SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Cours 7:

Calcul différentiel et intégral :
invention, premiers succès, polémiques

LU3MA209
ÉLÉMENTS D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

2020-2021, 2e période

David Aubin
david.aubin@sorbonne-université.fr

1

PROGRAMME DE LA SÉANCE

1. Un nouveau calcul: Newton et Leibniz
2. Diffusion du calcul différentiel et intégral
3. La question des fondements
4. Sciences mathématiques au siècle des Lumiètes

2

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Isaac Newton (1643-1727)

UN NOUVEAU CALCUL

Deux visages

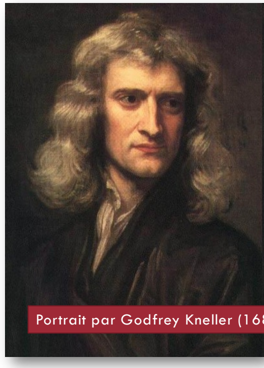
3

ISAAC NEWTON (1642—1727)

Né le jour de Noël 1642, année de la mort de Galilée.

Famille modeste; orphelin de père; élevé par son oncle.

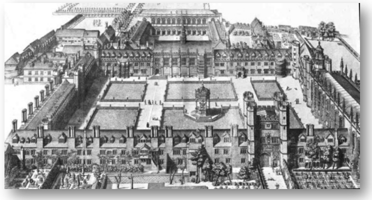
1664-1666 : annus mirabilis
- Doit quitter Cambridge à cause de la peste.
- Les fluxions : variations instantanées d'une quantité.
- la gravitation
- expériences d'optique.



Portrait par Godfrey Kneller (1689)

4

LA FORMATION DE NEWTON



Aristotélisme à Cambridge

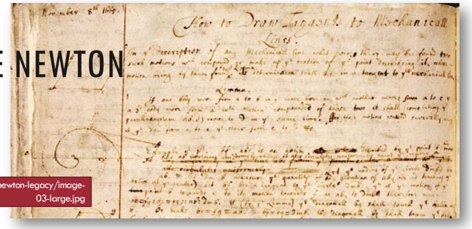
Influence de Bacon et de Descartes

Intérêt pour l'alchimie de la 1re moitié du 17e s. (son dernier article en 1696).

Mathématiques:
- William Oughtred (1574-1660), *Clavis Mathematicae* (1631).
- Frans van Schooten (1615-1660), *Exercitationes mathématicae* (1657).
- François Viète (1540-1603), *Opera omnia* (1646).
- Et surtout: Descartes, *Géométrie* (1637).
- Et John Wallis (1616-1703), *Arithmetica infinitorum* (1656).

5

LES « FLUXIONS » DE NEWTON



http://www.pbs.org/wgbh/nova/assets/img/newton-legacy/image-03-large.jpg

trois versions du calcul infinitésimal par Newton entre 1664 et les années 1690.
- octobre 1665: « *How to draw tangents to Mechanicall lines* » (photo): courbes comme trajectoires de corps mouvants. Quadrature est l'inverse du problème des tangentes.
- 1669 – *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* manuscrit connu de quelques mathématiciens anglais (publié en1711): trois règles de calcul.
- 1670-1671 – Rédaction du *De methodis serierum et fluxionum* (publié en 1736 !): le modèle de la vitesse.
- 1680 (env.) – *Geometrica curvilinea*: première et dernière raisons (la limite?).

6

1669 – RÈGLES DE CALCUL

Règle 1: Si $y = ax^{\frac{m}{n}}$, alors l'aire sous y est $\dfrac{an}{n+m}x^{1+\frac{m}{n}}$.

Règle 2: Si y est donné par la somme de plusieurs termes (ou par un nombre infini de termes), alors l'aire sous y est donnée par la somme des aires de tous les termes.

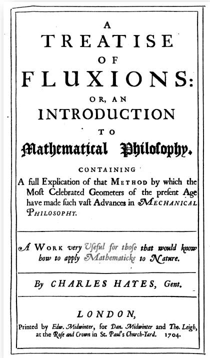
Règle 3: Pour calculer l'aire sous une courbe $f(x,y) = 0$, il faut exprimer y comme une somme de termes de la forme $y = ax^{\frac{m}{n}}$ et appliquer les règles 1 et 2 [règle fondée sur l'application du binôme de Newton].

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \ldots + x^n$$

7

1670 – LES FLUXIONS

Un algorithme de calcul inspiré de la cinématique:
- des quantités qui « fluent » au cours du temps (le mouvement d'un point génère une ligne, celui d'une ligne une surface, etc.)
- les quantités générées par ce mouvement sont appelées les « fluentes »
- $\dot{x}$ les vitesses instantanées correspondantes sont appelées « fluxions »
- $\dot{x}o$ les « moments » correspondent aux incréments infiniment petits par lesquels les quantités augmentent au cours de chaque intervalle infinitésimal de temps.



A TREATISE OF FLUXIONS: OR, AN INTRODUCTION TO Mathematical Philosophy. CONTAINING A full Explication of that METHOD by which the Most Celebrated Geometers of the present Age have made such vast Advances in MECHANICAL PHILOSOPHY. A WORK very Useful for those that would know how to apply Mathematicks to Nature. By CHARLES HAYES, Gent. LONDON, Printed by Edw. Midwinter, for Dan. Midwinter and Tho. Leigh, at the Rose and Crown in St. Paul's Church-Yard. 1704.

8

LA GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE

Dans les années 1670, abandon du calcul des fluxions « analytique » au profit d'une géométrie des fluxions sans infiniment petits.

Geometrica curvilinea : Méthode des « première et dernières raisons »: les quantités considérées sont géométriques et ne sont plus infinitésimales.

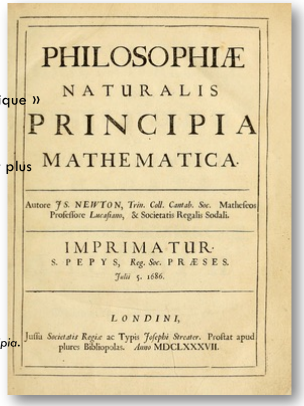
- Notion de limite d'un rapport de deux quantités.
- Méthode synthétique vs. méthode analytique.

1687: *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*.

- Premier exposé publié par Newton proche de *Geometrica curvilinea*.

1691-1692 – Rédaction du *De quadratura curvarum* (publié en 1704)

- version analytique du calcul exposé dans le *Geometrica curvilinea* et les *Principia*.


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore JS. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

9

LA LIMITE DANS LES *PRINCIPIA*

LEMME PREMIER.

Les quantités & les raisons des quantités qui tendent continuellement à devenir égales pendant un temps fini, & qui avant la fin de ce temps approchent tellement de l'égalité, que leur différence est plus petite qu'aucune différence donnée, deviennent à la fin égales.

Preuve par l'absurde:
« si on le nie, qu'on suppose qu'elles soient à la fin inégales et que leur dernière différence soit *D*, puisqu'elles ne peuvent pas approcher plus près de l'égalité que cette différence donnée *D*, leur différence ne sera donc pas plus petite que toute différence donnée, ce qui est contre l'hypothèse. »

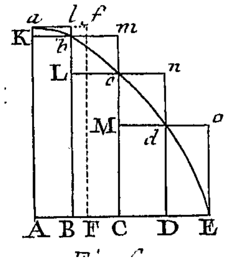
Cf. limite de Cauchy: numérique vs. géométrique.

10

L'INTÉGRATION DANS LES *PRINCIPIA*

LEMME II.

Si dans une figure quelconque AacE, *comprise entre les droites* Aa, AE, *& la courbe* acE, *on inscrit un nombre quelconque de Parallélogrammes* Ab, Bc, Cd, &c. *compris sous les bases égales* AB, BC, CD, *&c. & sous les côtés* Bb, Cc, Dd, *&c. parallèles au côté* Aa *de la figure ; & qu'on acheve les parallélogrammes* akbl, bLcm, cMdn, *&c. qu'on diminue ensuite la largeur de ces parallélogrammes, & qu'on augmente leur nombre à l'infini : les dernieres raisons qu'auront entr'elles la figure inscrite* AKbLcMdD, *la circonscrite* AalbmcndoE, *& la curviligne* AabcdE, *seront des raisons d'égalité.*



11

UNE PREUVE SIMILAIRE À CELLE DE RIEMANN

Car la différence de la figure inscrite & de la figure circonscrite, est la somme des parallélogrammes *Kl*, *Lm*, *Mn*, *Do*, c'est-à-dire (à cause de l'égalité de toutes les bases) que cette différence est égale au rectangle *ABla* fait sur l'une des bases *Kb* & sur la somme *Aa*, de toutes les hauteurs; mais ce rectangle, à cause que sa largeur diminue à l'infini, deviendra plus petit qu'aucun rectangle donné. Donc (par le Lemme premier) la figure inscrite, la figure circonscrite, & à plus forte raison la figure curviligne intermédiaire seront à la fin égales. *C. Q. F. D.*

12

FAISANT APPEL AUX INDIVISIBLES?

J'ai commencé par ces Lemmes; pour éviter de déduire de longues démonstrations *ad absurdum*, selon la méthode des anciens Géométres.

J'aurois eu des démonstrations plus courtes par la méthode des indivisibles; mais parce que l'hypothése des indivisibles me paroît trop dure à admettre, & que cette méthode est par conséquent peu géométrique; j'ai mieux aimé employer celle des premieres & dernieres raisons des quantités qui naissent & s'évanouissent; & j'ai commencé par faire voir, le plus briévement que j'ai pu, ce que deviennent les quantités, lorsqu'elles atteignent leurs limites. Je démontrerai par cette méthode tout ce qu'on démontre par celle des indivisibles; mais en ayant prouvé le principe, je m'en servirai avec plus de sécurité.

13

On peut dire, contre ce principe des premieres & dernieres raisons, que les quantités qui s'évanouissent n'ont point de derniere proportion entr'elles; parce qu'avant de s'évanouir, la proportion qu'elles ont n'est pas la derniere, & que lorsqu'elles sont évanouies, elles n'en ont plus aucune. Mais on pourroit soutenir par le même raisonnement qu'un corps qui parvient d'un mouvement uniformément retardé à un certain lieu où son mouvement s'éteint, n'a point de derniere vîtesse; Car, diroit-on, avant que ce corps soit parvenu à ce lieu, il n'a pas encore sa derniere vîtesse, & quand il l'a atteint, il n'en a aucune, puisqu'alors son mouvement est éteint. Or, la réponse à cet argument est facile; on doit entendre par la derniere vîtesse de ce corps celle avec laquelle il se meut, non pas avant d'avoir atteint le lieu où son mouvement cesse, non pas après qu'il a atteint ce lieu, mais celle qu'il a dans l'instant même qu'il atteint ce dernier lieu & avec laquelle son mouvement cesse. Il en est de même de la derniere raison des quantités évanouissante

14

ELIMINER LES INFINITÉSIMAUX

Donc, lorsque je me servirai dans la suite, pour être plus clair, des mots de *quantités évanouissantes*, de *quantités dernieres*, de *quantités très petites*, il ne faut pas entendre par ces expressions des quantités d'une grandeur déterminée, mais toujours des quantités qui diminuent à l'infini.

- "Specious algebra is fit enough to find out, but entirely unfit to consign to writing and commit to posterity" (Newton selon Gregory, 1694).
- Un exemple (livre 2, sect. 2, lemme 2):
  - Le produit de deux quantités fluentes A et B et leurs fluxions a et b.
  - L'aire augmente d'une quantité : $(A + \frac{1}{2} a)(B + \frac{1}{2} b) - (A - \frac{1}{2} a)(B - \frac{1}{2} b)$ $= Ab + Ba$.
- Critiqué par Berkeley, *The analyst* (1734).

15

GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNIZ

Né à Leipzig en 1646,
père prof de morale à l'université.

Études de droit à Leipzig.

Mission diplomatique à Paris (1672-1675).
- Rencontre **Christian Huygens** (1629–1695) à Paris en 1672; **Robert Hooke** (1635–1703) et **Robert Boyle** (1627–1691) à Londres en 1673.

Devient bibliothécaire des ducs de Hanovre en 1676; reste dans ce poste pendant plus de 40 ans.

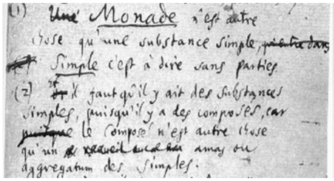
Meurt en 1716.

16

LEIBNIZ, PHILOSOPHE

Philosophe convaincu que l'étude des mathématiques est utile pour la philosophie et la logique.

- Cherche à réduire tout raisonnement à la combinaison d'éléments de base, tels que lettres, nombres, sons et couleurs…


(1) ~~Une~~ Monade n'est autre chose qu'une substance simple, ~~qui entre dans~~ Simple c'est à dire sans parties
(2) il faut qu'il y ait des substances simples, puisqu'il y a des composés, car ~~puisque~~ le composé n'est autre chose qu'un ~~recueil~~ amas ou aggregatum des simples.

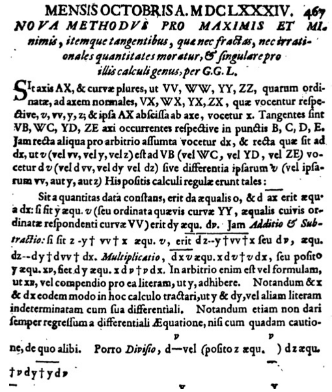
Les « **monades** »: indivisibles, mais toujours actives, elles sont le miroir de l'univers infini et forment une échelle hiérarchique du presque rien à Dieu.

17

1RE PUBLICATION DE LEIBNIZ

« Nova Methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus », *Acta Eruditorum*, octobre 1684.

- Texte court, elliptique et confus (publié à la hâte par crainte d'une indélicatesse de Tschirnhaus)
- Introduction de la différentielle (« *differentia* ») et de sa notation.
- Enoncé des principales règles de la différentiation
- Introduction du quotient dy/dx pour exprimer la pente de la tangente en un point d'une courbe.


MENSIS OCTOBRIS A. MDCLXXXIV. 467

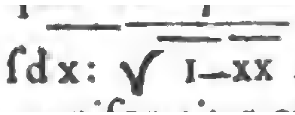
NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MInimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & singulare pro illis calculi genus, per G.G.L.

SIt axis AX, & curvæ plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatæ, ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quæ vocentur respective, v, vv, y, z; & ipsa AX abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint VB, WC, YD, ZE axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur dx, & recta quæ sit ad dx, ut v (vel vv, vel y, vel z) est ad VB (vel WC, vel YD, vel ZE) vocetur dv (vel dvv, vel dy vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsarum vv, aut y, aut z) His positis calculi regulæ erunt tales:

Sit a quantitas data constans, erit da æqualis o, & d ax erit æqu. a dx: si sit y æqu. v (seu ordinata quævis curvæ YY, æqualis cuivis ordinatæ respondenti curvæ VV) erit dy æqu. dv. Jam *Additio & Subtractio*: si sit z -y † vv † x æqu. v, erit dz--y † vv † x seu dv, æqu. dz--dy † dvv † dx. *Multiplicatio*, dxv æqu. xdv † vdx, seu posito y æqu. xv, fiet dy æqu. xdv † vdx. In arbitrio enim est vel formulam, ut xv, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum & x & dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y & dy, vel aliam literam indeterminatam cum sua differentiali. Notandum etiam non dari semper regressum a differentiali Æquatione, nisi cum quadam cautione, de quo alibi. Porro *Divisio*, d—vel (posito z æqu.) dz æqu. † vdy † ydv

18

PUBLICATIONS DE LEIBNIZ



Juin 1686: « De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum », *Acta Eruditorum*.

- Le mémoire traite du problème des quadratures
- Inspiré d'un mémoire de John Craig consacré aux quadratures et utilisant la notation différentielle introduite par Leibniz en 1684
- Leibniz y introduit le symbole d'intégration et définit les opération de « sommation » et de « différentiation » l'une par rapport à l'autre.

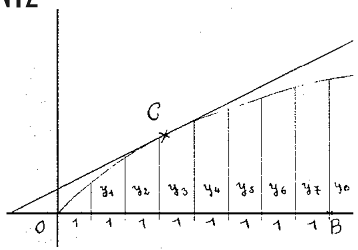
19

INTÉGRATION SELON LEIBNIZ

Considérée comme une somme infinie

Leibniz sait calculer des sommes infinies comme par exemple celle-ci qui lui a été soumise par Huygens:

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{2}{r(r+1)} = 2 - \frac{2}{n+1}$$



$$\int y = \sum y_i$$

20

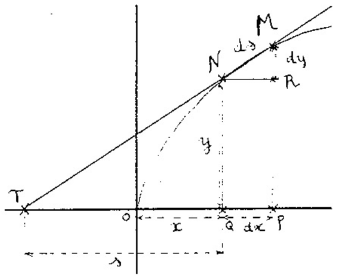
TRIANGLE CARACTÉRISTIQUE

TNQ et MNR sont des triangles semblables.

Donc MR/NR=NQ/TQ une constante quelques soient les grandeurs dx et dy.

Les règles du calcul différentiel:

$$d(x+y) = dx + dy;$$
$$d(xy) = xdy + ydx;$$
$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}\ ; \text{et } d(x^n) = nx^{n-1}dx.$$



13/01/2022 D. AUBIN - 3H011 21

21

LE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL LEIBNIZIEN

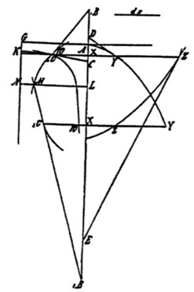
"Appelons alors *dx* un segment de droite choisi arbitrairement et *dv* (*dw*, *dy* ou *dz*), c'est-à-dire la différence de *v* ("differentia") (de *w*, de *y* ou de *z*) un segment qui soit avec *dx* comme *v* (*w*, *y* ou *z*) avec *XB* (*XC*, *XD* ou *XE*)".

"Soit a une constante donnée, *da* sera égal à *0* et $\overline{dax}$ sera égal à *adx*. Si *y* est égal à *v* (c'est-à-dire toute ordonnée de la courbe *YY* égale à l'ordonnée correspondante de la courbe *VV*), *dy* sera égal à *dv*.

Maintenant l'*Addition et la Soustraction* : si *z - y + w + x* est égal à *v*, $\overline{dz - y + w + x}$ ou *dv* sera égal à *dz - dy + dw + dx*.

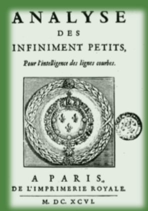
Multiplication : $\overline{dxv}$ est égal à *xdv + vdx*, c'est-à-dire, en posant *y* égal à *xv*, on aura *dy* égal à *xdv + vdx*. Car on a tout loisir d'employer, soit l'expression *xv*, soit à sa place pour abréger, une lettre, par exemple *y*. Remarquons que dans ce calcul, *x* et *dx* sont traités de la même façon, de même que *y* et *dy*, ou toute autre lettre indéterminée et sa différentielle. Remarquons également que la démarche inverse, à partir de l'équation différentielle, n'est pas toujours possible, si ce n'est avec une certaine précaution dont nous parlerons ailleurs.

Ensuite, la *Division* : $d\frac{v}{y}$ ou (en posant *z* égal à $\frac{v}{y}$) *dz* est égal à $\frac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$



13/01/2022 D. AUBIN - 3H011 22

22



DIFFUSION DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

13/01/2022 D. AUBIN - 3H011 23

23

DIFFUSION DU CALCUL DIFFÉRENTIEL

Jacques Bernoulli (1654–1705):

- « Je pense que vous, Monsieur, y cachez les traces d'une forme de mathématiques plus sublime que je n'ai pas encore réussi à pénétrer à l'aide de l'analyse cartésienne ordinaire. […] Si vous me jugiez digne de partager avec moi un rayon de lumière de votre méthode […], je deviendrai non seulement un simple admirateur, mais le plus dévoué propagateur [de votre méthode] » — lettre du 15 décembre 1687.

Jean Bernoulli (1667–1748), son frère:

- « Par l'incomparable Leibniz fut inventé le fameux calcul appelé différentiel par lequel toutes les questions qui vont au-delà de l'algèbre commune et des courbes exclues de la géométrie par Descartes sont traitées et exprimées par des équations » — leçon inaugurale à l'université de Bâle (1705).

Jacques Bernoulli (1654-1705)

Jean I Bernoulli (1667-1748)

13/01/2022 D. AUBIN - 3H011 24

24

LA FAMILLE BERNOULLI

- Nicolas (1623-1708
  - Jacques I (1654-1705)
  - Nicolas I (1662-1716)
    - Nicolas II (1687-1759)
  - Jean I (1667-1748)
    - Nicolas III (1695-1726)
    - Daniel (1700-1782)
    - Jean II (1710-1790)
      - Jacques II (1759-1789)
      - Jean II (1744-1807)

13/01/2022 D. AUBIN - 3H011 25

25

DÉBUT DE LA POLÉMIQUE SUR L'INVENTION


Nicolas Fatio de Duillier (1664-1753)

La querelle est initiée par Nicolas Fatio de Duillier, proche de Newton, dans son *Linea brevissimi descensus investigatio geometrica* (1699) :

- « Convaincu par l'évidence des faits, je reconnais que Newton fut le premier et de plusieurs années le plus ancien inventeur de ce calcul. »

John Keill (1671–1721) in *Transactions of the Royal Society* en 1711:

- accuse Leibniz d'avoir plagié Newton.

13/01/2022 D. AUBIN - 3H011 26

26

L'INSTITUTIONNALISATION DES SCIENCES LES ACADÉMIES


Jean-Baptiste Colbert présentant les membres de l'Académie royale des sciences à Louis XIV (H. Testelin, d'après une gravure de Lebrun)

Les précédents italiens (début XVII^e^ s.)

- Académies de Rome, des lynx [*lincei*]), etc.

La Royal Society de Londres (1662).

- indépendante de l'Etat, mais privilège du roi; membres fort nombreux, dirige l'observatoire de Greenwich.

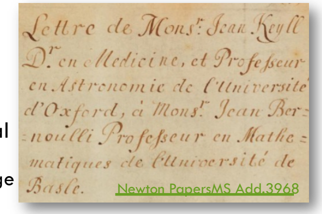
L'Académie royale des sciences de Paris (1666).

- héritière de l'Académie de Mersenne, du bureau d'adresse de Théophraste Renaudot (privées).
- créée par **Colbert** en 1666. L'Observatoire de Paris en 1667 sous l'impulsion de l'Académie.

13/01/2022 2H003 - HISTOIRE DES SCIENCES 27

27

COMITÉ DE LA ROYAL SOCIETY


Lettre de Monsr. Jean Keyll Dr. en Medicine, et Professeur en Astronomie de l'Université d'Oxford, à Monsr. Jean Bernoulli Professeur en Mathematiques de l'Université de Basle.

Newton PapersMS Add.3968

Leibniz s'en offusque ; un comité de la Royal Society est établi qui tranche en faveur de Newton, président depuis 1703 et qui rédige lui-même le rapport !

- « Il faut […] qu'il [Leibniz] renonce au droit qu'il prétend avoir à la méthode différentielle de M. Newton en tant que second inventeur : les seconds inventeurs n'ont pas de droit ».

Poursuite de la querelle avec des accents nationalistes: deux écoles en compétition:

- analyse infinitésimale sur le continent
- calcul des fluxions en Angleterre.

13/01/2022 D. AUBIN - 3H011 28

28

LES DÉFIS

Le problème de la courbe **isochrone**:

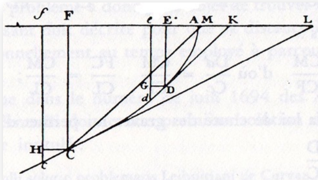
- « Trouver une ligne de descente, dans laquelle le corps pesant descend uniformément, et approche également l'horizon en temps égaux. L'Analyse de Messieurs les cartésiens le donnera peut-être aisément. »
- Leibniz in *Nouvelles de la République des Lettres*, 1687, p. 956.
- Solution sans l'analyse par Huygens
- Solution analytique par les Bernoulli.

Le problème du **brachistochrone**:

- La courbe de plus rapide descente
- Posé par Leibniz en 1696.
- Solutions en 1697.

Des solutions en deux parties :

1. le problème physique est ramené à un problème de géométrie
2. résolution de ce problème grâce au calcul différentiel et intégral.



29

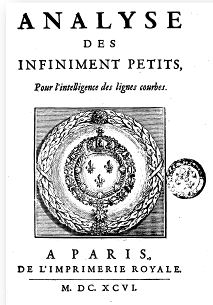
UN PREMIER TRAITÉ

L'*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1696), le premier manuel.

Guillaume de l'Hôpital, auteur anonyme.

Il apprend les techniques de l'analyse infinitésimale lors d'un voyage de Jean Bernoulli à Paris en 1691–1692.

Ne développe pas le calcul intégral, car il pense que Leibniz prépare un ouvrage.


ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS,
Pour l'intelligence des lignes courbes.
A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
M. DC. XCVI.


Guillaume de l'Hospital (1661-1704)

30

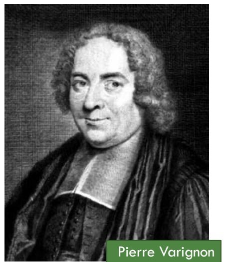
LE CALCUL À L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS

L'Hospital à l'Académie en juin 1693.

En mai et août 1693, puis en juin 1694, trois mémoires sont présentés utilisant – sans les détailler – les méthodes du calcul leibnizien.

De juin à novembre 1695, **Pierre de Varignon** présente quatre mémoires utilisant le nouveau calcul.

→ une synthèse entre physique newtonienne et analyse leibnizienne


Pierre Varignon (1654-1722)

31

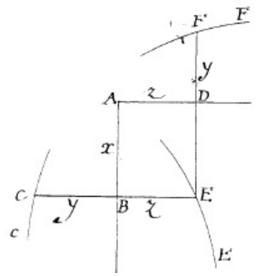
VARIGNON ET L'ARITHMÉTISATION DU MOUVEMENT

« Pour le voir (tous les angles rectilignes de la figure qu'on voit icy, etant droits) soient $AB = x$ les espaces parcourus en quelque sens qu'on voudra, $BE = z$ les temps employez à les parcourir, et $BC = y = DF$ les vitesses à chaque point B de ces espaces.

[...]

De sorte que cette vitesse (y), dans chaque instant pouvant être regardée comme uniforme, a cause que $y \pm dy = y$, la notion seule des vitesses uniformes donnera $y = \frac{dx}{dz}$ pour la regle de tous les mouvemens variés comme on voudra, c'est a dire quelque rapport d'espace, de temps, ou de vitesse, qu'on suppose ; la vitesse de chaque instant etant toujours et par tout egale au quotient de l'espace parcouru dans chaque instant divisé par cette même differentielle de temps. »

(*Registres manuscrits des procès-verbaux de l'Académie royale des sciences de Paris*, t. 17, f. 298 v° - 299 r. [« 1er mémoire »], **1698**)



32

VARIGNON ET LA DYNAMIQUE

Le 30 janvier 1700, Varignon présente un nouveau mémoire intitulé « Manière générale de déterminer les forces, les vitesses, les espaces, et les temps… ».

La question des forces centrales introduites par Newton dans ses *Principia* et de l'accroissement de vitesse (i.e. de l'accélération) qu'elles produisent :

> « De plus les espaces parcourus par un corps mû d'une force constante et continuellement appliquée, telle qu'on conçoit d'ordinaire la pesanteur, étant en raison composée de cette force et des quarrés des temps employés à les parcourir ; l'on aura aussi $ddx = ydt^2$, ou $y = \frac{ddx}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$. Ce qui fait encore une Règle $y = \frac{dv}{dt}$, qui avec la précédente $v = \frac{dx}{dt}$, satisfait à tout ce qu'on se propose icy de résoudre. »

33

LA QUESTION DES FONDEMENTS

34

LA QUESTION DES FONDEMENTS À L'ACADÉMIE DES SCIENCES

Philippe de La Hire (1640–1718)

Dès février 1697, **Philippe de La Hire** présente un court mémoire intitulé « Remarque sur l'usage qu'on doit faire de quelques suppositions dans la méthode des infiniment petits » :

- sans précautions, la « méthode des infinis » peut conduire à des erreurs
- la « géométrie ordinaire » (ou « géométrie des anciens ») demeure un garde fou nécessaire.

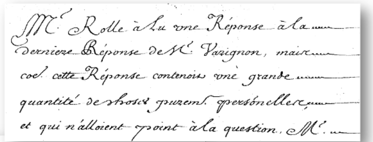
Le 6 août 1697, Varignon écrit à Jean Bernoulli :

- « M. le Marquis de l'Hospital est encore à la campagne de sorte que je me trouve seul ici chargé de la défense des infiniment petits, dont je suis le vray martyr tant j'ay desja soutenu d'assauts pour eux contre certains mathématiciens du vieux stile, qui chagrins de voir que par ce calcul les jeunes gens les attrapent et même les passent, font tout ce qu'ils peuvent pour la décrier, sans qu'on puisse obtenir d'eux d'écrire contre ».

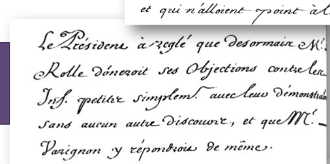
1700 – 1701: débat entre Michel Rolle et Varignon à l'Académie.

35

LE DÉBAT À L'ACADÉMIE DES SCIENCES, 1700-1701

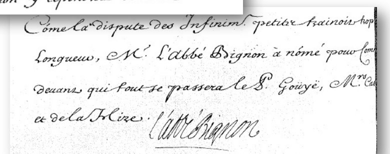


Mr. Rolle a lu une Réponse à la derniere Réponse de Mr. Varignon, mais coe. cette Réponse contenoit une grande quantité de choses purem. personelles et qui n'alloient point à la question. Mr.



Le Président a reglé que desormais Mr. Rolle doneroit ses Objections contre les Inf. petits simplem. avec leur démonstration sans aucun autre discours, et que Mr. Varignon y répondroit de même.

Registres manuscrits des procès-verbaux de l'Académie royale des sciences de Paris, t. 20, f. 183 r° - v° (séance du 21 mai 1700)



Come la dispute des Infinim. petits trainoit trop longueur, Mr. L'abbé Bignon a nomé pour com… devans qui tout se passera le P. Goüye, Mrs Ca… et de la Hire. l'abbé Bignon

Registres manuscrits des procès-verbaux de l'Académie royale des sciences de Paris, t. 20, f. 335 v° (séance du 3 septembre 1700)

36

LES OBJECTIONS DE ROLLE

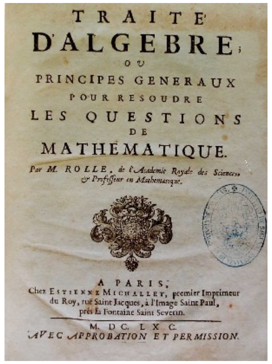
« Difficulté I. Si en geometrie il y a des infiniment grands, infinis les uns des autres ; et des infiniment petits, infiniment les uns des autres ».

- « L'Analyse ordinaire ne traite que des grandeurs finies : celle-ci pénètre jusques dans l'infini même. Elle compare les différences infiniment petites des grandeurs finies ; elle découvre les rapports de ces différences : et par là elle fait connoitre ceux des grandeurs finies qui comparées avec ces infiniment petits sont comme autant d'infinis. On peut même dire que cette Analyse s'étend au-delà de l'infini : car elle ne se borne pas aux différences infiniment petites ; mais elle découvre les rapports des différences de ces différences, ceux encore des différences troisiemes, quatriemes, et ainsi de suite, sans trouver jamais de terme qui la puisse arrêter. De sorte qu'elle n'embrasse pas seulement l'infini ; mais l'infini de l'infini, ou une infinité d'infinis. »

  (Guillaume de l'Hospital, *Analyse des infiniment petits*, préface, p. 1-2)

« Difficulté II. Si une grandeur plus ou moins sa différentielle, peut estre prise pour egale a cette même grandeur ».

« Difficulté III. Si les différentielles sont des zéros absolus ».

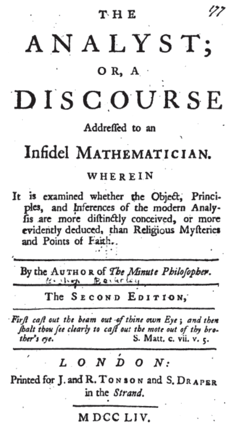

TRAITE D'ALGEBRE ; OU PRINCIPES GENERAUX POUR RESOUDRE LES QUESTIONS DE MATHEMATIQUE.
Par M. ROLLE, de l'Academie Royale des Sciences, & Professeur en Mathematique.
A PARIS, Chez ESTIENNE MICHALLET, premier Imprimeur du Roy, rue Saint Jacques, à l'Image Saint Paul, prés la Fontaine Saint Severin.
M. DC. LXC.
AVEC APPROBATION ET PERMISSION.

37

THE *ANALYST*, DE GEORGE BERKELEY (1734)

« Je ne discute en rien vos conclusions, mais seulement votre logique et votre méthode. Comment démontrez-vous ? De quel objet vous occupez-vous et les concevez-vous clairement ? Avec quels principes progressez-vous ? Quel en est la validité ? Et comment les mettez-vous en œuvre ? »

« J'admets qu'on puisse créer des signes pour dénoter quelque chose ou rien ; et que, par conséquent, dans l'expression primitive
$x + o$, o a pu représenter, soit un incrément, soit rien. Mais alors, quoi que vous lui fassiez représenter, vous devez raisonner en conformités avec notre convention et ne jamais recourir à une ambiguïté. »
(Traduction du père Pèzenas)


THE ANALYST; OR, A DISCOURSE Addressed to an Infidel MATHEMATICIAN. WHEREIN It is examined whether the Object, Principles, and Inferences of the modern Analysis are more distinctly conceived, or more evidently deduced, than Religious Mysteries and Points of Faith.
By the AUTHOR of *The Minute Philosopher*.
The SECOND EDITION.
First cast out the beam out of thine own Eye; and then shalt thou see clearly to cast out the mote out of thy brother's eye. S. Matt. c. vii. v. 5.
LONDON: Printed for J. and R. TONSON and S. DRAPER in the *Strand*.
MDCCLIV.

38

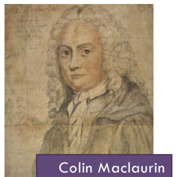
TREATISE OF FLUXIONS DE MACLAURIN (1742)

Réponse aux objections de Berkeley

- « C'est pourquoi, dès que cette pièce [l'Analyste] fut tombée entre mes mains, (…), je formai le dessein de démontrer ces élémens à la manière des Anciens, et de ne les appuyer que sur un petit nombre de principes incontestables, par les démonstrations les plus rigoureuses. »
  (*Traité des fluxions*, trad. par le Père Pézenas,1749, préface, p. ix.)

Base des fluxions selon MacLaurin: un concept de limite tiré de la méthode d'exhaustion, qui n'utilise pas les infinitésimaux.

- « When the certainty of any part of geometry is brought into question, the most effectual way to set the truth in a full light, and to prevent disputes, is to deduce it from axioms or first principles of unexeceptional evidence, by demonstrations of the strictest kind, after the manner of the ancient geometers » (p. 2-3)


Colin Maclaurin (1698-1746)

39

SCIENCES MATHÉMATIQUES AU SIÈCLE DES LUMIÈRES

40

L'*ENCYCLOPÉDIE* (1755)

Article « calcul différentiel » par Jean Le Rond D'Alembert.

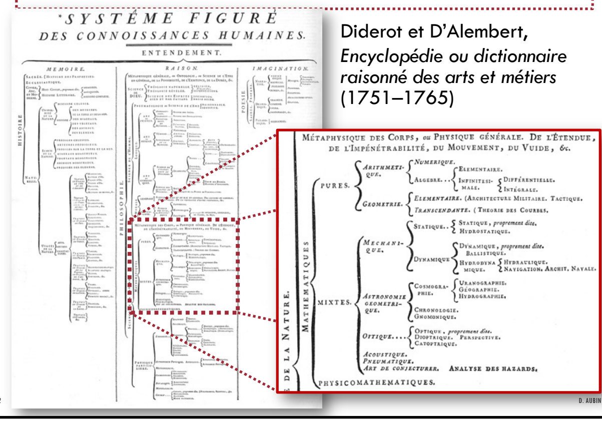
- « M. Newton […] n'a jamais regardé le calcul différentiel comme le calcul des quantités infiniment petites, mais comme la méthode des premieres & dernieres raisons, c'est-à-dire la méthode de trouver les limites des rapports. Aussi cet illustre auteur n'a-t-il jamais différentié des quantités, mais seulement des équations ; parce que toute équation renferme un rapport entre deux variables, & que la différentiation des équations ne consiste qu'à trouver les limites du rapport entre les différences finies des deux variables que l'équation renferme. »
- « Quand une fois on l'aura bien comprise, on sentira que la supposition que l'on y fait de quantités infiniment petites, n'est que pour abréger & simplifier les raisonne-mens ; mais que dans le fond le calcul différentiel ne suppose point nécessairement l'existence de ces quantités ; que ce calcul ne consiste qu'à déterminer algébriquement la limite d'un rapport de laquelle on a déjà l'expression en lignes, & à égaler ces deux limites, ce qui fait trouver une des lignes que l'on cherche. Cette définition est peut-être la plus précise & la plus nette qu'on puisse donner du calcul différentiel »

La notion de limite bien dégagée comme fondement du calcul.

13/01/2022 D. AUBIN - 3H011 41

41

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LUMIÈRES



Diderot et D'Alembert, *Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des arts et métiers* (1751–1765)

13/01/2022 D. AUBIN - 3H011 42

42

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LUMIÈRES: PANORAMA

Mathématiques pures

Calcul des variations.

L'intégration des fractions rationnelles et le théorème fondamental de l'algèbre.

La notion de fonction.

(La théorie d'intégration des équations et systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants.)

(Les équations aux dérivées partielles.)

(Application de l'analyse aux problème du hasard.)

Mathématiques mixtes

La figure de la Terre.

Le problème des trois corps.

Le problème des cordes vibrantes.

(La mécanique analytique.)

(L'hydrodynamique.)

Tendances géométriques et arithmétiques en recul jusqu'à la fin du siècle.

13/01/2022 D. AUBIN - 3H011 43

43