



Cours 3

Les mathématiques grecques :
au-delà d'Euclide

LU3MA209
ÉLÉMENTS D'HISTOIRE DES
MATHÉMATIQUES

2023-2024, 2^e période

David Aubin
david.aubin@sorbonne-université.fr

2024

D. AUBIN - LU3MA209 1

1

RAPPEL : CE QUI N'EST PAS DANS LES *ELÉMENTS* D'EUCLIDE

Les trois grands problèmes des mathématiques grecques

- Quadrature du cercle.
- Duplication du cube.
- Trisection de l'angle.

Mathématiques avancées:

- Archimède, Apollonius et Diophante.

Les mathématiques « pratiques »

- Astronomie et musique; optique et mécanique
- Numération ; architecture ; etc.

« Eratosthène, dans le livre qui a pour titre le *Platonicien*, rapporte que les Déliens ayant interrogé l'oracle sur le moyen de se délivrer de la peste, le dieu leur ordonna de construire un autel double de celui qui existait déjà. Ce problème jeta les architectes dans un étrange embarras. Ils se demandaient comment on peut faire un solide double d'un autre. Ils interrogèrent Platon sur la difficulté. Celui-ci leur répondit que le dieu avait ainsi rendu l'oracle, non qu'il eût aucun besoin d'un autel double, mais pour reprocher aux Grecs de négliger l'étude des mathématiques et de faire peu de cas de la géométrie ». [Théon de Smyrne, *Philosophe platonicien*.]

2024

D. AUBIN - LU3MA209 2

2


PROGRAMME DE LA SÉANCE

1. D'autres cultures mathématiques?
2. Euclide, Archimède et leurs contemporains
3. Sciences mathématiques au début de notre ère: Ptolémée et Héron – Astronomie, musique, mécanique
4. Mathématiques de l'Antiquité tardive: l'exemple de Pappus – 3 grands problèmes

2024

D. AUBIN - LU3MA209 3

3



D'AUTRES CULTURES
MATHÉMATIQUES ?

2024

D. AUBIN - LU3MA209 4

4

TUNNEL D'EUPALINOS



Eupalinos, Samos, 6^e siècle av. notre ère.

Le célèbre historien Hérodote:

- « Je me suis d'autant plus étendu sur les Samiens, qu'ils ont exécuté trois des plus grands ouvrages qu'il y ait dans toute la Grèce. On voit à Samos une montagne de cent cinquante orgyes de haut. On a percé cette montagne par le pied, et l'on y a pratiqué un chemin qui a deux bouches en ouverture. [...] L'architecte qui a entrepris cet ouvrage était de Mégare et s'appelait Eupalinos ».

Tunnel de plus de 1000 mètres de long creusé simultanément aux deux bouts: une erreur minime au point de jonction.

Quelles techniques mathématique?

5

PLUSIEURS CULTURES MATHÉMATIQUES ?

Les traités = un « iceberg » ?


- L'abaque occidental = les « calculateurs ».
- Des professionnels (commerce, construction, etc.)
- Archéologie, témoignages, dans les traités néo-pythagoriciens (Nicomaque, Jamblique)
- Arpenteurs : « tireurs de corde »
- Mesure d'aires et de volumes
- Des papyrus, mais totalement absents les traités mathématiques.



6

LE PAPYRUS DE VIENNE (1^{ER} SIÈCLE DE NOTRE ÈRE)

« A propos des pierres et des choses nécessaires à la construction d'une maison, tu mesureras le volume selon les règles du géomètre comme suit: la pierre a 5 pieds partout. Fais 5 × 5 ! Cela fait 25. Il s'agit de l'aire de la surface. Multiplie ceci par 5 pour la hauteur. Cela fait 125. La pierre aura autant de pieds et est appelée cube. »



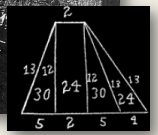
7

PAPYRUS D'AYER (CHICAGO)

Edgar J. Goodspeed, "The Ayer Papyrus," *The American Mathematical Monthly*, Vol. 10, No. 5 (May, 1903), pp.133-135.

Calcul de l'aire d'un trapèze:

« Soit donné un trapèzoïde scalène tel que celui dessiné plus bas, selon les conditions du problème, le 13 au carré égale 169, et le 15 au carré égale 225. Retirer le 169; le reste est 56. Retirer le 2 du côté supérieur du 16 de la base; le reste est 14. Prendre 1/14 de 56; c'est 4. Cela retiré du 14 laisse 10. La moitié de ceci laisse 5. La moitié de ceci égale 5. Ceci au carré égale 25. Retirer ceci du 169; le reste est 144, dont la racine est 12. Ceci par le 5 de la base égale 60, dont la moitié est 30; de tant d'acres est la surface de chacun des triangles rectangles. Et le 12 par le 2 du côté supérieur égale 24; de tant d'acres est le rectangle intérieur. Et le 12 multiplié par le 4 de la base égale 48; dont la moitié est 24; de tant d'acres est le triangle obtusangle. Suit la figure: »

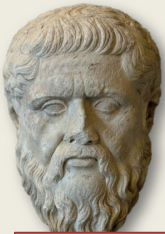


8

DEUX ARITHMÉTIQUES ?

Platon, *Philèbe*

« Ne doit-on pas reconnaître qu'il y a une **arithmétique pour le vulgaire et une autre propre aux philosophes** ? [...] Car les uns font entrer dans le même calcul des unités numériques inégales, par exemple, deux armées, deux boeufs, les deux unités les plus petites et les deux unités les plus grandes de toutes, tandis que les autres refusent de les suivre, si l'on n'admet pas que, dans le nombre infini des unités, il n'y a aucune unité qui diffère d'aucune autre unité [...] L'art de calculer et de mesurer dans l'architecture et le commerce ne diffère-t-il pas de la géométrie et des calculs qu'élaborent les philosophes ? »



Tête de Platon, copie romaine d'après un original grec. Glyptothek Munich

2024 D. AUBIN - LU3MA209 9

9

TROIS SCIENCES DES NOMBRES

L'**arithmétique** = la nature des nombres
 La **logistique** = le calcul à l'aide des nombres

- Les calculs se font à l'aide d'un abaque

La **numération** = la représentation des nombres.

- Deux systèmes de numération chez les Grecs:
 - Le système archaïque de l'Attique
 - Le système ionien: ce système ne permet pas de faire des calculs.

1	5	10	50	100	500	1 000	5 000	10 000	50 000
iota	digamma	decagramma	hexagramma	pentagrammaton	khattai	pentakhattai	musei	pentamusei	
α'	β'	γ'	δ'	ε'	Ϝ'	ζ'	η'	θ'	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
ι'	κ'	λ'	μ'	ν'	ξ'	ο'	π'	Ϙ'	
10	20	30	40	50	60	70	80	90	
ρ'	σ'	τ'	υ'	φ'	χ'	ψ'	ω'	ϝ'	
100	200	300	400	500	600	700	800	900	
α''	β''	γ''	δ''	ε''	Ϝ''	ζ''	η''	θ''	
1 000	2 000	3 000	4 000	5 000	6 000	7 000	8 000	9 000	

2024 D. AUBIN - LU3MA209 10


10

LOGISTIQUE ET ABAQUE


La logistique est **téchné**: l'art de faire des calculs avec les nombres.

L'**abaque occidental** est différent du boulier (= l'abaque oriental)

Mode de calcul en vigueur jusqu'à la Renaissance en Europe.



Détail du vase de Darius (provenant de Canossa) Vers - 350. Museo Archeologico Nazionale, Naples



2024 D. AUBIN - LU3MA209 11

11

CONNAÎTRE PLUTÔT QUE TRAFIQUER

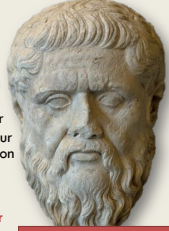
Platon, *La République*

SOCRATE: l'étude [de la logistique et de l'arithmétique] est nécessaire au **guerrier** pour ranger une armée, et au **philosophe** pour sortir de la sphère du devenir et atteindre l'essence. [...] Il conviendrait donc, Glaucon, de prescrire cette étude par une loi, et de persuader à ceux qui doivent remplir les plus hautes fonctions publiques de se livrer à la science du calcul, non pas superficiellement, mais jusqu'à ce qu'ils arrivent, par la pure intelligence, à connaître la **nature des nombres**; et de cultiver cette science non pas pour la faire servir aux ventes et aux achats, comme les négociants et les marchands, mais pour l'appliquer à la guerre, et pour faciliter la conversion de l'âme du monde de la génération vers la vérité et l'essence [...].

S: Et j'aperçois maintenant [...] combien [la science des nombres] est belle et utile, sous bien des rapports, à notre dessein, à condition qu'on l'étudie **pour connaître et non pour trafiquer**.

G: Qu'admires-tu donc si fort en elle?

S: Ce pouvoir, dont je viens de parler, de donner à l'âme un vigoureux élan vers la région supérieure, et de l'obliger à **raisonner sur les nombres en eux-mêmes**, sans jamais souffrir qu'on introduise dans ses raisonnements des nombres visibles et palpables.



Tête de Platon, copie romaine d'après un original grec. Glyptothek Munich

2024 D. AUBIN - LU3MA209 12

12

MATHÉMATIQUE PRATIQUE VS. THÉORIQUE

Énoncés algorithmiques = des « recettes ».	Énoncés démonstratifs = des « preuves » qui n'expliquent pas comment on la trouve.
Liés à des activités pratiques et commerciales.	Liés à la philosophie. Désintéressés: un outil de « distinction » sociale ?
Hérités des traditions moyen-orientales (babyloniennes et égyptiennes).	Originaux à la « Grèce » antique: nés à Athènes, chez Thalès ou Pythagore ?
Institutionnalisés: des traditions corporatives.	Peu ou pas institutionnalisés? Communication passant par l'écrit; enseignement classique basique.

Des figures géométriques utilisant les lettres;
Un langage standardisé et impersonnel;
Des mots et procédures communes.

2024D. AUBIN - LU3MA209 13

13

VESTIGE D'UNE CULTURE HYBRIDE ?

La machine d'Anticythère :
datée de - 150 à - 100 env.

Découverte en 1900, aujourd'hui au Musée archéologique d'Athènes.

Une machine sophistiquée pour calculer le mouvement des planètes de manière analogique.

- Plus de 30 roues dentées en bronze.
- Un modèle des cycles solaires et lunaires (avant Hipparque) ?



<http://www.antikythera-mechanism.gr/>

2024D. AUBIN - LU3MA209 14

14

EUCLEIDE, ARCHIMÈDE ET LEURS CONTEMPORAINS



2024D. AUBIN - LU3MA209 15

15

LES DONNÉES D'EUCLIDE

En grec, *Data*.

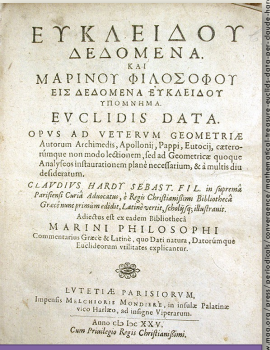
Seul autre ouvrage connu par un texte grec.

Géométrie plane traitée par le biais de l'analyse.

12 définitions et 94 propositions.

« donné en position, en forme, en grandeur ».

« 39. Si tous les côtés d'un triangle sont donnés en grandeur, le triangle est donné en forme »



Édition grecque des *Data* d'Euclide, par Claude Hardy (1525)

http://www.ancientlibrary.com/ancientlibrary/mathematics/euclid/data-german-1525.html

2024D. AUBIN - LU3MA209 16

16

OUVRAGES PERDUS D'EUCLIDE

Ils sont décrits par Pappus d'Alexandrie (4^e s. de notre ère)

De la division des figures.

- Manuscrit arabe de 36 propositions, 4 preuves.
- Par exemple: construire une droite passant par un point à l'intérieur d'un triangle découpant le triangle en deux figures de même surface.

Les Pseudarias : arguments fallacieux.

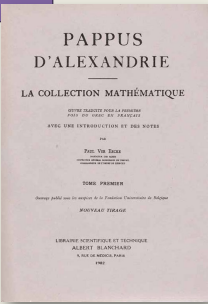
Les Coniques : complété par Apollonius.

Les Porismes : énoncé entre théorèmes et problèmes.

- 171 porismes, selon Pappus.

Les lieux rapportés à la surface.

- Décrit vaguement par Pappus, contenu peu clair.



2024 D. AUBIN - LU3MA209 17

17

« MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES » PAR EUCLIDE

Les Phénomènes

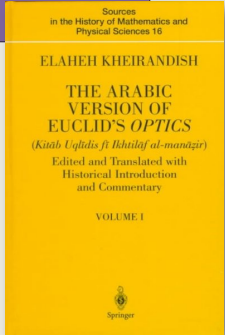
- Géométrie de la sphère pour utilisation en astronomie.

Optique

- Ouvrage conservé en grec en plusieurs versions.
- Traité de perspective.

Musique

- Deux petits écrits conservés en grec, mais attribution contestée.



2024 D. AUBIN - LU3MA209 18

18

LA GÉNÉRATION SUIVANT EUCLIDE

Erathostène (v. -276 à -194).

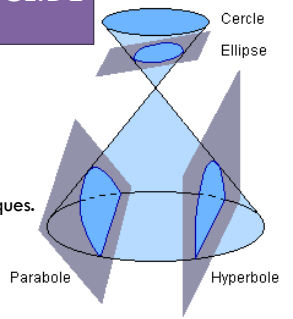
- Mesure de la terre.
- Duplication du cube résolue mécaniquement.

Apollonius (v. -262 à -190).

- Les Coniques: le problème des tangentes aux coniques.
- Des figures utiles pour l'astronomie?

Archimède (v. -287 à -212).

- Une grande œuvre mathématique



Cercle
Ellipse
Parabole
Hyperbole

2024 D. AUBIN - LU3MA209 19

19

ARCHIMÈDE (v. -287 à v. -212)

Mort à l'occasion de la prise de Syracuse par les Romains.


Plusieurs auteurs racontent cet épisode de sa vie.

- Polybe (2^e s. av. J.-C.), Vitruve (1^{er} s. av. J.-C.), Cicéron, Tite-Live (59 av. J.-C.-17 ap. J.-C.), Plutarque (1^{er} s. ap. J.-C.).

Les images du géomètre:

L'« ingénieur-mathématicien » (Polybe):

« Telle était la puissance d'un seul homme; tel était le pouvoir de son génie. Avec des forces de terre et de mer aussi considérables, la ville, à la première attaque, tomberait au pouvoir des Romains [...]. Archimède est dans ses murs, et ils n'osent même pas en approcher. »



Mosaïque datant de la Renaissance représentant la mort d'Archimède

Le savant distrait (Cicéron) :

« De quelle ardeur Archimède ne devait-il pas être enflammé, lui qui, occupé à décrire certaines figures, ne s'aperçut pas même que sa Patrie était au pouvoir des Romains? »

2024 D. AUBIN - LU3MA209 20

20

ARCHIMÈDE: LES SOURCES

Ses traités

- De la Sphère et du Cylindre,
- De la Mesure du Cercle,
- Des Conoïdes et des Sphéroïdes,
- Des Hélices, De l'Équilibre des Plans,
- De la Quadrature de la Parabole,
- L'Arénaire, Des Corps portés sur un fluide,
- De la Méthode et les Lemmes.


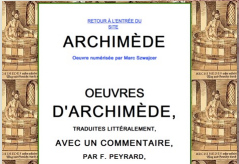
Les sources:

- Première compilation par Isidore de Milet (vers 530).
- Commentaires d'Eutocius (600).
- Le Palimpseste 1906–1998

Disponibles en ligne: <http://remacle.org>

OEUVRES D'ARCHIMÈDE, TRADUITES LITTÉRALEMENT, AVEC UN COMMENTAIRE, PAR F. PEYRARD.

<http://www.archimedespalimpsest.org/>

21

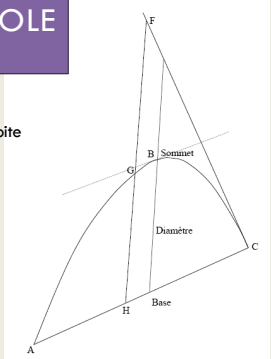
QUADRATURE DE LA PARABOLE

Archimède (3^e s. av. J.-C.)

Théorème: « Un segment quelconque compris par une droite et par une parabole, est égal à quatre fois le tiers d'un triangle qui a la même base et la même hauteur que ce segment ».

Propriétés de la parabole (Euclide, Les coniques, livre perdu; Apollonius de Perga, Les coniques)

- Tangente au sommet parallèle à la base.

$$\frac{FH}{GH} = \frac{AC}{AH}$$


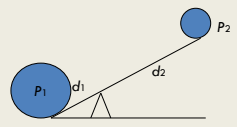
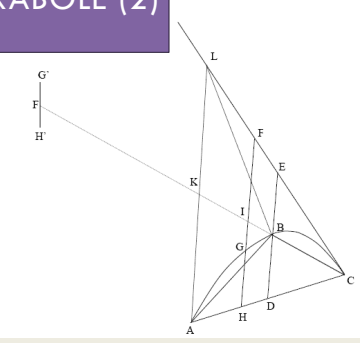
22

QUADRATURE DE LA PARABOLE (2)

Méthode mécanique.

- « certaines choses me sont apparues clairement par la méthode mécanique, bien que j'aie dû les démontrer géométriquement ensuite. »

La loi des leviers: $P_2 d_2 = P_1 d_1$

23

QUADRATURE DE LA PARABOLE (3)

Méthode mécanique:

par construction, $F'K = CK$

et on a:

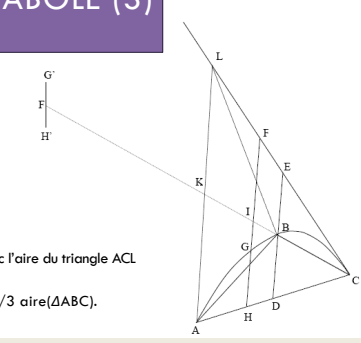
- $CA:AH = FH:HG$ (parabole)
- $CA:AH = CK:KI$ (Thalès)
- $HG = H'G'$ (en remplaçant la parabole en F')

d'où $FH:H'G' = F'K:KI$.

C'est-à-dire:

- Aire de la parabole ABC placée en F' est en équilibre avec l'aire du triangle ACL placée en son centre de gravité = $KC/3 = F'K/3$.

Donc aire de la parabole ABC = $1/3$ aire(Δ ACL) = $4/3$ aire(Δ ABC).



24

QUADRATURE DE LA PARABOLE (4)

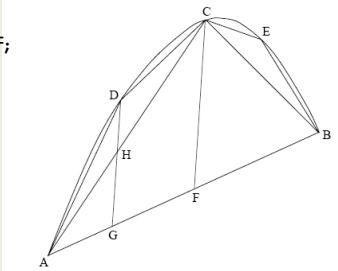
Méthode d'exhaustion:
 par construction: $AF = BF, AG = GF, DG \parallel CF$;

on a

- $HG = 2DH$ (parabole)
- $CF = 4DH$ et $AH = CH$ (Thalès).

Donc

- $\text{aire}(\triangle ADH) = 4 \text{aire}(\triangle AGD)$
- $\text{aire}(\triangle ACF) = 4 \text{aire}(\triangle ACD)$



D. AUBIN - LU3MA209 25

25

QUADRATURE DE LA PARABOLE (5)

Méthode d'exhaustion:

Une série géométrique:

- $P_n \equiv [1 + 1/4 + (1/4)^2 + \dots + (1/4)^n] \text{aire}(\triangle ABC) = [4/3 - (1/3)(1/4)^n] \text{aire}(\triangle ABC)$
 $\rightarrow (4/3) \text{aire}(\triangle ABC) \equiv T.$

pour éviter le passage à l'infini:

- Soit $S = \text{aire de la parabole ABC}$ et $T = 4/3 \text{aire}(\triangle ABC)$.
- Supposons $S > T$, on pourra trouver un polygone dont l'aire P_n est telle que $T < P_n < S$ (mais $P_n < T$ par déf.).
- Supposons $S < T$, soit $e = T - S$; on trouve n tel que $(1/4)^n \text{aire}(\triangle ABC) < e$. Alors $T = [1 + 1/4 + (1/4)^2 + \dots + (1/4)^n + (1/3)(1/4)^n] \text{aire}(\triangle ABC) < P_n + e$, ce qui entraîne $P_n > S$ (puisque $T = S + e$).

Donc $S = T$.

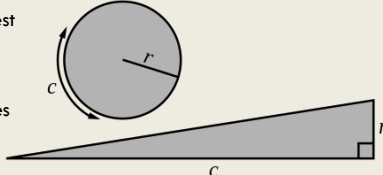
D. AUBIN - LU3MA209 26

26

ARCHIMÈDE: QUADRATURE DU CERCLE

De la mesure du cercle

1. Un cercle quelconque est égal à un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est égal au rayon de ce cercle, et dont l'autre côté de l'angle droit est égal à la circonférence de ce même cercle.
2. La circonférence d'un cercle quelconque est égale au triple du diamètre, réuni à une certaine portion du diamètre, qui est plus petite que le septième de ce diamètre et plus grande que les dix soixante-onzièmes de ce même diamètre.

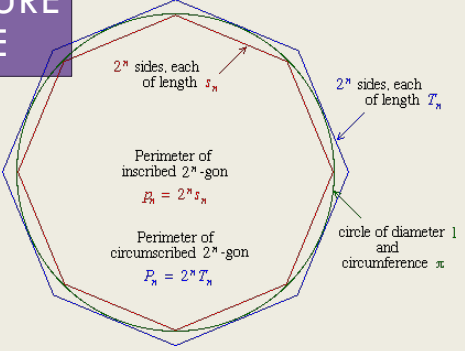


$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$

D. AUBIN - LU3MA209 27

27

QUADRATURE DU CERCLE

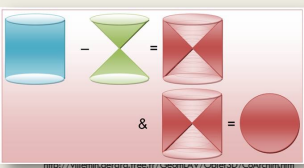


$P_n = 2^n s_n$
 Perimeter of inscribed 2^n -gon
 $P_n = 2^n t_n$
 Perimeter of circumscribed 2^n -gon
 circle of diameter 1 and circumference π

D. AUBIN - LU3MA209 28

28

ARCHIMÈDE: LA SPHÈRE ET LE CYLINDRE



1. La surface d'un cylindre droit quelconque, la base exceptée, est égale à un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre le côté du cylindre et le diamètre de sa base.
2. La surface d'un cône droit quelconque, la base exceptée, est égale à un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre le côté du cône et le rayon du cercle qui est la base du cône.
3. La surface d'une sphère quelconque est quadruple d'un de ses grands cercles.
4. Une sphère quelconque est quadruple d'un cône qui a une base égale à un grand cercle de cette sphère, et une hauteur égale au rayon de cette même sphère.
5. Ces choses étant démontrées, il est évident que tout cylindre qui a une base égale à un grand cercle d'une sphère, et une hauteur égale au diamètre de cette sphère, est égal à trois fois la moitié de cette sphère, et que la surface de ce cylindre, les bases étant comprises, est aussi égale à trois fois la moitié de la surface de cette même sphère, etc.

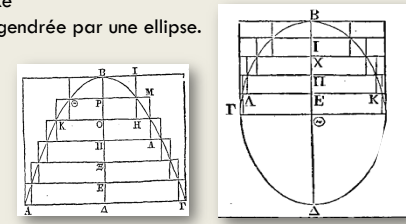
D. AUBIN - LU3MA209 29

29

ARCHIMÈDE: LES FIGURES MÉCANIQUES

Des conoïdes et des sphéroïdes

- Conoïde = figure de révolutions engendrées par une parabole ou une hyperbole tournant autour de son axe
- Sphéroïde = figure de révolution engendrée par une ellipse.



<http://remacle.org/bloodwolf/erudits/archimede/conoides.htm>

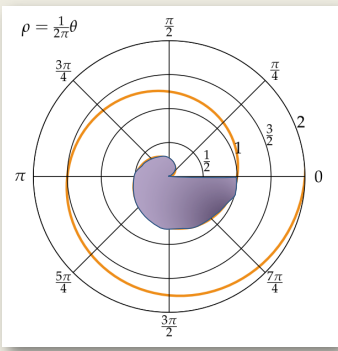
D. AUBIN - LU3MA209 30

30

LA SPIRALE D'ARCHIMÈDE

Aire de la figure, calculable rigoureusement?

Si une ligne droite, une de ses extrémités restant immobile, tourne dans un plan avec une vitesse uniforme jusqu'à ce qu'elle soit revenue au même endroit d'où elle avait commencé à se mouvoir, et si un point se meut avec une vitesse uniforme dans la ligne qui tourne, en partant de l'extrémité immobile, ce point décrira une hélice dans un plan; la surface qui est comprise par l'hélice, et par la ligne droite revenue au même endroit d'où elle avait commencé à se mouvoir, est la troisième partie d'un cercle qui a pour centre le point immobile, et pour rayon la partie de la ligne droite qui a été parcourue par le point dans une seule révolution de la droite.



D. AUBIN - LU3MA209 31

31

ARCHIMÈDE: LES GRANDS NOMBRES

De l'équilibre des plans

- Le centre de gravité d'un triangle quelconque est le point où se coupent mutuellement des droites menées des angles du triangle aux milieux des côtés.

L'Arénaire

- le nombre des grains de sable contenus dans la sphère des étoiles fixes, serait au-dessous de 1 suivi de 63 zéros, le diamètre des étoiles fixes étant de 10,000,000,000 stades; la stade étant de 10,000 doigts, et une sphère dont serait la quarantième partie d'un doigt, contenant 64,000 grains de sable.
- système du monde imaginé par Aristarque (même que Copernic).
- système de numération à peu de chose près le même que le nôtre;
 - deux progressions, l'une arithmétique, l'autre géométrique. Le premier terme de la première progression est zéro, et la différence est un; le premier terme de la progression géométrique un et la raison dix.

D. AUBIN - LU3MA209 32

32

LA POUSSÉE D'ARCHIMÈDE

Des corps portés sur un fluide

3. Si un corps plus léger qu'un fluide est abandonné dans ce fluide, il s'y enfoncera jusqu'à ce qu'un volume de liquide égal au volume de la partie du corps qui est enfoncé ait la même pesanteur que le corps entier.
4. Si un corps plus léger qu'un fluide est enfoncé dans ce fluide, ce corps remontera avec une force d'autant plus grande, qu'un volume égal du fluide sera plus pesant que ce corps.
5. Si un corps plus pesant qu'un fluide est abandonné dans ce fluide, il sera porté en bas jusqu'à ce qu'il soit au fond; et ce corps sera d'autant plus léger dans ce fluide, que la pesanteur d'une partie du fluide, ayant le même volume que ce corps, sera plus grande.



Gravure du 16^e siècle

2024 D. AUBIN - LU3MA209 33

33



SCIENCES MATHÉMATIQUES AU DÉBUT DE NOTRE ÈRE

Ptolémée et Héron
– Astronomie, musique, mécanique

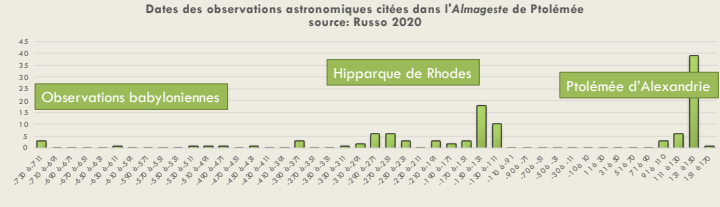
2024 D. AUBIN - LU3MA209 34

34

ÉCLIPSE DE LA PENSÉE MATHÉMATIQUE

148 avant notre ère : Conquête définitive de la Grèce par les Romains
Crises sociales en Egypte ; conquête romaine en 30 avant notre ère.

Dates des observations astronomiques citées dans l'Almageste de Ptolémée
source: Russo 2020



2024 D. AUBIN - LU3MA209 35

35

PTOLÉMÉE (V. 90 À V. 168)


L'Almageste,
 ▪ الكتاب المجسطي, *al-kitabu-l-mijisti*, (i.e. « Le grand livre »),
 orig. *La synthèse mathématique*, *Composition mathématique*.

Tables faciles
 ▪ Tirées de l'Almageste, pour le calcul des éphémérides.

Tetrabiblos
 ▪ Traité d'astrologie.

Géographie ou Cosmographie

Harmoniques



Manuscrit du IX^e siècle.

2024 D. AUBIN - LU3MA209 36

36


L'ALMAGESTE

Système géocentrique.

Les sections coniques (Apollonius de Perge)

La trigonométrie d'Hipparque.

Les observations et l'éthique de la recherche astronomique.

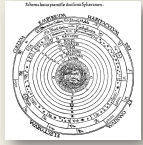


Schema huius praeiustitiae diuifionis Sphaerarum.

2024 D. AUBIN - LU3MA209 37

37

L'ALMAGESTE: STRUCTURE



13 « livres » :

1. La cosmologie aristotélicienne et une introduction à la trigonométrie sphérique.
2. Mouvement diurnes des objets célestes: la théorie du gnomon.
3. L'année et le mouvement du **Soleil**: la précession des équinoxes (découverte par Hipparque) et les épicycles.
4. Les mouvements de la **Lune**.
5. Cont.
6. Les éclipses solaires et lunaires.
7. Mouvement des étoiles fixes et un **catalogue de 1022 étoiles** tiré d'Hipparque).
8. Cont.
9. La théorie des planète et en particulier **Mercur**.
10. Mouvement de **Vénus** et **Mars**.
11. Mouvements de **Jupiter** et **Saturne**.
12. Le mouvement rétrograde des planètes.
13. Mouvement latitudinaire des planètes.

2024 D. AUBIN - LU3MA209 38

38

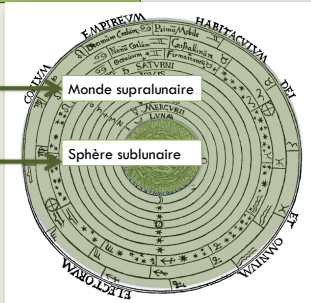
ÉPISTÉMOLOGIE DE PTOLÉMÉE

Une philosophie stoïcienne et aristotélicienne

Philosophie pratique et théorique

Les trois philosophies théoriques

- **Théologie** (le mouvement saisi par l'intellect)
- **Mathématique**, ou astronomie (la forme saisie par les sens et la raison)
- **Physique** (la matière saisie par les sens)




Monde supralunaire

Sphère sublunaire

2024 D. AUBIN - LU3MA209 39

39

PTOLÉMÉE: GÉOGRAPHIE



Maintenant, comme nous nous proposons de décrire avec le plus d'exactitude que nous pourrons la partie habitée de la terre, nous croyons nécessaire de dire avant tout, que la condition préliminaire et fondamentale de cette science, est une histoire des voyages, qui donne la plus grande connaissance possible de la terre, d'après des relations de gens déjà instruits par l'étude qu'ils en auront faite, et qui ensuite auront parcouru les divers pays qu'ils décrivent. Une autre condition aussi essentielle, c'est que de tous ces mémoires, les uns contiennent des mesures géométriques, et les autres des observations astronomiques.

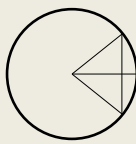
Science des voyage et des mesures

La carte de monde de Ptolémée, reconstituée au 15^e siècle à partir de sa Géographie.
 Harleian MS 7182, ff 58v-59r
<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/2/23/PtolemyWorldMap.jpg/800px-PtolemyWorldMap.jpg>

2024 D. AUBIN - LU3MA209 40

40

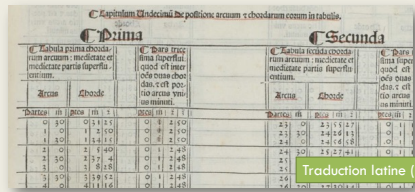
LA TRIGONOMETRIE



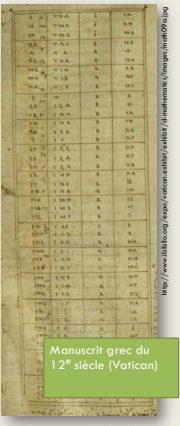
Lien entre géométrie et logistique?

Déjà chez Hipparque, des tables de cordes:

- $\text{Corde}(A) = 2 \sin(A/2)$



Traduction latine (1515)



Manuscrit grec du 12^e siècle (Vatican)

41

HÉRON D'ALEXANDRIE

1^{er} siècle de notre ère : un ingénieur?

Ses machines sont décrites dans les *Pneumatiques*.

Formule de Héron en mathématiques:

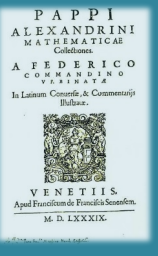
- Trouver l'aire d'un triangle étant données la longueur des trois côtés.

Catoptrica, Belopoica, Mécanique, Métrique...

Une solution à la duplication du cube




42



PAPPI ALEXANDRINI MATHEMATICARUM COLLECTIONES. A FEDERICO COMMANINO V. I. P. R. A. T. A. In Latinam Conuersa & Commentarijs Illustrata. VENETIIS. Apud Franciscum de Franciscis Scapula. M. D. LXXXIX.

MATHÉMATIQUES DE L'ANTIQUITÉ TARDIVE

l'exemple de Pappus – 3 grands problèmes

43

PAPPUS D'ALEXANDRIE

4^e s. de notre ère

Son principal ouvrage:

Synagoge = *Collection mathématique* (v. 340)

- Livre I: perdu.
- Livre II: arithmétique.
- Livre III: problèmes de géométrie; duplication du cube.
- Livre IV: quadrature du cercle et trisection de l'angle.
- Livre V: polygones.
- Livre VI: œuvres astronomiques mineures (perdu).
- Livre VII: analyse et synthèse; le [problème de Pappus](#).
- Livre VIII: mécanique.

Problème de Pappus: « Etant donné quatre droites, le problème est de trouver le lieu géométrique des points dont les segments menés de ce point à chacune des droites suivant des directions données ont des produits égaux. »

Le problème de Pappus a permis à Descartes d'explicitier, dans sa géométrie, ses théories sur les solutions « à la règle et au compas » et « la nature des courbes planes ».

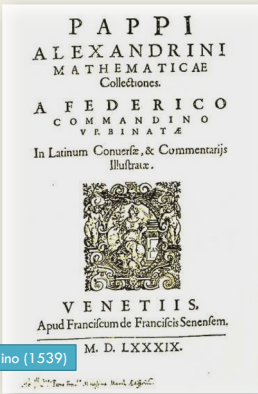
44

PAPPUS (2)

3 genres de problèmes géométriques:

- Problèmes **plans**: droites et cercles
- Problèmes **solides**: sections de solides, e.g. coniques.
- Problèmes « **grammiques** » : autres courbes, « courbes mécaniques ».

- Quadratrices
- Conchoïdes
- Cissoïdes



Édition de Federico commandino (1539)

45

LA CISOÏDE DE DIOCLÈS

Dioclès (fin 3^e-début 2^e siècle, avant notre ère), *Sur les miroirs ardents*, ouvrage perdu

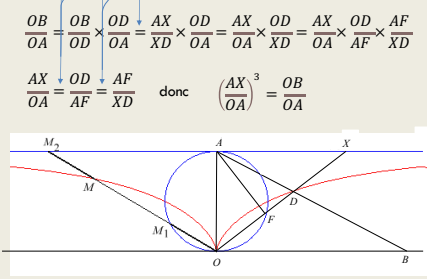
Triangles semblables: ADX et BDO, OAX, AFX et OFA

XF=DO donc FO=XD

Par déf. $OM = M_1M_2$

Duplicatrice, car si $OB = 2OA$, alors $AX^3 = 2OA^3$

Instrument pour la tracer imaginé par Newton au 17^e siècle.



46

QUADRATICE

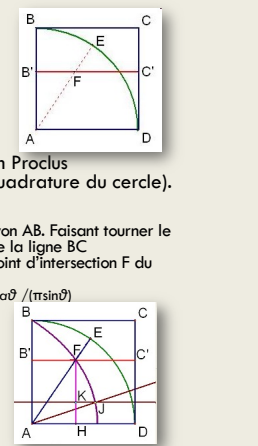
Attribuée à Hippias d'Élis, 5^e siècle avant notre ère, selon Proclus (Dinostrate, élève de Platon, s'en sert pour résoudre la quadrature du cercle).

Définition (cf. Pappus, livre IV):

- ABCD est un carré et BED un quart de cercle de centre A et de rayon AB. Faisant tourner le rayon AB autour de A jusqu'à AD en même temps que l'on translate la ligne BC parallèlement à elle-même [i.e. B'C'] jusqu'à AD. Alors le lieu du point d'intersection F du rayon tournant et de la ligne translaturée BC est la quadratrice.
- Equation en coordonnées cartésiennes: $y = x \cot(\pi x / 2a)$; et polaires: $r = 2a\vartheta / (\pi \sin \vartheta)$

Cette courbe permet de **triser un angle quelconque**.

- Pour triser l'angle EAD, tracer le point F à l'intersection du rayon AE et de la quadratrice. La trisection de l'angle se réduit alors à la trisection de la droite FH.



47

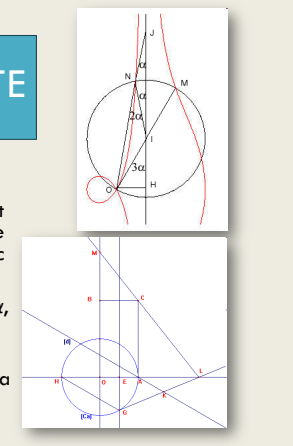
CONCHOÏDE DE DROITE

Attribuée à Nicomède (contemporain d'Ératosthène, 3^e s. av. notre ère)

Définition: Étant donné un point O, une droite D et une distance d, la conchoïde est la courbe obtenue en traçant, pour tout $l \in D$ les points M alignés avec O et à distance d de la droite.

Trisectrice, car elle permet étant donné l'angle 3α , de tracer l'angle α .

Duplicatrice, car supposant que L appartient à la conchoïde définie par le point G, la droite AK et la distance OA, on montre que $MB^3 : OA = 2$.



48


EUTOCIUS D'ASCALON

Commentaires sur Apollonius de Perge (6^e s., Alexandrie).

Commentaires sur trois livres d'Archimède: dont étude de la solution de l'équation cubique par l'intersection de sections coniques.

[Pour mémoire:
Diophante, *Arithmétiques*, 3^e siècle à Alexandrie]

[Théon d'Alexandrie et sa fille Hypathie, 4^e–5^e s. de notre ère. Compilations des œuvres d'Euclide, commentaires de Ptolémée]



49