».
- Pierre Boutroux:** « C'est par une élaboration de la notion de continu tactile, par exemple, devient la notion géométrique de l'espace. C'est en vain que l'on chercherait à nier les origines roturières de la science. »

13/01/2022 D. AUBIN - LU3MA209 12

12

QU'EST-CE QUE L'« EXPÉRIENCE MATHÉMATIQUE » ?

Création vs. utilisation/application.

Structuration de l'expérience mathématique

- Par la pratique = algorithmes.
- Par la théorie = théorèmes et preuves.

Classification des mathématiques et des expériences mathématiques

- Le fait numérique : l'Arithmétique et l'Algèbre:
- Le fait spatial : la Géométrie
- Le continu et l'infini : l'Analyse
(Le hasard: probabilités et statistiques)

Des catégories qui évoluent au cours du temps.

Nos points d'entrée :
« les lieux et les acteurs des mathématiques ».

13/01/2022 D. AUBIN - LU3MA209 13

13

DÉVELOPPEMENT DES MATHÉMATIQUES

La vision eurocentrique

Une vision eurocentrique modifiée

G. G. Joseph, *The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics*, 3^e ed. (Princeton, 2011).

13/01/2022 D. AUBIN - LU3MA209 14

14

DÉVELOPPEMENT DES MATHÉMATIQUES

Une vision qui contestant l'« obscurantisme » médiéval, en faisant apparaître les connexions

→ Une histoire « connectée »

13/01/2022 D. AUBIN - LU3MA209 15

15

UNE CHRONOLOGIE DE L'EXPÉRIENCE MATHÉMATIQUE

- 1. Mathématiques « pré-euclidiennes » : de quelle expérience s'agit-il ?**
 - La préhistoire : cf. l'ethnomathématique.
 - Babylone, l'Égypte, etc.
 - Dans le monde grec : Pythagore – Thalès – Euclide – Platon
- 2. Mathématiques grecques antiques :**
 - Les philosophes et le concept de la preuve
 - D'autres cultures mathématiques ?
- 3. Le Moyen Age**
 - Les « Arabes » : les experts et l'algèbre
 - La Chrétienté occidentale : scolastique et infini.
- 4. La Renaissance et l'âge classique :**
 - Diversité des pratiques et unification des mathématiques
 - L'invention du calcul différentiel et intégral
- 5. Les Lumières :**
 - L'Académicien et le triomphe de l'analyse.
- 6. Époque contemporaine (XIX^e et XX^e siècles) :**
 - Grandes Ecoles et université
 - Recherche et industrie
 - Crises et succès.

Et les mathématiques « autres » :

- Chine, Inde, Amérique, etc.
- Quels rapports avec les autres mathématiques : l'algorithmique ?
- Néanmoins, quelques liens (le voyage du zéro, par exemple)

13/01/2022 D. AUBIN - LU3MA209 16


16

PAS DE MANUEL, MAIS DEUX RÉFÉRENCES



1 13/01/2022 D. AUBIN - LU3MA209 17

17



MATHÉMATIQUES PRÉ-EUCLIDIENNES

2 13/01/2022 D. AUBIN - LU3MA209 18

18


MATHÉMATIQUES PRÉHISTORIQUES

Préhistoire = avant l'écriture

Quelques artefacts difficiles à interpréter.

Ex: Le bâton d'**Ishango** (Congo)

- 168 encoches sur un os, regroupées systématiquement.
- Environ 25 000 ans avant aujourd'hui.
- À voir à l'Institut royal des sciences naturelles de Belgique, à Bruxelles.



2 13/01/2022 D. AUBIN - LU3MA209 19

19

L'ETHNOMATHÉMATIQUE

Approche due à l'anthropologue brésilien **Ubiratã D'Ambrosio** (né en 1932).

Définition par Leigh Wood (anthropologue):

- « Toutes les cultures sont mathématisées, dans le sens où toute culture utilise des idées mathématiques dans la vie quotidienne. »

Différences soulignées par Mariana Ferreira (SFSU) demandant à une femme xingu dans l'Amazonie:

- « Vous avez un stylo et je vous en donne un autre : combien de stylos avez-vous ? — J'ai un stylo. — Comment obtenez-vous cette réponse ? — J'ai un stylo, je n'ai pas besoin de l'autre. »

Cf. <http://www.ethnomath.org>




2 13/01/2022 D. AUBIN - LU3MA209 20

20

LE DÉFI POSÉ PAR L'ETHNOMATHÉMATIQUE À LA CONCEPTION COURANTE DES MATHÉMATIQUES

“... the question of what mathematics should be taught in mass educational systems is posed. The answer has been that it should be a **mathematics that maintains the economic and social structure, reminiscent of that given to the aristocracy** when a good training in mathematics was essential for preparing the elite (as advocated by Plato), and at the same time allows this elite to assume effective management of the productive sector. Mathematics is adapted and given a place as “scholarly practical” mathematics which we will call, from now on, “academic mathematics,” that is, the mathematics which is taught and learned in schools. In contrast to this, **we will call ethnomathematics the mathematics which is practised among identifiable cultural groups, such as national-tribal societies, labor groups, children of a certain age bracket, professional classes, and so on.** Its identity depends largely on focuses of interest, on motivation, and on certain codes and jargons which do not belong to the realm of academic mathematics. We may go even further in this concept of ethnomathematics to include much of the **mathematics which is currently practised by engineers, mainly calculus, which does not respond to the concept of rigor and formalism developed in academic courses of calculus.**... And builders and well-diggers and shack-raisers in the slums also use examples of ethnomathematics.”

— D'Ambrosio (1985); in Powell & Frankenstein (1997), p. 16.



2
13/01/2022
© AUBIN - LU3MA209
21

21

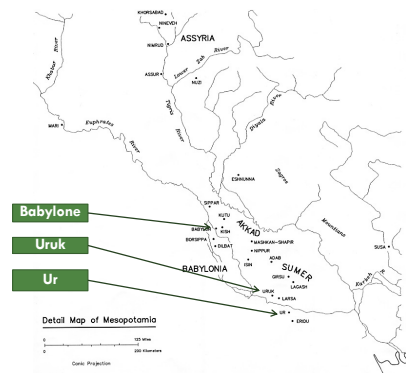
LES MÉSOPOTAMIENS

8000: premiers jetons

3500–3000: à Uruk, l'écriture, la comptabilité...

Vers 2000: Ur III, la notation sexagésimale

1600–2000: Babylone, mathématiques florissantes : multiplication, racines, puissances, problèmes algorithmiques...



2
13/01/2022
© AUBIN - LU3MA209
22

22

BABYLONE (VERS –1800)

Un système de numération **positionnel**, base 60

Attention!
Virgule flottante: $\frac{1}{2} = 30 = 900 \dots$

Trios pythagoriciens:
Tablette de **Plimpton 322**
(Univ. Columbia, NY)



$1, 57, 46, 40 = 42 \cdot 40 \cdot 00$

Table de multiplication
(Univ. of Pennsylvania Museum B6063)

Tables astronomiques

2
13/01/2022
© AUBIN - LU3MA209
23

23

LES ÉGYPTIENS

La règle de Maya
(trésorier de Toutankhamon, vers – 1330).
Dénotation des inverses de nombres entiers $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots$

Papyrus de Rhind
(vers –1650)
L'aire du cercle
Calculs d'aires et de volumes
Table de valeurs de $\frac{2}{n}$.

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$$

...


2
13/01/2022
© AUBIN - LU3MA209
24

24

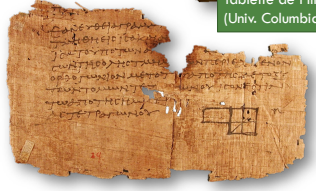
LA QUESTION DES SOURCES

Quelles sources pour quelles histoires ?
La pratique des mathématiques grecques nous est à peu près inconnue !
Très peu de source papyriques :

Les mathématiques grecques nous sont, en un sens, moins bien connues que les babyloniennes ou égyptiennes !



Tablette de Plimpton 322
(Univ. Columbia, NY)



Papyrus d'Oxyrhynque, env. 75–125 (ap. J.-C.)
(Penn Museum, Philadelphie)
Le plus vieux diagramme connu tiré des Éléments d'Euclide (II, 5).

2 13/01/2022 D. AUBIN - LU3MA209 25

25

LES SOURCES DES MATHÉMATIQUES GRECQUES

1. Les traités transmis jusqu'à nous.
2. Les « histoires » fragmentaires.
3. Autres écrits :
 - œuvre épistémologique (Platon et Aristote) ;
 - écrits antiphilosophiques (Sceptiques, Epicuriens, etc.) ;
 - témoignages variés.

2 13/01/2022 D. AUBIN - LU3MA209 26

26

TRAITÉS MATHÉMATIQUES GRECS TRANSMIS — LES « GRANDS » AUTEURS

Euclide (−3^e s.) : 8 traités.
Éléments; Données; Division des figures; Phénomènes; Division du canon; Optique; Catoptrique; Fragments « mécaniques ».

Archimède (−3^e s.) : 13 traités.
Dont Sphère et cylindre; Mesure du cercle; Quadrature de la parabole; Spirales; Arénaire; Corps flottants, etc.

Apollonius (−3^e s.) : 2 traités dont les Coniques.

Héron (+1^{er} s.) : 10 traités (surtout mécanique).
Ptolémée (+1^{er} s.) : 9 traités; dont *Almageste; Tétrabiblos; Géographie.*

Diophante (+3^e s.) : 2 traités dont *Arithmétiques.*
Pappus (+4^e s.) : 1 traité et 2 commentaires (Euclide et Ptolémée).

2 13/01/2022 D. AUBIN - LU3MA209 27

27

TRAITÉS MATHÉMATIQUES GRECS TRANSMIS — LES AUTEURS MINEURS

La « petite » astronomie.

- Autolykos; Euclide (*Phénomènes*); Aristarque (*Sur les grandeurs et les distances du soleil et de la lune*); Hypiclès; Théodose; Ménélaus.

Traité introductifs néo-pythagoricien et néo-platoniciens

- Nicomaque (*Arithmétique; Harmonie*); Théon de Smyrne; Porphyre; Jamblique; Théon d'Alexandrie; Proclus; Marinus; Dominos; Asclépios.

Textes isolés:

- Aratos (*Phénomène*); Philon; Dioclès; Hypsiclès (Livre XIV d'Euclide); Hipparque; Géminus; Diophane; Sérénus; Cléomède; Jean Philopon; Anthémios; Eutocius.

Anonymes:

- Commentaire de l'*Almageste* (+3^e s.); Intro à l'*Almageste* (+6^e s.); Livre XV d'« Euclide ».

2 13/01/2022 D. AUBIN - LU3MA209 28

28

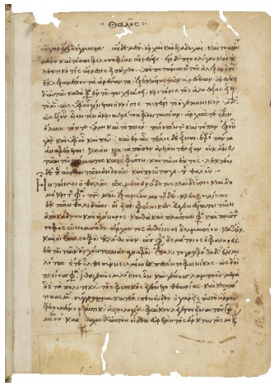
« FRAGMENTS » D'HISTOIRES

Eudème de Rhodes

- Disciple d'Aristote, 1^{er} génération.
- Auteur d'*Histoires de l'Arithmétique, de la Géométrie, et de l'Astrologie, perdues.*
- Des fragments (cf. in Proclus).

Diogène Laërce

- 3^e siècle ap. J.-C.
- Vies, doctrines et sentences des philosophes illustres.
- Souvent la seule source sur la vie des philosophes anciens.



2 13/01/2022 0. AUBIN - LU3MA209 29

29

ORIGINES DES MATHÉMATIQUES SELON EUDÈME

L'géométrie

« Puisqu'il faut examiner les débuts des arts et des sciences pour la période présente, nous disons que la géométrie a été découverte pour la première fois chez les Egyptiens, comme cela a été rapporté par beaucoup, prenant son origine dans la mesure des terrains. Celle-ci en effet leur était nécessaire pour cause de l'élevation du Nil qui rendait invisibles les bornes des propriétés de chacun d'eux.

« Et il n'y a rien d'étonnant à ce que la découverte de cette science et des autres ait pris son origine dans les besoins, car tout ce qui est soumis à la génération s'éleve de l'inachèvement à la perfection. Et donc, de la perception au raisonnement et de celui-ci à l'intelligence, la transition se produit raisonnablement... »

L'arithmétique

« De même que c'est assurément chez les Phéniciens, à cause du commerce maritime et des contrats, que la connaissance précise des nombres a débute [...]»

« Et Thalès, le premier, étant allé en Égypte, en rapportant cette étude en Hellade et, d'une part, lui-même trouva beaucoup de choses, d'autre part, il indique le point de départ de beaucoup d'autres à ses successeurs [...]»

« Après ceux-ci [Mamercos et Hippias d'Élis], Pythagore transforma l'étude de la géométrie en un schéma d'éducation libérales, en reportant l'examen de ses principes et en explorant les théorèmes immatériellement et intellectuellement, et c'est lui qui découvrit l'étude des irrationnelles et la construction des figures cosmiques. »

2 13/01/2022 0. AUBIN - LU3MA209 30

30

L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES SELON LES GRECS

Une construction idéologique

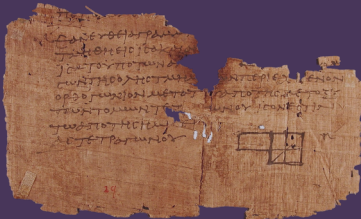
- Mathématiques pratiques chez les « Barbares ».
- Liées à la naissance de la « philosophie » chez les Grecs.
- Désintéressement; déduction; démonstration, etc.

Une pratique de l'élite

- Peu d'évidence d'une pratique de type « euclidien » avant le 5^e siècle av. J.-C. à Athènes.
- Un très petit nombre de citoyens parfois très fortunés (peut-être moins de 1000 personnes pour toute l'Antiquité!).
- Une pratique écrite (correspondance) qui s'appuie sur des diagrammes.
- Reconnaissance d'une utilité pratique (dont on se méfie parfois).
- Filiation philosophique revendiquée; une rhétorique de la conviction.

2 13/01/2022 0. AUBIN - LU3MA209 31

31



Les mathématiques euclidiennes

3 13/01/2022 0. AUBIN - LU3MA209 32

32

EUCLIDE (FL. 300 AV. NOTRE ÈRE)

Presque rien n'est connu à son propos:

- la meilleure source = les *Éléments*.


Un peu plus jeune que les élèves de Platon.

- Aurait été en contact avec l'Académie et la géométrie d'Eudoxe.

Les deux seules anecdotes le mentionnant:

- Archimède : épisode célèbre dans lequel le roi Ptolémée lui demande s'il n'existe pas une façon plus rapide d'étudier la géométrie que les *Éléments*, et on lui répond qu'il n'y a pas de « voie royale » pour la géométrie.
- Stobée (V^e s.) rapporte qu'un étudiant ayant commencé à apprendre la géométrie avec Euclide, lorsqu'il a appris son premier théorème, demande : « Qu'est-ce que ça va me rapporter d'apprendre cela ? » Euclide ordonne alors à son esclave d'offrir une obole à l'élève « puisque ce qu'il apprend doit lui rapporter quelque chose ».

Portrait fantaisiste d'Euclide, par Juste de Gand (1474)
Galleria nazionale delle Marche



3 13/01/2022 D. AUBIN - LU3MA209 33

33

L'ŒUVRE D'EUCLIDE

Autre ouvrages d'Euclide (à part les *Éléments*) :

- Données* (94 propositions): les propriétés d'une figure pouvant être déduites d'autres propriétés données. → source de l'analyse.
- Sur les divisions*: comment diviser une figure en deux parties d'aires égales.
- Optique*: premier ouvrage grec sur la perspective.
- Les Phénomènes*: introduction élémentaire à l'astronomie mathématique.

Livres d'Euclide qui ont été perdus:

- Lieux de Surface* (deux livres), *Porismes* (3 livres), *Coniques* (4 livres), *Les arguments fallacieux* et *Éléments de Musique*.

3 13/01/2022 D. AUBIN - LU3MA209 34

34


NOTE SUR LES SOURCES (BIS)

Des textes originaux des Babyloniens ont survécu; mais aucun des Grecs (L'argile est plus durable que le papyrus)

Le plus vieux manuscrit complet date de 888 (à la Bodleian Library, Oxford) (env. 1200 ans après Euclide).

Des fragments plus anciens ont été retrouvés.

Les manuscrits grecs et arabes connus dériveraient pour la plupart de la version de Théon d'Alexandrie (père d'Hypatia) au 4^e s. ap. J.-C.



3 13/01/2022 D. AUBIN - LU3MA209 35

35

NOTE SUR LES SOURCES (TER)

Tradition ancienne d'édition érudite des textes classiques :

- Federico Comandino (1509-1575)
- François Peyrard (1760-1822)

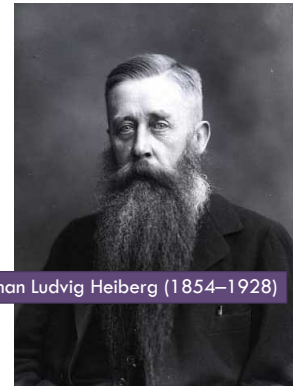
Le rôle de la philologie au 19^e siècle

- Histoire du texte, linguistique, comparaison des manuscrits, stemma codicum, apparat critique, traduction...

Heiberg, professeur de philologie classique à l'université de Copenhague, 1896-1924

- Découverte d'un texte inconnu d'Archimède en 1906
- Produit les éditions critique de Ptolémée, Apollonius, Euclide, etc.

Johan Ludvig Heiberg (1854–1928)



3 13/01/2022 D. AUBIN - LU3MA209 36

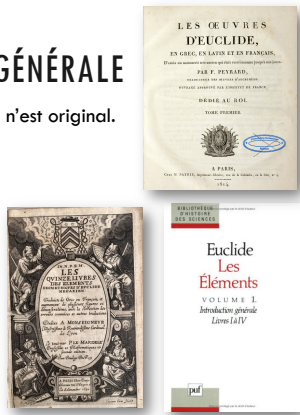
36

LES ÉLÉMENTS – PRÉSENTATION GÉNÉRALE

Compilation d'anciens résultats dont peut-être aucun n'est original.
L'organisation, elle, l'est sans aucun doute.
≠ l'ensemble des connaissances de l'époque!

Les 13 « livres » des *Éléments*.






- I à VI : les « livres plans » = géométrie plane
 - sf Livre V : les rapports et proportions.
- VII à IX : les « nombres »
 - définitions regroupées au début du livre VII.
- X : le plus long et le plus difficile sur l'in/commensurabilité.
 - les irrationnels de Théétète, la théorie des proportions d'Eudoxe.
- XI à XIII : livres « sur les solides ».
 - définitions au début du livre XI.
 - les cinq solides platoniciens (cf. *Le Timée*)

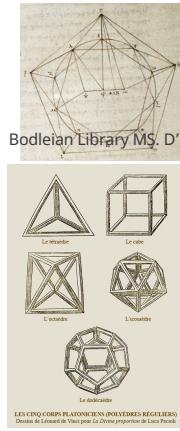


3 13/01/2022 D. AUBIN - LU3MA209 37

37

LES CINQ SOLIDES PLATONIENS

tétraèdre	4 triangles	
cube	6 carrés	
octaèdre	8 triangles	
dodécaèdre	12 pentagones	
icosaèdre	20 triangles	



Bodleian Library MS. D'Orville 301

3 13/01/2022 D. AUBIN - LU3MA209 38

38