Cours 4

Les mathématiques médiévales entre islam et chrétienté

LU3MA209
ÉLÉMENTS D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

2023-2024, 2e période

David Aubin
david.aubin@sorbonne-université.fr

2024 LU3MA209 - D. AUBIN 1

1

PROGRAMME DE LA SÉANCE

1. L'antiquité tardive : une tradition menacée, l'héritage de Boèce
2. Mathématiques en terre d'Islam: héritage, transmission et innovation
3. Le Moyen Âge chrétien en Occident: Éclipse et renaissance des mathématiques

2024 LU3MA209 - D. AUBIN 2

2

L'ANTIQUITÉ TARDIVE

Une tradition menacée, l'héritage de Boèce

2024 LU3MA209 - D. AUBIN 3

3

NICOMAQUE DE GÉRASE

Néopythagoricien (1er–2e siècles ap. J.-C.) → *logos* et *arithmos*.

Œuvres:
- *Introduction à l'arithmétique* (vers 180)
- *Théologie de l'arithmétique* : l'étude du Un et de Dieu.
- *Manuel d'harmonique*.

Système des quatre sciences mathématiques	
Les nombres en soi → arithmétique	Les nombres par rapport à d'autres nombres → musique ou harmonique.
La quantité au repos → géométrie	La quantité en mouvement → astronomie ou sphériques.

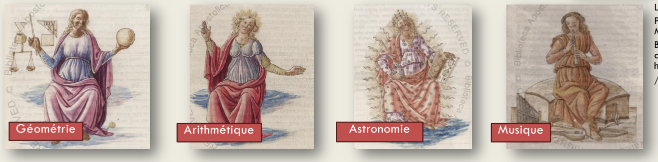
Portrait du 12e siècle, Cambridge University Library, MS Ii.3.12

2024 LU3MA209 - D. AUBIN 4

4

TRIVIUM - QUADRIVIUM

Martianus Capella, Carthaginois du 5e siècle
Les Noces de Philologie et de Mercure (vers 420).



Les Noces de la Philologie et de Mercure, Ms. Urb 329, Bibliothèque apostolique du Vatican, http://digi.vatlib.it/view/MSS_Urb.lat.329

2024 LU3MA209 - D. AUBIN 5

5

LES MATHÉMATIQUES GRECQUES EN HÉRITAGE

Un relais majeur → **Boèce** (env. 480 – 525)

- Vit en Italie pendant l'époque de l'Antiquité tardive.
- Traductions et commentaires d'Aristote en latin.
- Œuvre philosophique, logique, théologique et mathématique.
- [*Consolation de la philosophie*, écrit en prison en 523]

Consolation de la philosophie, Gand, 1485.
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1c/Boethius.consolation.philosophy.jpg

2024 LU3MA209 - D. AUBIN 6

6

BOÈCE ET LES MATHÉMATIQUES

Boèce adopte la structure **trivium-quadrivium**

- Grammaire, dialectique, rhétorique
- Géométrie, arithmétique, astronomie, musique.

Traduction d'Euclide en latin (perdue).

Ses *Institutions*… = les principaux ouvrages lus dans le monde chrétien médiéval.

Une séparation entre quadrivium et théologie.

2024 LU3MA209 - D. AUBIN 7

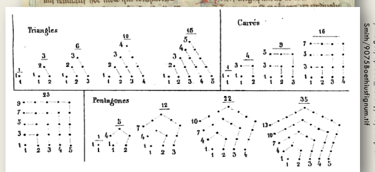
7

ARITHMÉTIQUE

Boèce, *Institution arithmétique* (*De institutione arithmetica*).
Cf. trad. française de JY Guillaumin (1995).

Tirée de **Jamblique** (v. 242 – v. 325).

- néoplatonicien
- auteur d'une célèbre vie de Pythagore
- commentaire sur l'arithmétique de **Nicomaque** de Gérase.

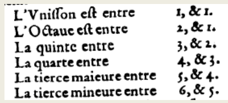


http://www.maa.org/sites/default/files/images/upload_library/46/Plimpton-Smith/9075Boethiusfignum.tif

2024 LU3MA209 - D. AUBIN 8

8

INSTITUTION MUSICALE

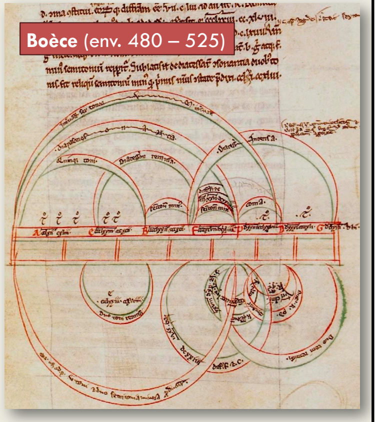


L'Vnisson est entre	1, & 1.
L'Octaue est entre	2, & 1.
La quinte entre	3, & 2.
La quarte entre	4, & 3.
La tierce maieure entre	5, & 4.
La tierce mineure entre	6, & 5.

— Marin Mersenne, *La Vérité des sciences* (1625).

- Le problème de la gamme.
- Gamme « pythagoricienne »: 12 quintes ≈ 7 octaves. 0,007707… ≈ 0,0078125.

Boèce (env. 480 – 525)



Copie manuscrite du 12e siècle. Bodleian Library, Oxford.

2024 LU3MA209 - D. AUBIN 9

9

GÉOMÉTRIE

Institution géométrique de Boèce ? Connue que par des fragments. [Les textes qui circulent au Moyen Âge sont plus tardifs]

Le « pont des ânes »:
- proposition 5 d'Euclide = dans un triangle équilatéral, les angles de la base sont égaux.

Euclide n'est presque plus lu en Europe après le 5e siècle.

La géométrie pratique des géographes et des arpenteurs. [Voir plus bas]

2024 LU3MA209 - D. AUBIN 10

10

ASTRONOMIE

Pas de trace d'une *Institution astronomique* par Boèce.

Le texte le plus célèbre:
- Aratus, *Les Phénomènes* (v. −280-260), un poème cosmique qui influence Cicéron, Ovide ou Saint-Paul.
- Plusieurs autres descriptions cosmiques inspirées de Ptolémée circulent, mais sans mathématiques.

≠ Ptolémée, *L'Almageste* (pas lu en Europe).

Influence de l'astrologie de Ptolémée, *Tétrabible*.

Presque aucune recherche européenne en arithmétique, géométrie et astronomie entre les VIe et le XIe siècles.

2024 LU3MA209 - D. AUBIN 11

11

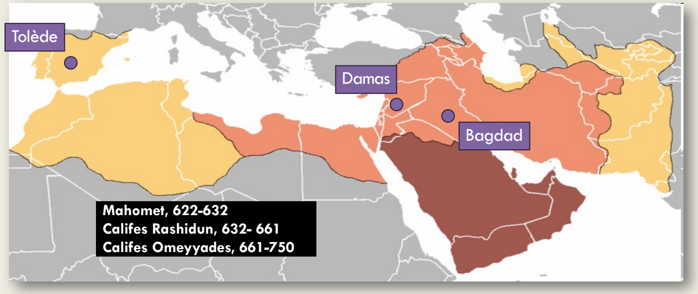
MATHÉMATIQUES EN TERRE D'ISLAM

Héritage et innovation

2024 LU3MA209 - D. AUBIN 12

12

CALIFAT ISLAMIQUE (622–750)



13

LES SCIENCES MATHÉMATIQUES « ARABES » : UN RÉSUMÉ

L'héritage gréco-romain:

> « Les [sciences] mathématiques sont appelées les quatre enseignements. Elles sont quatre, car leur sujet est la quantité. La quantité est soit ce qui est continu, soit ce qui discret. Le continu est ou bien en mouvement ou bien au repos. Le mouvant est l'astronomie, le non-mouvant la géométrie. Le discret est soit ce qui est a une raison, c'est-à-dire la musique, soit ce qui n'en a pas, c'est-à-dire les nombres »
> [Baha al-Din Kharaqi, mathématicien perse du 12e siècle]

Transmission:
- Le « calcul indien » [et la trigonométrie]

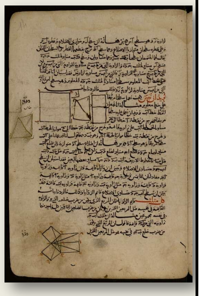
Innovations:
- L'« algèbre » [et l'analyse combinatoire]

14

L'HÉRITAGE GREC : TRANSMISSION ET DÉVELOPPEMENTS

Relecture d'Euclide.
- Livre X: Arithmétisation des grandeurs incommensurables; racine carrées et bicarrées manipulées comme des nombres.
- Livre V: Rapports = extension du concept de nombre aux fractions (Al-Khayyam et Ibn-Mucadh).

Problèmes non résolus par les Grecs
- En géométrie: découper la sphère en deux parties dans un rapport donnée, énoncé sans preuve chez Archimède; multisection de l'angle; construction de l'heptagone et de l'ennéagone.
- En arithmétique: étude des nombres premiers (Thabit Ibn Qurra, mort en 901; Ibn al-Haytham, m. 1041; al-Farisi, m. v. 1320); étude des équations diophantiennes et congruence; étude des suites et des séries finies.



Éléments d'Auclide, traduction de Isḥāq ibn Ḥunayn révisée par Ṯābit ibn Qurraṯ al-Ḥarrānī, copie du 12e siècle. BULAC

15

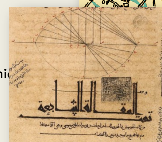
LA MAISON DE LA SAGESSE

Bibliothèque du calife à Bagdad, ouverte aux savants en 832.

Apogée des traductions du grec :
- **Al-Jahiz**, *Livre des animaux*
- **Al-Kindi**, philosophe, mathématicien, astronome.
- **Al-Hajjaj ibn Yusuf ibn Matar**, première traduction d'Euclide en arabe, traduction de l'*Almageste*.
- **Thābit ibn Qurra**, traduction des *Coniques* d'Apollonius de Perge; ouvrages d'astronomie.
- **Abou Ma'shar al-Balkhî** (**Albumazar**), astronomie, astrologie.
- **Al-Kwârizmî,** l'algèbre et les nombres indiens.

Bgddad, la ville ronde

William Muir, William, *The Caliphate: Its Rise, Decline, and Fall from Original Sources* (1883). http://www.muhammadanism.org/maps/Baghdad.gif



http://bodley30.bodley.ox.ac.uk:8180/luna/servlet/view/search?q=Title=%22Conica.%20Book%201-7%22

16

L'ALGÈBRE : UNE NOUVELLE BRANCHE DES MATHÉMATIQUES

Les Mille et une nuits (trad. fr. de A. Galland, 1965, I, p. 426-427)

« … et vous avez en ma personne le meilleur barbier de Bagdad, un médecin expérimenté, un chimiste très profond, un astrologue qui ne se trompe point, un grammairien achevé, un parfait rhétoricien, un logiciel subtil, un mathématicien accompli dans la géométrie, dans l'arithmétique, dans l'astronomie et dans tous les raffinements de l'algèbre ; un historien qui sait l'histoire de tous les royaumes de l'Univers. Outre cela, je possède toutes les parties de la philosophie ; j'ai dans ma mémoire toutes nos lois et toutes nos traditions, je suis poète, architecte, etc. »

L'algèbre apparaît dans la classification des sciences d'**Al Farabi** (10e siècle) et d'**Avicenne** (11e siècle).

2024 LU3MA209 - D. AUBIN 17

17

AL-KWÂRIZMÎ

Abu Ja'far Muhammad ibn Musa **Al-Khwârizmî** (v. 790 – v. 840), « originaire de Khiva », auj. Ouzbékistan.

Œuvre mathématique, parue vers 820–830
- *Livre du calcul indien.*
- *Traité de l'algèbre.*

Œuvre astronomique
- *Zīj al-Sindhind* (un livre de tables astronomiques et trigonométriques).

Œuvre géographique
- *Configuration de la Terre.*

Statue à l'université de technologie Amirkabir de Téhéran. http://www.mt-oceanography.info/science+society/lectures/illustrations/lecture16/alkhwarizmi2.jpg

http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b102246690

2024 LU3MA209 - D. AUBIN 18

18

AL-JABR WA'L-MUQĀBALAH

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/23/Image-Al-Kit%C4%81b_al-mu%E1%B8%ABta%E1%B9%A3ar_f%C4%AB_%E1%B8%A5is%C4%81b_al-%C4%9Fabr_wa-l-muq%C4%81bala.jpg

Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison (composé entre 813 et 833).

Composé de six livres, ayant pour objet la résolution des équations du 2nd degré
- 1er livre : théorique (établissement du calcul)
- 2e livre : procédés permettant de se ramener aux six types d'équations algébriques fondamentaux
- 4 derniers livres : applications pratiques

Traduit par Robert de Chester (Ségovie, Espagne, 1145) sous le titre *Liber algebrae et almucabala.*

« un résumé englobant les plus fines et les plus nobles **opérations du calcul dont les hommes ont besoin pour la répartition de leurs héritages et de leurs donations,** pour leurs partages et pour leurs jugements, pour leurs transactions commerciales et pour toutes les opérations qu'ils ont entre eux relatives à l'arpentage, à la répartition des eaux des rivières, à l'architecture ainsi qu'à d'autres aspects. »

2024 LU3MA209 - D. AUBIN 19

19

L'ALGÈBRE D'AL-KHWÂRIZMÎ

Dénomination des termes
- l'inconnue = « *shay* » (*šay*) – littéralement « chose » (transcrit *xay* en espagnol ancien = origine de x pour l'inconnue ?)
- la racine = *gizr*
- le carré de l'inconnue = *mal* (à l'origine, « bien possédé », mot qui deviendra synonyme de carré)
- la constante : nombre simple = *dirham* (à l'origine, unité monétaire).

Classement des équations (a, b et c positifs):

$ax^2 = bx$	« des carrés égalent des racines »
$ax^2 = c$	« des carrés égalent un nombre »
$bx = c$	« des racines égalent un nombre »
$ax^2+bx = c$	« des carrés et des racines égalent un nombre »
$ax^2+c = bx$	« des carrés et un nombre égalent des racines »
$ax^2 = bx+c$	« des carrés égalent des racines plus un nombre ».

2024 LU3MA209 - D. AUBIN 20

20

L'ALGÈBRE D'AL-KHWÂRIZMÎ (2)

Deux opération de transformation des équations

- L'*al-jabr* (reprise ou remplacement → origine du mot « algèbre »);
- L'*al-muqabala* (balancement ou rejet).

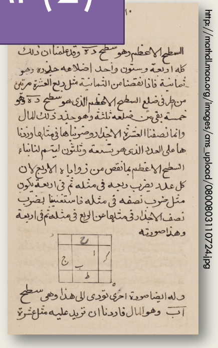
Procédés de calcul (applicables aux équations « normalisées »):
Ex. : $x^2 + 10x = 39$

« La règle en cela est que tu divise les racines en deux moitiés, dans ce problème : cinq ; que tu multiplies par lui-même : on a vingt-cinq, tu l'ajoutes à trente-neuf : on a soixante-quatre; tu prends sa racine qui est cinq : il reste trois ; qui est la racine du carré que tu cherches, et le carré est neuf. »

La démonstration des procédés

- Non pas algébrique, mais géométrique : repose sur des figures et des égalités d'aires.
- Dans l'extrait: la résolution de l'équation $x^2 + bx = c$ se fait par la construction du carré qui représente:

$$x^2 + 4(b/4) + 4(b/4)^2 = (x + b/2)^2 = c + \mathrm{b}/4.$$



http://mathdl.maa.org/images/cms_upload/08008031107224.jpg

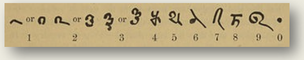
2024 LU3MA209 - D. AUBIN 21

21

LES CHIFFRES « ARABES »

Le **zéro** et la notation de position proviennent d'Inde.

Le manuscrit de Bakhshālī (date incertaine, vers – 200 à + 400).
R. Hoernle, vienne 1887.



Vers 629, **Brahmagupta** expose les calculs écrits (addition et multiplication) dans ce système.

Al-Khwârizmî

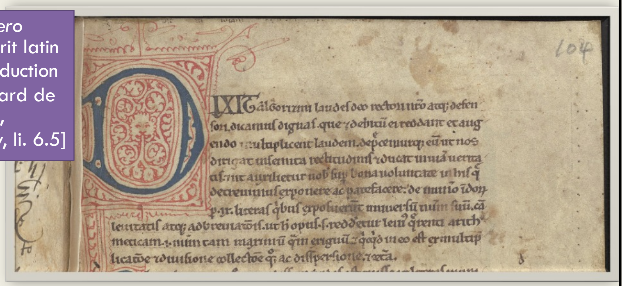
- *Kitāb 'al-āmi` wa'l-tafrīq bī h'isāb 'al-Hind* ou *Livre de l'addition et de la soustraction d'après le calcul indien* :
- exposé de « la manière de calculer des Indiens à l'aide des neufs caractères » + la « dixième figure en forme de cercle » (le zéro), dont il recommande de « ne pas négliger l'usage afin de ne pas confondre les positions ».
- le texte arabe n'a pas été retrouvé.

2024 LU3MA209 - D. AUBIN 22

22

« DIXIT ALGORIZMI » → ALGORITHME

Algoritmi de numero Indorum : manuscrit latin du 12[e] siècle, traduction probable d'Adélard de Bath [Cambridge, University Library, Ii. 6.5]

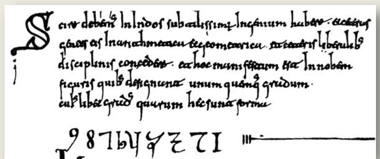


2024 LU3MA209 - D. AUBIN 23

23

LES CHIFFRES ARABES EN ESPAGNE

- Première apparition des chiffres arabes en occident dans un manuscrit produit à Pampelune en Espagne en 976.



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/3b/Codex_Vigilanus_Primeros_Numeros_Arabigos.jpg

http://www.vallenajerilla.com/albeldense/amanuense.jpg

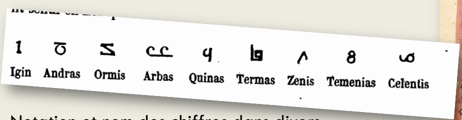
2024 LU3MA209 - D. AUBIN 24

24

GERBERT D'AURILLAC : UN PAPE MATHÉMATICIEN

Futur **Sylvestre II**, le pape de l'an Mille

Se familiarise avec les chiffres arabes à l'occasion d'un voyage à Cordoue en 972-982.



Notation et nom des chiffres dans divers manuscrits latins du 10e siècle:
(*Œuvres de Gerbert*, Clermont-Ferrand, 1867, p. xxxvi.)

Illustration from Cod. Pal. germ. 137, Folio 216v Martinus Oppaviensis, Chronicon pontificum et imperatorum ~1460
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b8/Silvester_II_and_the_Devil_Cod._Pal._germ._137_f216v.jpg

25

DÉVELOPPEMENT DE L'ALGÈBRE

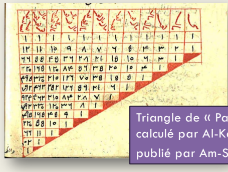
Al-Khwarizmi (1ère moitié du IXe siècle) → Abu Kamil (env. 850-930)

Les algébristes-arithméticiens

Al-Karaji (env. 953-1029),
Al-Samaw'al (env. 1130-1180)

Les algébristes-géomètres

Al Haytham (env. 965-1039),
Al-Khayyam (1048-1131),
Al-Tusi (env. 1135-1213)



Triangle de « Pascal », calculé par Al-Karaji, publié par Am-Samaw'al

26

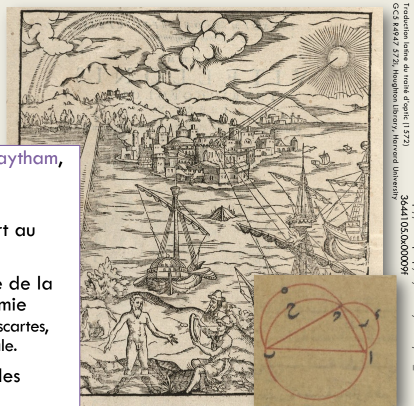
AL-HAYTHAM

Abū Alī al-Ḥasan ibn al-Hasan ibn **al-Haytham**, formes latinisés fréquentes : **Alhacen** ou **Alhazen**.

Né à Bassorrah (auj. Irak) vers 965; mort au Caire en 1039.

Importants traités d'optique (physiologie de la vue, réflexion et réfraction) et d'astronomie
- traduits en latin au 13e siècle: influence sur Descartes, Huygens et Newton / la méthode expérimentale.

Essai de quadrature du cercle à l'aide des « lunules ». → en TD.



Traduction latine du traité d'optic (1572) GC5 R4947 572, Houghton Library, Harvard University
http://www.cd.org/archive/81055/vdc_100023644105.0x000091

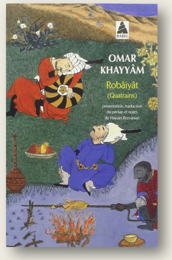
27

AL-KHAYYAM

Omar **Al-Khayyam** (env. 1048–1131), auteur des célèbres *Robâiyat* (près de mille quatrains).

3 traités connus en mathématiques:
- Algèbre et *al-muqala;*
- Division du quart de cercle;
- Commentaires sur la difficulté de certains postulat dans les travaux d'Euclide
- [traité perdu sur les racine *n*-ièmes de l'unité].

Théorie géométrique des équations algébriques.
- Classification des équations de degré ≤ 3.



28

L'ÉQUATION DU 3E DEGRÉ, NON RÉSOLUE PAR LES ANCIENS

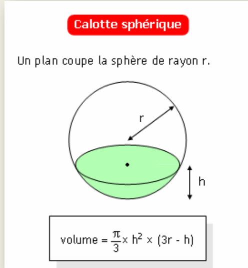
Omar Al Khayyam :

« Il se rencontre dans cette science des problèmes […] **dans la solution desquels ont échoué la plupart de ceux qui s'en sont occupé**. Quant aux Anciens, il ne nous est pas parvenu d'eux d'ouvrage qui en traite ; peut-être, après avoir cherché les solutions et après les avoir étudiées, n'en auraient-ils pas pénétré les difficultés. Ou peut-être leurs recherches n'en exigeaient pas l'examen ; ou enfin leurs ouvrages à ce sujet, s'il y en a, n'ont pas été traduits dans notre langue.

« Quant aux modernes, c'est al-Mahani qui, parmi eux, conçut l'idée de résoudre algébriquement le théorème auxiliaire employé par Archimède dans la quatrième proposition du second libre de son traité de la sphère et du cylindre ; or, il fut conduit à **une équation renfermant des cubes, des carrés et des nombres** qu'il ne réussit pas à résoudre après en avoir fait l'objet d'une longue méditation. On déclara donc que cette solution était impossible, jusqu'à ce qu'apparut Ja'far al-Khazin qui résolut l'équation à l'aide de sections coniques […] ».

29

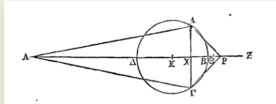
COUPER LA SPHÈRE



Archimède: 4e proposition du livre II de *La Sphère et le cylindre*

- « Couper une sphère donnée de manière que les segments aient entre eux une raison égale à une raison donnée ».
- « Le problème doit […] être posé ainsi : […] étant donné aussi le point Θ dans la droite BZ [=1/2ΔB], couper la droite ΔB en un point X, de manière que le carré construit sur ΔB soit au carré construit sur ΔX comme XZ est à ZΘ. *Chacune de ces choses aura à la fin sa solution et sa construction* ».

Une équation du 3e degré !



30

LES PUISSANCES SUPÉRIEURES À 3

Omar Al Khayyam :

« […] je n'ai jamais cessé de désirer vivement de faire connaître avec exactitude toutes ces espèces, ainsi que de distinguer parmi les cas de chaque espèce les possibles d'avec les impossibles, en me fondant sur des démonstrations ».

« Il est de coutume chez les algébristes de nommer dans leur art l'inconnue qu'on veut déterminer, 'chose', son produit par elle-même 'carré', son produit par son carré, 'cube', le produit de son carré par son semblable '**carré-carré**'. (…)

« Les solutions en algèbre s'effectuent par **l'équation, je veux dire en égalant ces degrés les uns aux autres**, comme on le sait bien. Et si l'algébriste emploie le carré-carré dans des problèmes de géométrie, c'est métaphoriquement, et non pas proprement, puisqu'il est impossible que le carré-carré soit au nombre des grandeurs. »

31

CLASSIFICATION D'AL-KHAYYAM (1)

25 équations engendrées par combinaison de quatre termes: nombre, l'inconnue, son carré et son cube.

Équations résolues (sauf [3]) à l'aide du cercle:

Équations binômes

[1]	$bx = c$
[2]	$ax^2 = c$
[3]	$x^3 = c$
[4]	$ax^2 = bx$
[5]	$x^3 = bx$
[6]	$x^3 = ax^2$

Équations trinômes

[7]	$x^2 + bx = c$
[8]	$x^2 + c = bx$
[9]	$x^2 = bx + c$
[10]	$x^3 + ax^2 = bx$
[11]	$x^3 + bx = ax^2$
[12]	$x^3 = ax^2 + bx$

32

CLASSIFICATION D'AL-KHAYYAM (2)

Équations trinômes résolues à l'aide des sections coniques

[13]	$x^3 + bx = c$	cercle-parabole
[14]	$x^3 + c = bx$	parabole-hyperbole
[15]	$x^3 = bx + c$	parabole-hyperbole
[16]	$x^3 + ax^2 = c$	parabole-hyperbole
[17]	$x^3 + c = ax^2$	parabole-hyperbole
[18]	$x^3 = ax^2 + c$	parabole-hyperbole

Equations quadrinômes

[19]	$x^3 + ax^2 + bx = c$	cercle-hyperbole
[20]	$x^3 + ax^2 + c = bx$	hyperbole-hyperbole
[21]	$x^3 + bx + c = ax^2$	cercle-hyperbole
[22]	$x^3 = ax^2 + bx + c$	hyperbole-hyperbole
[23]	$x^3 + ax^2 = bx + c$	hyperbole-hyperbole
[24]	$x^3 + bx = ax^2 + c$	cercle-hyperbole
[25]	$x^3 + c = ax^2 + bx$	hyperbole-hyperbole

Racines positives et racines multiples (2 racine pour éq. du 3e deg.).

33

ALGÈBRE ET SYMBOLISME

L'essence de l'algèbre selon Al-Khayyam :

« L'art de l'algèbre et de l'al-muqabala est un art scientifique dont l'objet est le nombre entier et les grandeurs mesurables en tant qu'inconnus mais rapporté à une chose connue par laquelle on peut les déterminer [...]. Les solutions en algèbre s'effectuent par l'équation, je veux dire en égalant ces degrés les uns aux autres. »

Abréviations et symbolisme:

جذر (racine) conduit à ـحـ qui est peut-être l'ancêtre de notre $\sqrt{\ }$.

شيء (chose) conduit à ـس pour l'inconnue x.

مال conduit à ـمـ pour le carré x^2.

كعب (le cube-objet) donne ـكـ pour le cube x^3. (On notera que كعبة est la Kaaba qui a justement la forme d'un cube). Ainsi, par exemple, $12x^5$ se noterait مكـ 12 .

Source:
Roshdi Rashed,
« L'algèbre arabe »,
L'Ouvert n° 44 (1986).

34

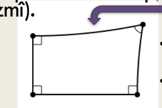
AL-TUSI

Sharaf al-Din al-Muzaffar **al-Tusi,** né vers 1135 à Tus (aujourd'hui en Iran); mort en 1213 en Iran.

En algèbre :

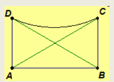
- Continuateur d'Al-Khayyam, dont il reprend les solutions géométriques des équations cubiques.
- Identifie le rôle du discriminant de l'équation du 3e degré comme condition d'existence de racines positives, mais ne l'utilise pas dans une démarche résolutive.
- Développe une méthode de résolution numérique approchée des équations cubiques

Tente de prouver le 5e postulat d'Euclide (comme al-Haytham et al-Khwârizmî).



•Quadrilatère de Lambert-al-Haytham

•Quadrilatère de Sacchieri-al-Kwarizmi



35

LE MOYEN ÂGE CHRÉTIEN

Éclipse et renaissance des mathématiques

36

ÉCLIPSE DES MATHÉMATIQUES DANS LE MOYEN-ÂGE CHRÉTIEN ?

Carte du monde connu, tirée d'une version imprimée de 1472 des *Etymologies.*

Isidore de Séville (v. 560–636), dans le 3e livre de ses *Etymologies*

- Même si son exposé mathématique reste rudimentaire, il affirme que les mathématiques sont importantes. [par ex.: on a besoin des nombres pour comprendre l'Ecriture sainte, et donc la parole de Dieu.]

Jean de Salisbury (v. 1115–1180) dans *Metalogicon* (1159) :

- La démonstration « n'est pratiquement plus pratiquée aujourd'hui. Seuls les mathématiciens la pratiquent et même parmi ces derniers, elle tend à devenir presque exclusivement réservée aux géomètres. »
- « La géométrie », continue-t-il, « est employée surtout par les peuples d'Ibérie et d'Afrique du Nord, ainsi que ceux d'Egypte et d'Arabie ».

2024 LU3MA209 - D. AUBIN 37

37

TEXTES MATHÉMATIQUES AVANT LE 12E SIÈCLE

- Trad. romaines des traités grecs (Boèce)
  - son arithmétique est bien connue,
  - Une géométrie attribuée à Boèce circule : des propositions sans figures et sans démonstrations.
- Les traités d'arpentage (*agrimensores*)
  - Héron d'Alexandrie
  - Balbus (100 ap. J.-C.)
- Les encyclopédies latines (Isidore de Séville)
  - classification des sciences mais pas de contenu.
- Pratique mathématique quotidienne.

Le livre et le vraye hystoire du bon roy Alixandre, Paris, vers 1420.

2024 LU3MA209 - D. AUBIN

38

GÉOMÉTRIE EUROPÉENNE AU 11E SIÈCLE

La Géométrie attribuée Gerbert d'Aurillac

Geometrica incerti auctoris.

- En fait, plusieurs textes différents.
- Des problèmes de mesure; des solutions sans preuves…
- Un outil principal: les triangles semblables.

'Ad inueniendam altitudinem in plano sine astrolapsu'.Manuscrit d'Avranches BM - ms. 0235.

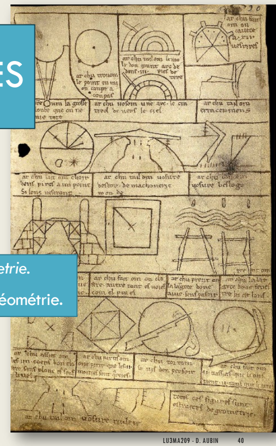
2024 LU3MA209 - D. AUBIN 39

39

LE TEMPS DES CATHÉDRALES

Les carnets de **Villard de Honnecourt** (13e siècle)

→ témoins d'un expérience mathématique



Totes ces figures sunt estraites de geometrie.

Toutes ces figures sont des tracés de géométrie.

Tracés de construction.
Paris, Bibliothèque nationale de France, Département des manuscrits, Français 19093, fol 39
© Bibliothèque nationale de France

http://classes.bnf.fr/villard/grand/39.htm

2024 LU3MA209 - D. AUBIN 40

40

https://www.histoires-de-paris.fr/saint-victor/

Abbaye de Saint-Victor en 1838

MATHÉMATIQUES À JUSSIEU

Hugues de Saint-Victor (1096–1141)

La géométrie est

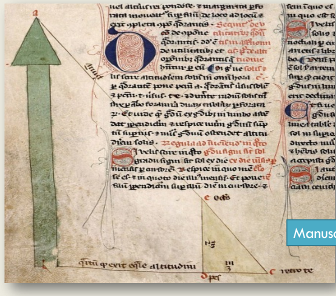
- théorique si elle est spéculative
- pratique quand elle est active.

La pensée et les instruments

La géométrie pratique se compose de l'altimétrie, la planimétrie et la cosmimétrie.

41

GÉOMÉTRIE PRATIQUE MÉDIÉVALE



Manuscrit, fin 13e siècle, Bibliothèque Sainte-Geneviève, Ms. 1043/7

Une géométrie des problèmes et des solutions.

Un exemple:
Robert l'Anglais (Montpellier, 13e siècle), *Traité du Quadrant*.

42

RÉCEPTION DES MATHÉMATIQUES ARABES EN EUROPE CHRÉTIENNE

10e s.
- L'époque des précurseurs (par ex : Gerbert d'Aurillac)
  - Quelques éléments des mathématiques arabes arrivent en Europe

11e-12e
- L'époque des traducteurs: contacts à Tolède, en Sicile, au Moyen-Orient.
  - Les plus célèbres : **Gérard de Crémone et Adélard de Bath.**

12e-13e
- Adaptation des méthodes et textes arabes
  - **Léonard de Pise** (dit **Fibonacci**) et Jean de **Sacrobosco.**
  - **Jordanus de Nemore** (enseignant à Paris entre 1215 et 1245 env.),

13e-14e
- Une nouvelle mathématique « occidentale »
  - **Bradwardine, Ockham, Oresme** → impulse un retour aux Anciens.

Traduction latine d'un traité d'Albumazar (1515)

43

RÉCEPTION EUROPÉENNE DES MATHÉMATIQUES ARABES

Une réception différenciée qui néglige parfois les maths le plus sophistiquées:
- Al-Kwarizmi, Alhacen, etc.: traduit en latin et diffusé.
- Abu Kamil: traduit, mais peu présent dans la littérature latine.
- Al-Karaji: non traduit; repris par Fibonacci, mais rencontre peu d'écho.
- Al-Samaw'al: tout à fait inconnu.

Ex : Jordanus de Nemore (13e siècle)
- Dans le *De numeris datis*, reprend sans la citer la classification des problèmes algébriques d'Al-Kwarizmi.
- Dans le *In Demonstratio de algorismus*: après des définitions de type euclidien, prétend « suivre les pas des anciens » en montrant qu'elle permet de redémontrer certains résultats obtenus par les Arabes, sans les citer.

Création d'un mythe : « rien de fondamentalement différent » chez les Arabes par rapport aux Anciens ?

« L'université médiévale produisit […] une variété proprement européenne de mathématiques, […] en rupture avec […] la science gréco-arabe […]. Les premiers humanistes ont certes revalorisé la culture grecque contre la tradition médiévale, mais sans s'intéresser […] aux mathématiques pour elles-mêmes. Les générations suivantes chercheront à […] établir un lien privilégié avec les mathématiciens hellénistiques et eux-seuls » (L'Europe mathématique, 1996, p. 102)

44

L'« ALGORISME »

Allégorie de l'arithmétique dans la *Margarita Philosophica* de Gregor Reisch (fin 15e s).

« algorisme » = Calcul à l'aide des chiffres arabes; s'oppose à l'abacisme.

Jean de **Sacrobosco** (v.1195–v.1256), selon Pierre de Dacie:

- « une meilleure connaissance de toutes choses ».
- mais surtout l'astronomie: « cet art est un instrument pour étudier les magnitudes des mouvements célestes ».

Léonard de Pise, dit **Fibonacci** (v.1170– v. 1240), *Liber abbaci* (1202):

- « Je présente une instruction complète à propos des nombres, proche de la méthode des Indiens […]. Et parce que les sciences arithmétique et géométrique sont liées et se soutiennent l'une l'autre, la connaissance complète des nombres ne peut être présentée sans rencontrer un peu de géométrie, ou sans voir que les opérations sur les nombres se rapprochent de celles faites en géométrie; la méthode est remplie de preuves et de démonstrations faites à l'aide de figures géométriques. »

45

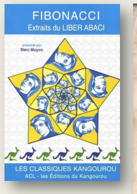
ABACISME VS. ALGORISME

Publiés la même année (1514), les deux traités de **Köbel** (à gauche) et de **Böschenteyn** (à droite) exposent l'un le calcul avec des jetons sur abaque, l'autre le calcul à la plume sur papier.

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/5b/K%C3%B6bel_B%C3%B6schenteyn_1514.jpg

46

« FIBONACCI »



http://nicholasvmmuseum.wikispaces.com/file/view/Liber_Abaci.jpg/101797615/Liber_Abaci.jpg

Leonard de Pise (v.1170– v. 1240) :
voyage en pays musulmans [Béjaïa, Algérie],
relations avec la cour de Frédéric II Barberousse.

- *Liber abaci*, 1202.
- Géométrie pratique, 1220.
- Livre des carrés, 1225.

« Nommé scribe public et établi à la douane de Bougie… mon père me fit venir encore enfant auprès de lui et pendant quelques jours me fit demeurer là à apprendre l'abaque. Lorsque par un enseignement admirable je fus introduit dans l'art (du calcul) par les neufs chiffres indiens… avec ces neufs chiffres et avec le 0 qui s'appelle Zephirum en arabe, on peut écrire tous les nombres qu'on veut. » (*Liber abaci*)

47

TABLE DES MATIÈRES DU *LIBER ABACI* (1202)

http://www.twistedlifestyle.com/Images/Liber-Abaci-Book-Of-Calculation-002.jpg

1. Sur la reconnaissance des neuf chiffres indiens et comment tous les nombres peuvent s'écrire avec leur aide
2. Sur la multiplication des entiers
3. Sur leur addition
4. Sur la soustraction de nombres inférieurs de nombres supérieurs
5. Sur la multiplication d'entiers et de fractions, et aussi de fractions seules
6. Sur l'addition, la soustraction, et division des entiers par des fractions et la réduction des fractions
7. Sur l'achat et la vente de choses commerciales
8. Sur le troc et l'achat de monnaies
9. Sur les compagnies
10. Sur la conversion des monnaies

etc.…

15. Des règles géométriques pertinentes et sur des problèmes d'algèbre et almuchabala

48

CRÉATION DE L'UNIVERSITÉ

Reconnaissance officielle des statuts des universités à Bologne, Paris et Oxford au début du 13e siècle.

La scolastique : méthode d'enseignement et d'exposition → *lectio* et *disputatio*.

Un cursus idéal, pas tellement dans les faits
- **Trivium**: grammaire, rhétorique, dialectique
- **Quadrivium**: géométrie, arithmétique, astronomie, musique

Les facultés supérieures :
- Médecine, droit et surtout théologie

→ Un certain renouveau en mathématiques

Cours de philosophe à Paris, 14e s., Bibliothèque municipale de Castres.

49