

Cours 2

*Les mathématiques grecques :
avant et y compris Euclide*




LU3MA209
ÉLÉMENTS D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

2023-2024, 2^e période

David Aubin
david.aubin@sorbonne-université.fr

2024
D. AUBIN - LU3MA209 1


1

PROGRAMME DE LA SÉANCE

1. Les mathématiques des philosophes présocratiques
2. Athènes et mathématiques platoniciennes
3. L'école d'Alexandrie

2024
D. AUBIN - LU3MA209 2

2



LES MATHÉMATIQUES DES PHILOSOPHES PRÉSOCRATIQUES

Le mode de pensée déductif

2024
D. AUBIN - LU3MA209 3

3

LE MONDE GREC DE L'ANTIQUITÉ

Les lieux : cinq « écoles »

- Milet (Thalès)
- Crotonne (Pythagore)
- Élée (Démocrite)
- Athènes (Socrate, Platon, Aristote)
- Alexandrie (Euclide, Ptolémée)

Les dates


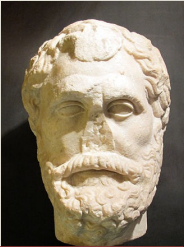
- D'où nous viennent-elles ? Que faut-il en penser ?



2024
D. AUBIN - LU3MA209 4

4

L'ÉCOLE DE MILET – THALÈS

Thalès (v. – 625 à v. – 547)

- Éclipse de Soleil de mai 585 (?)
 - La guerre entre les Mèdes et les Lydiens:

« s'étant livré bataille, le jour se changea tout à coup en nuit, pendant que les deux armées en étaient aux mains. Thalès de Milet avait prédit aux Ioniens ce changement, et il en avait fixé le temps en l'année où il s'opéra. Les Lydiens et les Mèdes, voyant que la nuit avait pris la place du jour, cessèrent le combat, et n'en furent que plus empressés à faire la paix » (Hérodote, Histoire).
- Un homme politique, ingénieur : aurait fait détourner un fleuve (toujours selon Hérodote).

Buste de Thalès, 2^e s. de notre ère, Museo dei Marmi, Florence

5

L'ÉCOLE DE MILET – L'ÉGYPTE

Thalès (v. –625 à v. –547)

- Voyage en Egypte: la hauteur d'une pyramide.

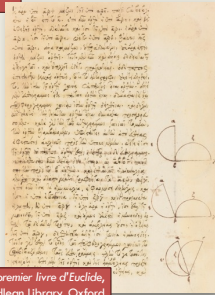
« Ainsi, vous, Thalès, le roi d'Egypte vous admire beaucoup, et [...] il a été [...] ravi de la manière dont vous avez mesuré la pyramide sans le moindre embarras et sans avoir eu besoin d'aucun instrument. Après avoir dressé votre bâton à l'extrémité de l'ombre que projetait la pyramide, vous construisîtes deux triangles par la tangence d'un rayon, et vous démontrâtes qu'il y avait la même proportion entre la hauteur du bâton et la hauteur de la pyramide qu'entre la longueur des deux ombres. » (Plutarque, Le Banquet des sept sages).
- Derrière la légende, l'histoire d'une influence ?



6

L'INVENTION DE LA PREUVE

- **Thalès** : 4 théorèmes de géométrie (selon Proclus)
 - Un cercle est bissecté par tout diamètre.
 - Les angles sur la base d'un triangle isocèle sont égaux.
 - Les angles entre deux droites qui se coupent sont égaux.
 - Deux triangles sont égaux s'ils ont deux angles et un côté égaux.
- Selon Diogène Laërce:
 - Un angle dans un demi cercle est droit.



Proclus, Commentaires sur le premier livre d'Euclide, manuscrit grec du 15^e siècle, Bodleian Library, Oxford

7

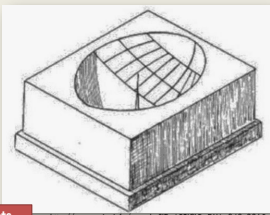
PHILOSOPHIE ET ASTRONOMIE

Thalès

- « Thalès, le fondateur de cette manière de philosopher, prend l'eau pour principe » (Aristote, Métaphysique)

Anaximandre, son disciple (– 610 à – 546)

- Astronomie: la sphère, le gnomon.
- Représentation rationnelle du monde



Le polos: un des premiers instruments d'observation astronomique

8

L'ÉCOLE DE CROTONE



Pythagore (v. -560 à v. -480).

- Chef politique, chamane, mais pas un mathématicien...



Buste de Pythagore, musée Capitolini, Rome



Milieu du XIIIe siècle, Oxford, Bodleian Library Ashmole 304 folio 42r°



Détail de l'École d'Athènes de Raphaël, 1508-1512

9

LES PYTHAGORIENS

Les nombres comme base de la philosophie.

Les rapports harmonieux et la musique.

Somme des angles d'un triangle.

« Théorème de Pythagore. »

L'irrationnel.

Les 5 solides réguliers (« platoniciens »).

Le **quadrivium**: arithmétique, géométrie, astronomie, musique. Une légende ?



Théorème de Pythagore dans les *Éléments* d'Euclide. Codex du Vatican.

10

PHILOLAOS DE CROTONE

Disciple de Pythagore, auteur du premier livre pythagoricien (v. - 400).

Raison (logos, **λογος**) et sciences mathématiques (**μαθηματα**).

Ontologie du nombre :
véritable essence et origine du monde révélateur de l'ordre cosmique et de l'harmonie du monde

Une science mathématique universelle :
porteur de vérités sur le monde physique et sur l'éternité divines, le nombre donne lieu aux sciences mathématiques unifiées dans leur principe et permettant l'accès à des vérités ultimes sur le monde


« Tout être connaissable a un nombre : sans celui-ci, on ne saurait rien concevoir ni rien connaître... Le nombre a deux formes propres, l'impair et le pair, plus une troisième produite par le mélange des deux » (fragments 4, 5, trad. Dumont).

Astronomie :

- Longueur de l'année et du mois lunaire
- Système du monde où la Terre est en mouvement autour d'un feu centra; invisible

11

ARCHYTAS DE TARENTE

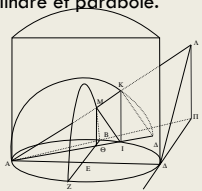


Général, philosophe pythagoricien, ami de Platon (mort en - 347)

Solution à la duplication du cube

- Intersection d'un cercle, cylindre et parabole.


La mécanique: science (épistémé) et pratique (téchné).



« L'opinion (des pythagoriciens) sur les sciences me paraît juste, et ils me semblent avoir porté un jugement exact sur l'essence de chacune d'elles. [...] De l'arithmétique, de la géométrie, de la sphérique, ils nous ont laissés des théories certaines et évidentes : il en est de même de la musique. Car toutes ces sciences paraissent être sœurs. » (Fragment 14, trad. Chaignet)

12

L'ÉCOLE D'ELÉE



Parménide
(v. 6^e–5^e s. av. notre ère)

- Législateur et médecin
- Visite à Athènes et rencontre avec Socrate ?

Zénon
(v. –490 à –425)

- Inventeur de la dialectique, selon Aristote.

Philosophie

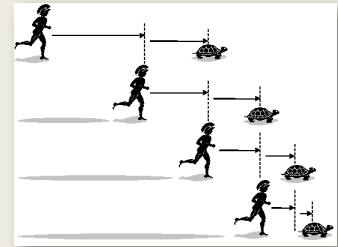
- La vérité et l'opinion (*δόξα*).
- Négation du non-être; existence (immobile) de l'être.
- Terre sphérique

Les paradoxes

- La dichotomie
- L'Achille (page suivante).
- La flèche
- Le stade.

13

ÉVITER L'INFINI?



Paradoxe d'Achille (et la tortue), selon Aristote, *Physique*:

« le plus lent à la course ne sera jamais rattrapé par le plus rapide; car celui qui poursuit doit toujours commencer par atteindre le point d'où est parti le fuyard, de sorte que le plus lent a toujours quelque avance. »

« le raisonnement de Zénon suppose à tort que les infinis ne peuvent être parcourus ou touchés chacun successivement en un temps fini. En effet la longueur et le temps, et en général tout continu, sont dits infinis en deux acceptions, soit en division, soit aux extrémités. »

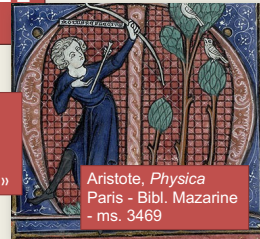
« Il semble également impossible que l'infini soit et ne soit pas, il faut évidemment en conclure qu'en un sens l'infini existe et qu'en un sens il n'existe point. »

14

INFINI ACTUEL ET POTENTIEL

Aristote, *Métaphysique*, livre 9, chap. 6 :

« on ne dit pas de l'infini qu'il est en puissance parce qu'il pourrait avoir effectivement une existence séparée et individuelle, mais seulement parce qu'il peut être conçu comme tel par la pensée. En effet, c'est parce que la division de l'infini ne peut jamais s'arrêter qu'on admet qu'un acte de ce genre est en puissance; mais ce n'est pas parce qu'il est séparé réellement »




Aristote, *Physica*
Paris - Bibl. Mazarine
- ms. 3469

Aristote, *Physique*

1. « Nul continu n'est sans partie. »
2. « L'infini se trouve donc être le contraire de ce qu'on dit: en effet, non pas ce en dehors de quoi il n'y a rien, mais ce en dehors de quoi il y a toujours quelque chose, voilà l'infini. »

15

ATHÈNES ET LES MATHÉMATIQUES



L'Académie de Platon
et le Lycée d'Aristote

16

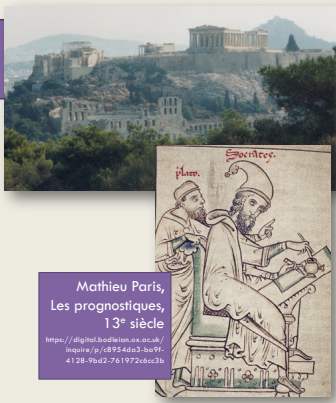
A ATHÈNES

Anaxagore (–499 à –428)

- La philosophie à Athènes.
- Explication des éclipses
- Quadrature du cercle.

Socrate (–470 à –399).

- « Connais-toi toi-même »
- Condamné à mort en – 399.



Mathieu Paris, Les prognostiques, 13^e siècle
<https://digital.bodleian.ox.ac.uk/objects/p/8954863-3a9f-4128-9b42-761972d6c3b>

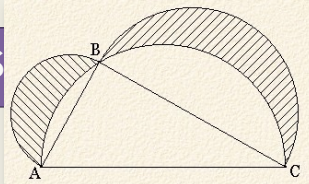
17

HIPPOCRATE DE CHIOS

Mathématicien et astronome.
 À Athènes vers – 430.

Selon Proclus, il aurait le premier écrit des *Éléments*.

Selon Eudème (via Simplicius), il résoud le problème des lunules.



Théorème :
 L'aire des deux lunules hachurées prises ensemble est égale à l'aire du triangle rectangle ABC.

18

L'ACADÉMIE DE PLATON

Platon: vers 428–348 avant notre ère.
 École philosophique fondée vers – 387 près d'Athènes (perdure jusqu'en – 86).

αγεωμέτρητος μηδεις εισιτω :

« Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre »

La maïeutique, les dialogues

- La République
- Timée



Mosaïque retrouvée à Pompéi: Platon et ses élèves

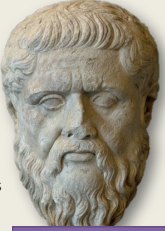
19

LA RÉPUBLIQUE DE PLATON

L'allégorie de la caverne (514 et suivants).

Mathemata: la plus grande des études non pas pour ses applications pratiques, mais pour atteindre la sagesse (504d).

- « on a parlé de l'enseignement du calcul, combien il est subtil, et utile pour nous à plus d'un titre, [...] à condition qu'on s'y applique en vue de connaître, et non en vue de commercer. » (524c-d).
- « L'art géométrique [...] est connaissance de ce qui est toujours. [...] il est propre à tirer l'âme vers la vérité, et à façonner la réflexion philosophe pour lui faire orienter vers le haut ». (527b)
- « nous étudierons l'astronomie, comme la géométrie ; et ce qui se produit dans le ciel, nous le négligerons, si nous voulons réellement, par notre fréquentation de l'astronomie, rendre utile, d'inutile qu'il était, l'élément qui dans l'âme est par nature apte à la pensée. » (531b-c)
- Avec l'harmonique, des sciences « sœurs ».



Tête de Platon, copie romaine d'après un original grec. Glyptothek Munich

20

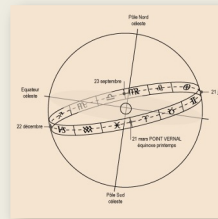
UN MODÈLE MATHÉMATIQUE DU COSMOS

« Platon pose alors ce problème aux mathématiciens: Quels sont les mouvements circulaires uniformes et parfaitement réguliers qu'il convient de prendre pour hypothèses, afin que l'on puisse **sauver les apparences** que les astres errants présentent? »
-- Simplicius, *Commentaire à la Physique d'Aristote*.

Le *Timée*

- origine de l'univers, de l'homme et de la société
- explication scientifique: une méthode, un outil.

Notion de « paradigme »



2024

D. AUBIN - LU3MA209 21

21

LA SPHÈRE DANS LE *TIMÉE*

Le Cercle:

« Quant à sa figure, il lui a donné celle qui lui convient le mieux et qui a de l'affinité avec lui. Or, au Vivant qui doit envelopper en lui-même tous les vivants, la figure qui convient est celle qui comprend en elle-même toutes les figures possibles. C'est pourquoi le Dieu a tourné le Monde en forme sphérique et circulaire, **les distances étant partout égales, depuis le centre jusqu'aux extrémités**. C'est là de toutes les figures la plus parfaite et la plus complètement semblable à elle-même. En effet, le Dieu pensait que le semblable est mille fois plus beau que le dissemblable (...).

« Je veux dire, afin que le Monde fût aussi semblable que possible au Vivant parfait et intelligible et pour imiter la substance éternelle. »

2024

D. AUBIN - LU3MA209 22

22

LES « TRIANGLES » DANS LE *TIMÉE*

« Tout animal nouvellement formé, ayant encore des **triangles** neufs et de l'espèce primitive qui sert comme de base aux autres, retient tous ces éléments dans une union puissante ; toute sa masse est tendre, étant récemment sortie de la moelle et nourrie de lait. Quand il s'assimile les **triangles** qui lui viennent du dehors, ceux dont ses aliments et ses breuvages se composent ; comme ces **triangles** sont plus vieux et plus faibles que les siens propres, il l'emporte sur eux, les dissout au moyen de ses **triangles** neufs, et l'animal grandit en se nourrissant de beaucoup d'éléments semblables aux siens. Mais quand les **triangles** primitifs perdent leur force à cause des luttes nombreuses qu'ils ont soutenues longtemps contre beaucoup d'autres **triangles**, ils ne peuvent plus diviser et transformer à leur image les **triangles** que la nourriture contient : au contraire, ils sont facilement dissous par ceux qui viennent du dehors ; alors tout l'animal cède, il dépérit, et cet état s'appelle la vieillesse. »

2024

D. AUBIN - LU3MA209 23

23

LES MATHÉMATIQUES À L'ACADÉMIE

Certains des élèves de Platon sont mathématiciens; Plusieurs *Éléments* publiés, perdus.

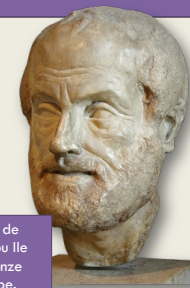
Théétète d'Athènes (vers -417 à -369).
▪ Un dialogue de Platon: théorie de la science.
▪ Théorie des irrationnels.

Eudoxe de Cnide (vers -408 à -355).
▪ Sphères concentriques en cosmologie.

▪ Théorie des proportions.
▪ Méthode d'exhaustion.

Aristote (vers -384 à 322).

Aristote. Copie romaine de période impériale (Ier ou IIe siècle ap. J.-C.) d'un bronze perdu réalisé par Lysippe. Musée du Louvre



2024

D. AUBIN - LU3MA209 24

24

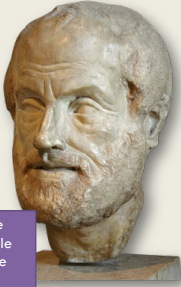
MÉTAPHYSIQUE D'ARISTOTE

« Il y a donc trois sciences théoriques, la Science mathématique, la Physique et la Théologie. »

- **Physique** comme étude des choses matérielles en mouvement.
- **Théologie**, ou philosophie, comme étude des choses immatérielles immobiles.
- **Mathématique**, située entre les deux.

Voir Ptolémée, préface de l'*Almageste*.

Aristote. Copie romaine de période impériale (1er ou 2e siècle ap. J.-C.) d'un bronze perdu réalisé par Lysippe. Musée du Louvre



25

L'ÉCOLE D'ALEXANDRIE

Euclide et les *Éléments*



26

Ancient Alexandria (1st c. B.C. - 1st c. A.D.)



ALEXANDRIE, 1^{ER} SIÈCLE

Remarquez le Musée et la Bibliothèque au centre du plan.


27

RAPPEL : EUCLIDE, LES ÉLÉMENTS

Compilation d'anciens résultats dont peut-être aucun n'est original. L'organisation, elle, l'est sans aucun doute. ≠ l'ensemble des connaissances de l'époque!

Les 13 « livres » des *Éléments*.

- I à VI: les « livres plans » = géométrie plane
 - sf Livre V: les rapports et proportions.
- VII à IX: les « nombres »
 - définitions regroupées au début du livre VII.
- X: le plus long et le plus difficile sur l'incommensurabilité.
 - les irrationnels de Theaetetus, la théorie des proportions d'Eudoxe.
- XI à XIII: livres « sur les solides ».
 - définitions au début du livre XI.
 - les cinq solides platoniciens (cf. *Le Timée*)




Détail de l'École d'Athènes de Raphaël, 1508-1512

28

EUCLIDE, LES ÉLÉMENTS (2)

Les premiers livres: la géométrie plane.
Une figure n'a que trois caractéristiques (cf. les Données)

- **position**: le fait qu'elle occupe un lieu.
- **forme**: triangles, carrés, cercles
→ d'où l'importance des relations de **similitude**.
- **taille** (ou **grandeur**).
≠ poids, couleur, dureté, mouvement, etc.

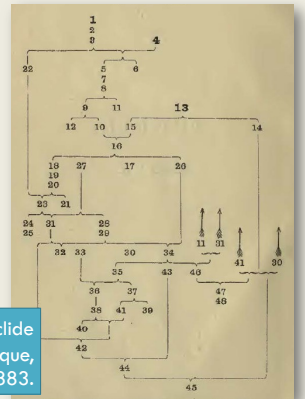


Démonstration du théorème de Pythagore, par Léonard de Vinci, Institut de France, Paris

3
2024
D. AUBIN - LU3MA209 29

29

STRUCTURE LOGIQUE DU LIVRE I



Les propositions du livre I des *Éléments* d'Euclide
arrangées dans un ordre logique,
selon Charles Dodgson [Lewis Carroll] 1883.

3
2024
D. AUBIN - LU3MA209 30

30

EUCLIDE, LES ÉLÉMENTS (3)

La géométrie plane: du plus simple au plus complexe.

- Livre I et II: triangles et parallélogrammes.
- Livres III et IV: cercles et polygones réguliers inscrits dans un cercle.

Les principales « opérations » géométriques.

- la « règle » et le « compas »
- dichotomie d'une droite, d'un angle, élévation d'une perpendiculaire, construction d'une parallèle, etc.

Les « grandeurs »: d'abord, des rapports d'égalité.

- Géométrie plane sans proportion.



Dieu géomètre, Bible du 13^e s., Bibliothèque nationale de Vienne

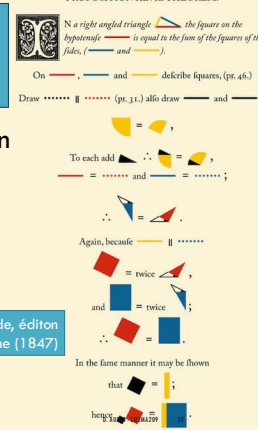
3
2024
D. AUBIN - LU3MA209 31

31

EUCLIDE, LES ÉLÉMENTS (4)

Structure de l'exposé mathématique euclidien
= un principe d'économie

- réduction des éléments considérés
- réduction des demandes et des théories utilisées.
 - Ex: les 28 premières prop. du livre I évitent le recours au postulat des parallèles.
- exhaustivité et progression.
- un seul critère: la logique.
- ≠ indications doxographiques ou historiques.




PROPOSITION XLVII. THEOREM.
In a right angled triangle the square on the hypotenuse is equal to the sum of the squares of the sides. (— and —).
On —, — and — describe squares, (pr. 46.)
Draw || (pr. 31) also draw — and —
To each add =
..... =
Again, because =
..... = twice
and = twice
..... =
In the same manner it may be shown that =
hence =
..... =
..... =

Éléments d'Euclide, édition d'Oliver Byrne (1847)

3
2024
D. AUBIN - LU3MA209 32

32

EUCLIDE, LES ÉLÉMENTS (5)



LE3MA209
Éléments d'histoire des mathématiques, année 1-2
David AUBIN (david.aubin@sorbonne-universite.fr)

— Fascicule 1 —

À voir en TD :


- Structure de l'exposé mathématique euclidien
- Les cas d'égalité des triangles
- Exemple de théorème classique : « Pythagore »
- Théorie des parallèles
- Constructions à la règle et au compas
- Notion de nombre et rapports de grandeurs
- Figures semblables
- « Aires » et « volumes » : la méthode d'exhaustion

1. Euclide, Les Éléments, éd. P. Bourdieu (1908), coll. A. Blanchard, Paris, 1932.

- Livre 1 : Définitions, données, septième proposition et Propositions 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48.
- Livre 2 : Propositions 1-14.
- Livre 3 : Définitions.
- Livre 4 : Définitions et Propositions 1-15 (et 16).
- Livre 5 : Définitions 1-11 et Propositions 1-12.
- Livre 6 : Définitions et Propositions 1-2 et 3 et 4 et 5 et 6 et 7 et 8 et 9 et 10 et 11 et 12 et 13 et 14 et 15 et 16 et 17 et 18 et 19 et 20 et 21 et 22 et 23 et 24 et 25 et 26 et 27 et 28 et 29 et 30 et 31 et 32 et 33 et 34 et 35 et 36 et 37 et 38 et 39 et 40 et 41 et 42 et 43 et 44 et 45 et 46 et 47 et 48 et 49 et 50 et 51 et 52 et 53 et 54 et 55 et 56 et 57 et 58 et 59 et 60 et 61 et 62 et 63 et 64 et 65 et 66 et 67 et 68 et 69 et 70 et 71 et 72 et 73 et 74 et 75 et 76 et 77 et 78 et 79 et 80 et 81 et 82 et 83 et 84 et 85 et 86 et 87 et 88 et 89 et 90 et 91 et 92 et 93 et 94 et 95 et 96 et 97 et 98 et 99 et 100 et 101 et 102 et 103 et 104 et 105 et 106 et 107 et 108 et 109 et 110 et 111 et 112 et 113 et 114 et 115 et 116 et 117 et 118 et 119 et 120 et 121 et 122 et 123 et 124 et 125 et 126 et 127 et 128 et 129 et 130 et 131 et 132 et 133 et 134 et 135 et 136 et 137 et 138 et 139 et 140 et 141 et 142 et 143 et 144 et 145 et 146 et 147 et 148 et 149 et 150 et 151 et 152 et 153 et 154 et 155 et 156 et 157 et 158 et 159 et 160 et 161 et 162 et 163 et 164 et 165 et 166 et 167 et 168 et 169 et 170 et 171 et 172 et 173 et 174 et 175 et 176 et 177 et 178 et 179 et 180 et 181 et 182 et 183 et 184 et 185 et 186 et 187 et 188 et 189 et 190 et 191 et 192 et 193 et 194 et 195 et 196 et 197 et 198 et 199 et 200 et 201 et 202 et 203 et 204 et 205 et 206 et 207 et 208 et 209 et 210 et 211 et 212 et 213 et 214 et 215 et 216 et 217 et 218 et 219 et 220 et 221 et 222 et 223 et 224 et 225 et 226 et 227 et 228 et 229 et 230 et 231 et 232 et 233 et 234 et 235 et 236 et 237 et 238 et 239 et 240 et 241 et 242 et 243 et 244 et 245 et 246 et 247 et 248 et 249 et 250 et 251 et 252 et 253 et 254 et 255 et 256 et 257 et 258 et 259 et 260 et 261 et 262 et 263 et 264 et 265 et 266 et 267 et 268 et 269 et 270 et 271 et 272 et 273 et 274 et 275 et 276 et 277 et 278 et 279 et 280 et 281 et 282 et 283 et 284 et 285 et 286 et 287 et 288 et 289 et 290 et 291 et 292 et 293 et 294 et 295 et 296 et 297 et 298 et 299 et 300 et 301 et 302 et 303 et 304 et 305 et 306 et 307 et 308 et 309 et 310 et 311 et 312 et 313 et 314 et 315 et 316 et 317 et 318 et 319 et 320 et 321 et 322 et 323 et 324 et 325 et 326 et 327 et 328 et 329 et 330 et 331 et 332 et 333 et 334 et 335 et 336 et 337 et 338 et 339 et 340 et 341 et 342 et 343 et 344 et 345 et 346 et 347 et 348 et 349 et 350 et 351 et 352 et 353 et 354 et 355 et 356 et 357 et 358 et 359 et 360 et 361 et 362 et 363 et 364 et 365 et 366 et 367 et 368 et 369 et 370 et 371 et 372 et 373 et 374 et 375 et 376 et 377 et 378 et 379 et 380 et 381 et 382 et 383 et 384 et 385 et 386 et 387 et 388 et 389 et 390 et 391 et 392 et 393 et 394 et 395 et 396 et 397 et 398 et 399 et 400 et 401 et 402 et 403 et 404 et 405 et 406 et 407 et 408 et 409 et 410 et 411 et 412 et 413 et 414 et 415 et 416 et 417 et 418 et 419 et 420 et 421 et 422 et 423 et 424 et 425 et 426 et 427 et 428 et 429 et 430 et 431 et 432 et 433 et 434 et 435 et 436 et 437 et 438 et 439 et 440 et 441 et 442 et 443 et 444 et 445 et 446 et 447 et 448 et 449 et 450 et 451 et 452 et 453 et 454 et 455 et 456 et 457 et 458 et 459 et 460 et 461 et 462 et 463 et 464 et 465 et 466 et 467 et 468 et 469 et 470 et 471 et 472 et 473 et 474 et 475 et 476 et 477 et 478 et 479 et 480 et 481 et 482 et 483 et 484 et 485 et 486 et 487 et 488 et 489 et 490 et 491 et 492 et 493 et 494 et 495 et 496 et 497 et 498 et 499 et 500 et 501 et 502 et 503 et 504 et 505 et 506 et 507 et 508 et 509 et 510 et 511 et 512 et 513 et 514 et 515 et 516 et 517 et 518 et 519 et 520 et 521 et 522 et 523 et 524 et 525 et 526 et 527 et 528 et 529 et 530 et 531 et 532 et 533 et 534 et 535 et 536 et 537 et 538 et 539 et 540 et 541 et 542 et 543 et 544 et 545 et 546 et 547 et 548 et 549 et 550 et 551 et 552 et 553 et 554 et 555 et 556 et 557 et 558 et 559 et 560 et 561 et 562 et 563 et 564 et 565 et 566 et 567 et 568 et 569 et 570 et 571 et 572 et 573 et 574 et 575 et 576 et 577 et 578 et 579 et 580 et 581 et 582 et 583 et 584 et 585 et 586 et 587 et 588 et 589 et 590 et 591 et 592 et 593 et 594 et 595 et 596 et 597 et 598 et 599 et 600 et 601 et 602 et 603 et 604 et 605 et 606 et 607 et 608 et 609 et 610 et 611 et 612 et 613 et 614 et 615 et 616 et 617 et 618 et 619 et 620 et 621 et 622 et 623 et 624 et 625 et 626 et 627 et 628 et 629 et 630 et 631 et 632 et 633 et 634 et 635 et 636 et 637 et 638 et 639 et 640 et 641 et 642 et 643 et 644 et 645 et 646 et 647 et 648 et 649 et 650 et 651 et 652 et 653 et 654 et 655 et 656 et 657 et 658 et 659 et 660 et 661 et 662 et 663 et 664 et 665 et 666 et 667 et 668 et 669 et 670 et 671 et 672 et 673 et 674 et 675 et 676 et 677 et 678 et 679 et 680 et 681 et 682 et 683 et 684 et 685 et 686 et 687 et 688 et 689 et 690 et 691 et 692 et 693 et 694 et 695 et 696 et 697 et 698 et 699 et 700 et 701 et 702 et 703 et 704 et 705 et 706 et 707 et 708 et 709 et 710 et 711 et 712 et 713 et 714 et 715 et 716 et 717 et 718 et 719 et 720 et 721 et 722 et 723 et 724 et 725 et 726 et 727 et 728 et 729 et 730 et 731 et 732 et 733 et 734 et 735 et 736 et 737 et 738 et 739 et 740 et 741 et 742 et 743 et 744 et 745 et 746 et 747 et 748 et 749 et 750 et 751 et 752 et 753 et 754 et 755 et 756 et 757 et 758 et 759 et 760 et 761 et 762 et 763 et 764 et 765 et 766 et 767 et 768 et 769 et 770 et 771 et 772 et 773 et 774 et 775 et 776 et 777 et 778 et 779 et 780 et 781 et 782 et 783 et 784 et 785 et 786 et 787 et 788 et 789 et 790 et 791 et 792 et 793 et 794 et 795 et 796 et 797 et 798 et 799 et 800 et 801 et 802 et 803 et 804 et 805 et 806 et 807 et 808 et 809 et 810 et 811 et 812 et 813 et 814 et 815 et 816 et 817 et 818 et 819 et 820 et 821 et 822 et 823 et 824 et 825 et 826 et 827 et 828 et 829 et 830 et 831 et 832 et 833 et 834 et 835 et 836 et 837 et 838 et 839 et 840 et 841 et 842 et 843 et 844 et 845 et 846 et 847 et 848 et 849 et 850 et 851 et 852 et 853 et 854 et 855 et 856 et 857 et 858 et 859 et 860 et 861 et 862 et 863 et 864 et 865 et 866 et 867 et 868 et 869 et 870 et 871 et 872 et 873 et 874 et 875 et 876 et 877 et 878 et 879 et 880 et 881 et 882 et 883 et 884 et 885 et 886 et 887 et 888 et 889 et 890 et 891 et 892 et 893 et 894 et 895 et 896 et 897 et 898 et 899 et 900 et 901 et 902 et 903 et 904 et 905 et 906 et 907 et 908 et 909 et 910 et 911 et 912 et 913 et 914 et 915 et 916 et 917 et 918 et 919 et 920 et 921 et 922 et 923 et 924 et 925 et 926 et 927 et 928 et 929 et 930 et 931 et 932 et 933 et 934 et 935 et 936 et 937 et 938 et 939 et 940 et 941 et 942 et 943 et 944 et 945 et 946 et 947 et 948 et 949 et 950 et 951 et 952 et 953 et 954 et 955 et 956 et 957 et 958 et 959 et 960 et 961 et 962 et 963 et 964 et 965 et 966 et 967 et 968 et 969 et 970 et 971 et 972 et 973 et 974 et 975 et 976 et 977 et 978 et 979 et 980 et 981 et 982 et 983 et 984 et 985 et 986 et 987 et 988 et 989 et 990 et 991 et 992 et 993 et 994 et 995 et 996 et 997 et 998 et 999 et 1000.

33

EUCLIDE: DÉFINITIONS




LE3MA209
Éléments d'histoire des mathématiques, année 1-2
David AUBIN (david.aubin@sorbonne-universite.fr)

LIVRE I:

Première édition imprimée des Éléments (Venise 1482).


<https://digital.bodleian.ox.ac.uk/inquire/p/775772b-2-ncf0-4268-b46e-7446b033eaf5>



1. **Le point est ce dont la partie est nulle.**
2. **Une ligne est une longueur sans largeur.**
3. **Les extrémités d'une ligne sont des points.**
4. **La ligne droite est celle qui est également placée entre ses points.**

34

EUCLIDE: LES DEMANDES



LE3MA209
Éléments d'histoire des mathématiques, année 1-2
David AUBIN (david.aubin@sorbonne-universite.fr)


— Fascicule 1 —

LIVRE I: DEMANDES.

1. Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque.
2. Prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie.
3. D'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence de cercle.
4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.
5. Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.
6. Deux droites ne renferment point un espace.

35

EUCLIDE: LES NOTIONS COMMUNES



LE3MA209
Éléments d'histoire des mathématiques, année 1-2
David AUBIN (david.aubin@sorbonne-universite.fr)

— Fascicule 1 —

LIVRE I: NOTIONS COMMUNES.

1. Les grandeurs égales à une même grandeur, sont égales entre elles.
2. Si à des grandeurs égales, on ajoute des grandeurs égales, les tous seront égaux.
3. Si de grandeurs égales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront égaux.
4. Si à des grandeurs inégales, on ajoute des grandeurs égales, les tous seront inégaux.
5. Si de grandeurs inégales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront inégaux.
6. Les grandeurs, qui sont doubles d'une même grandeur, sont égales entre elles.
7. Les grandeurs, qui sont les moitiés d'une même grandeur, sont égales entre elles.
8. Les grandeurs, qui s'adaptent entre elles, sont égales entre elles.
9. Le tout est plus grand que la partie.

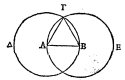
36

LA PREUVE

LIVRE I:

1. ÉNONCÉ
2. EXPOSITION
3. DÉTERMINATION
4. CONSTRUCTION
5. FIGURE
6. DÉMONSTRATION
7. CONCLUSION

Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral.
EXPOSITION. Soit AB une droite donnée et finie.
DÉTERMINATION. Il faut construire sur la droite finie AB un triangle équilatéral.
CONSTRUCTION. Du centre A et de l'intervalle AB, décrivons la circonférence BA (dem. 3); et de plus, du centre B et de l'intervalle BA, décrivons la circonférence AB; et du point F, où les circonférences se coupent mutuellement, conduisons aux points A, B les droites FA, FB (dem. 1).



DÉMONSTRATION. Car, puisque le point A est le centre du cercle BA, la droite AF est égale à la droite AB (def. 15); de plus, puisque le point B est le centre du cercle AB, la droite BF est égale à la droite BA; mais on a démontré que la droite FA était égale à la droite AB; donc chacune des droites FA, FB est égale à la droite AB; or, les grandeurs qui sont égales à une même grandeur, sont égales entre elles (not. 1); donc la droite FA est égale à la droite FB; donc les trois droites FA, AB, BF sont égales entre elles.
CONCLUSION. Donc le triangle ABF (def. 24) est équilatéral, et il est construit sur la droite donnée et finie AB. Ce qu'il fallait faire.

37

EUCLIDE: RAPPORTS ET PROPORTIONS

LIVRE V:

D É F I N I T I O N S.

1. Une grandeur est partie d'une grandeur, la plus petite de la plus grande, quand la plus petite mesure la plus grande.
2. Une grandeur plus grande est multiple d'une grandeur plus petite, quand la plus grande est mesurée par la plus petite.
3. Une raison, est certaine manière d'être de deux grandeurs homogènes entr'elles, suivant la quantité.
4. Une proportion est une identité de raisons.

NB. « raison » = λογος (logos)

38

EUCLIDE: LES NOMBRES

LIVRE VII:

D É F I N I T I O N S.

1. L'unité est ce selon quoi chacune des choses existantes est dite une.
2. Un nombre est un assemblage composé d'unités.
3. Un nombre est une partie d'un nombre, le plus petit du plus grand, lorsque le plus petit mesure le plus grand.
4. Un nombre est parties d'un nombre, quand il ne le mesure pas.
5. Un nombre est multiple d'un nombre, le plus grand du plus petit, quand il est mesuré par le plus petit.
6. Le nombre pair est celui qui peut se partager en deux parties égales.
7. Le nombre impair est celui qui ne peut pas se partager en deux parties égales, ou bien celui qui diffère d'une unité du nombre pair.

39

EUCLIDE: LES « IRRATIONNELS »

LIVRE X:

1. On appelle grandeurs commensurables celles qui sont mesurées par la même mesure.
2. Et incommensurables, celles qui n'ont aucune mesure commune.

5. Ces choses étant supposées, on a démontré qu'une droite proposée a une infinité de droites qui lui sont incommensurables, non seulement en longueur, mais encore en puissance. On appellera rationnelle la droite proposée.
6. On appellera aussi rationnelles les droites qui lui sont commensurables, soit en longueur et en puissance, soit en puissance seulement.
7. Et irrationnelles, celles qui lui sont incommensurables.

40

EUCLIDE : LES LIVRES « SOLIDES »

LIVRE XI À XIII: Dessins de Léonard de Vinci, dans *La Divine Proportion*, de Luca Pacioli

La méthode d'exhaustion **Les solides platoniciens**

Vatican Gr. 190 Bodleian Library MS. D'Orville 301

2024 D. AUBIN - LU3MA209 41

41

CE QUI N'EST PAS DANS EUCLIDE

Les trois grands problèmes des mathématiques grecques

- Quadrature du cercle (Artémon de Clazomènes, vers -435).
- Duplication du cube (Hippocrate de Chios, vers -430).
- Trisection de l'angle (Hippias d'Elis, vers -425).

Mathématiques avancées:

- Archimède, Apollonius et Diophante.

Les mathématiques « pratiques »

- Astronomie et musique; optique et mécanique
- Numération; architecture; etc.

Coniques d'Apollonius, manuscrit du 16^e s., Vat. Barb.gr.237

2024 D. AUBIN - LU3MA209 42

42