Cours 7

Calcul différentiel et intégral : invention, premiers succès et polémiques

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

IMJ-PRG

LU3MA209

ÉLÉMENTS D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

2023-2024, 2e période

David Aubin
david.aubin@sorbonne-université.fr

10/01/2024 D. AUBIN - LU3MA209 1

1

EMPIRISME ET MATHÉMATIQUES

Platonisme : mathématiques comme moyen d'accès au monde des idées, plus « vrai » que le monde sensoriel.

Une nouvelle philosophie **expérimentale** au 17e siècle.

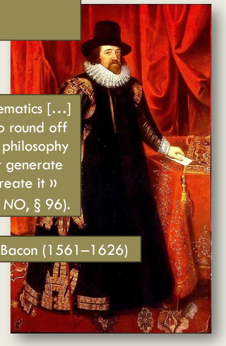
- Le *Nouvel Organon* de Francis Bacon (1620).

Galilée, **Kepler** et **Descartes** proposent des visions concurrentes de la nouvelle science

- Mathématiques comme outils de la pensée et moyen de travail

Des questions ouvertes :

- Quelles est la cause des orbites des planètes autour du Soleil ?
- Quels outils mathématiques permettent de les comprendre correctement ?



« mathematics [...] ought to round off natural philosophy and not generate or procreate it » (Bacon, *NO*, § 96).

Francis Bacon (1561–1626)

2024 D. AUBIN - LU3MA209 2

2

PROGRAMME DE LA SÉANCE

1. Un nouveau calcul: Newton et Leibniz
2. Diffusion du calcul différentiel et intégral
3. La question des fondements
4. Sciences mathématiques au siècle des Lumiètes

2024 D. AUBIN - LU3MA209 3

3

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Isaac Newton (1643-1727)

1

UN NOUVEAU CALCUL

Deux visages

2024 D. AUBIN - LU3MA209 4

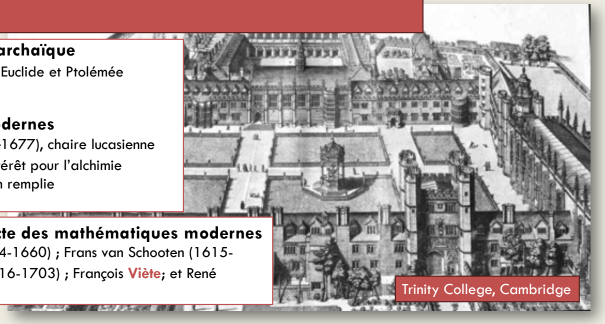
4

LA FORMATION D'UN SAVANT

Un enseignement archaïque
- Quadrivium: Cardan, Euclide et Ptolémée
- Aristotélisme

Des ressources modernes
- Isaac Barrow (1630–1677), chaire lucasienne
- Expérimentalisme : intérêt pour l'alchimie
- Une bibliothèque bien remplie

Étude en autodidacte des mathématiques modernes
William Oughtred (1574-1660) ; Frans van Schooten (1615-1660) ; John Wallis (1616-1703) ; François Viète; et René Descartes.


Trinity College, Cambridge

2024 D. AUBIN - LU3MA209 5

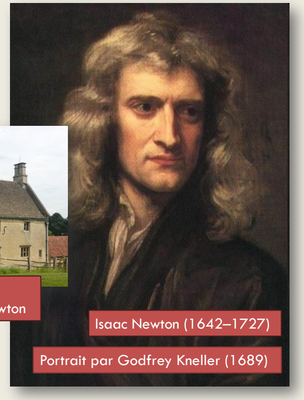
5

ANNUS MIRABILIS

Été 1665 : épidémie de peste, l'université est fermée, les étudiants rentrent chez eux…

Une révolution dans les sciences
- Expériences sur la lumière
- La gravitation (épisode douteux à propos de la pomme)
- Les fluxions : variations instantanées d'une quantité.


Manoir de Woolsthorpe, lieu de naissance de Newton


Isaac Newton (1642–1727)
Portrait par Godfrey Kneller (1689)

2024 D. AUBIN - LU3MA209 6

6

LES « FLUXIONS » DE NEWTON

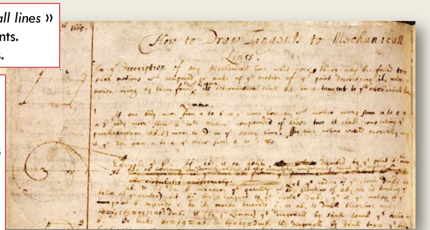
octobre 1665 : « *How to draw tangents to Mechanicall lines* » (photo): courbes comme trajectoires de corps mouvants. Quadrature est l'inverse du problème des tangentes.

Trois versions du calcul infinitésimal par Newton entre 1664 et les années 1690.

1669 – *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* manuscrit connu de quelques mathématiciens anglais (publié en1711): trois règles de calcul.

1670-1671 – Rédaction du *De methodis serierum et fluxionum* (publié en 1736 !): le modèle de la vitesse.

1680 (env.) – *Geometrica curvilinea*: première et dernière raisons (la limite?).


http://www.pbs.org/wgbh/nova/assets/img/newton-legacy/image-03-large.jpg

2024 D. AUBIN - LU3MA209 7

7

1669 – RÈGLES DU CALCUL INTÉGRAL

Règle 1 : Si $y = ax^{\frac{m}{n}}$, alors l'aire sous y est $\frac{an}{n+m}x^{1+\frac{m}{n}}$.

Règle 2 : Si y est donné par la somme de plusieurs termes (ou par un nombre infini de termes), alors l'aire sous y est donnée par la somme des aires de tous les termes.

Règle 3 : Pour calculer l'aire sous une courbe $f(x,y)=0$, il faut exprimer y comme une somme de termes de la forme $y = ax^{\frac{m}{n}}$ et appliquer les règles 1 et 2 [règle fondée sur l'application du binôme de Newton].

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \ldots + x^n$$

2024 D. AUBIN - LU3MA209 8

8

1670 – LES FLUXIONS

Un algorithme de calcul inspiré de la cinématique:

- des quantités qui « fluent » au cours du temps (le mouvement d'un point génère une ligne, celui d'une ligne une surface, etc.)
- les quantités générées par ce mouvement sont appelées les « fluentes »
- $\dot{x}$ les vitesses instantanées correspondantes sont appelées « fluxions »
- $\dot{x}o$ les « moments » correspondent aux incréments infiniment petits par lesquels les quantités augmentent au cours de chaque intervalle infinitésimal de temps.

A TREATISE OF FLUXIONS: OR, AN INTRODUCTION TO Mathematical Philosophy.

CONTAINING A full Explication of that METHOD by which the Most Celebrated Geometers of the present Age have made such vast Advances in MECHANICAL PHILOSOPHY.

A WORK very Useful for those that would know how to apply Mathematicks to Nature.

By CHARLES HAYES, Gent.

LONDON, Printed by Edw. Midwinter, for Dan. Midwinter and Tho. Leigh, at the Rose and Crown in St. Paul's Church-Yard. 1704.

9

LA GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE

Dans les années 1670, abandon du calcul des fluxions « analytique » au profit d'une géométrie des fluxions sans infiniment petits.

Geometrica curvilinea : Méthode des « première et dernière raisons » : les quantités considérées sont géométriques et non infinitésimales.

- Notion de limite d'un rapport de deux quantités.
- Méthode synthétique vs. méthode analytique.

1687: *Principes mathématiques de la philosophie naturelle.*

- Premier exposé publié par Newton proche de *Geometrica curvilinea.*

1691–1692 – Rédaction du *De quadratura curvarum* (publié en 1704)

- version analytique du calcul exposé dans le *Geometrica curvilinea* et les *Principia.*

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

Autore JS. NEWTON, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR. S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES. *Julii* 5. 1686.

LONDINI, Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater.* Prostat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

10

LA LIMITE DANS LES *PRINCIPIA*

LEMME PREMIER.

Les quantités & les raisons des quantités qui tendent continuellement à devenir égales pendant un temps fini, & qui avant la fin de ce temps approchent tellement de l'égalité, que leur différence est plus petite qu'aucune différence donnée, deviennent à la fin égales.

Émilie du Châtelet (1704–1749)

PRINCIPES MATHÉMATIQUES DE LA PHILOSOPHIE NATURELLE, *Par feue Madame la Marquise* DU CHASTELLET. TOME PREMIER.

A PARIS, Chez DESAINT & SAILLANT, rue S. Jean de Beauvais, LAMBERT, Imprimeur-Libraire, rue & à côté de la Comédie Françoise, au Parnasse. M. D.CCLIX. *AVEC APPROBATION ET PRIVILÉGE DU ROI.*

Preuve par l'absurde:
« si on le nie, qu'on suppose qu'elles soient à la fin inégales et que leur dernière différence soit *D*, puisqu'elles ne peuvent pas approcher plus près de l'égalité que cette différence donnée *D*, leur différence ne sera donc pas plus petite que toute différence donnée, ce qui est contre l'hypothèse. »

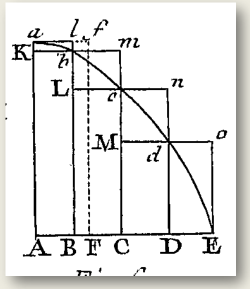
Cf. limite de Cauchy: numérique vs. géométrique.

11

L'INTÉGRATION DANS LES *PRINCIPIA*

LEMME II.

Si dans une figure quelconque AacE, *comprise entre les droites* Aa, AE, *& la courbe* acE, *on inscrit un nombre quelconque de Parallélogrammes* Ab, Bc, Cd, &c. *compris sous les bases égales* AB, BC, CD, *&c. & sous les côtés* Bb, Cc, Dd, *&c. parallèles au côté* Aa *de la figure ; & qu'on acheve les parallélogrammes* akbl, bLcm, cMdn, *&c. qu'on diminue ensuite la largeur de ces parallélogrammes, & qu'on augmente leur nombre à l'infini : les dernieres raisons qu'auront entr'elles la figure inscrite* AKbLcMdD, *la circonscrite* AalbmcndoE, *& la curviligne* AabcdE, *seront des raisons d'égalité.*



12

UNE PREUVE SIMILAIRE À CELLE DE RIEMANN

Car la différence de la figure inſcrite & de la figure circonſcrite, eſt la ſomme des parallélogrammes *K l*, *L m*, *M n*, *D o*, c'eſt-à-dire (à cauſe de l'égalité de toutes les baſes) que cette différence eſt égale au rectangle *A B l a* fait ſur l'une des baſes *K b* & ſur la ſomme *A a*, de toutes les hauteurs ; mais ce rectangle, à cauſe que ſa largeur diminue à l'infini, deviendra plus petit qu'aucun rectangle donné. Donc (par le Lemme premier) la figure inſcrite, la figure circonſcrite, & à plus forte raiſon la figure curviligne intermédiaire ſeront à la fin égales. *C. Q. F. D.*

J'ai commencé par ces Lemmes ; pour éviter de déduire de longues démonſtrations *ad abſurdum*, ſelon la méthode des anciens Géométres.

J'aurois eu des démonſtrations plus courtes par la méthode des indiviſibles ; mais parce que l'hypothéſe des indiviſibles me paroît trop dure à admettre, & que cette méthode eſt par conſéquent peu géométrique ; j'ai mieux aimé employer celle des premieres & dernieres raiſons des quantités qui naiſſent & s'évanouiſſent ; & j'ai commencé par faire voir, le plus briévement que j'ai pu, ce que deviennent les quantités, lorſqu'elles atteignent leurs limites. Je démontrerai par cette méthode tout ce qu'on démontre par celle des indiviſibles ; mais en ayant prouvé le principe, je m'en ſervirai avec plus de ſécurité.

13

ÉLIMINER LES INFINITÉSIMAUX

On peut dire, contre ce principe des premieres & dernieres raiſons, que les quantités qui s'évanouiſſent n'ont point de derniere proportion entr'elles ; parce qu'avant de s'évanouir, la proportion qu'elles ont n'eſt pas la derniere, & que lorſqu'elles ſont évanouies, elles n'en ont plus aucune. Mais on pourroit ſoutenir par le même raiſonnement qu'un corps qui parvient d'un mouvement uniformément retardé à un certain lieu où ſon mouvement s'éteint, n'a point de derniere vîteſſe ; Car, diroit-on, avant que ce corps ſoit parvenu à ce lieu, il n'a pas encore ſa derniere vîteſſe, & quand il l'a atteint, il n'en a aucune, puiſqu'alors ſon mouvement eſt éteint. Or, la réponſe à cet argument eſt facile ; on doit entendre par la derniere vîteſſe de ce corps celle avec laquelle il ſe meut, non pas avant d'avoir atteint le lieu où ſon mouvement ceſſe, non pas après qu'il a atteint ce lieu, mais celle qu'il a dans l'inſtant même qu'il atteint ce dernier lieu & avec laquelle ſon mouvement ceſſe. Il en eſt de même de la derniere raiſon des quantités évanouiſſantes, il faut entendre par

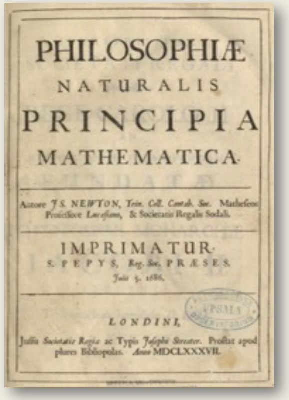
Donc, lorſque je me ſervirai dans la ſuite, pour être plus clair, des mots de *quantités évanouiſſantes*, de *quantités dernieres*, de *quantités très petites*, il ne faut pas entendre par ces expreſſions des quantités d'une grandeur déterminée, mais toujours des quantités qui diminuent à l'infini.

- "Specious algebra is fit enough to find out, but entirely unfit to consign to writing and commit to posterity" (Newton selon Gregory, 1694).
- Un exemple (livre 2, sect. 2, lemme 2):
  - Le produit de deux quantités fluentes A et B et leurs fluxions a et b.
  - L'aire augmente d'une quantité : $(A + ½\, a)(B + ½\, b) - (A - ½\, a)(B - ½\, b) = Ab + Ba$.
- Critiqué par Berkeley, *The analyst* (1734).

14

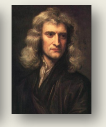
NEWTONIANISME

- La mécanique newtonienne, exposée dans les *Principia* (1687)→ une rupture avec la mécanique de Descartes :
  - Exposé des trois axiomes (ou lois) du mouvement : la loi d'inertie, la loi d'impulsion et la loi d'action / réaction.
  - Les corps sont caractérisés par leur masse, leur étendue et par la notion d'impénétrabilité.
  - Énoncé de la loi d'attraction universelle, qui unifie l'accélération de la pesanteur avec le phénomène d'attraction des corps célestes.



15

CARTÉSIANISME VS. NEWTONIANISME



	Descartes	Newton
Matière	tourbillons, fluides, le continu.	les atomes
Forces	contacts, chocs.	action à distance
Mathématiques	l'algèbre pour faire de la géométrie	le calcul des fluxions, des méthodes nouvelles
	des règles pour la pensée	le calcul des fluxions : un langage pour la physique

16

UN LETTRÉ UNIVERSEL

Famille d'universitaires.

Études de droit à Leipzig (Allemagne)

Mission diplomatique à Paris (1672-1675).

- Rencontre **Christian Huygens** (1629–1695) à Paris en 1672; **Robert Hooke** (1635–1703) et **Robert Boyle** (1627–1691) à Londres en 1673.

Devient bibliothécaire des ducs de Hanovre en 1676; reste dans ce poste pendant plus de 40 ans.

Une œuvre manuscrite gigantesque (50 000 pages), correspondance, mais peu de publications.

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716)

2024 D. AUBIN - LU3MA209 17

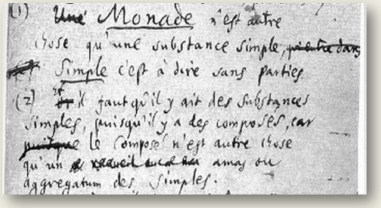
17

LEIBNIZ, PHILOSOPHE

« Les mathématiciens ont autant besoin d'être philosophes que les philosophes d'être mathématiciens. »

Œuvre importante en logique et combinatoire. Cherche à réduire tout raisonnement à la combinaison d'éléments de base, tels que lettres, nombres, sons et couleurs…

Les « **monades** »:
indivisibles, mais toujours actives, elles sont le miroir de l'univers infini et forment une échelle hiérarchique du presque rien à Dieu.



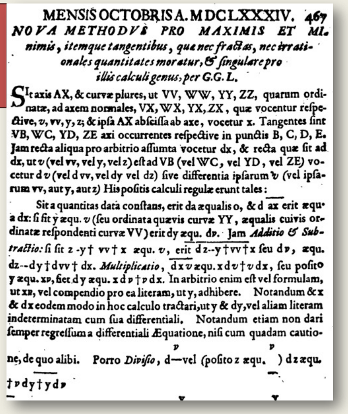
2024 D. AUBIN - LU3MA209 18

18

NOUVELLE MÉTHODE

« Nova Methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus », *Acta Eruditorum*, **octobre 1684**.

- Texte court, elliptique et confus (publié à la hâte par crainte d'une indélicatesse de Tschirnhaus)
- Introduction de la différentielle (« *differentia* ») et de sa notation.
- Enoncé des principales règles de la différentiation
- Introduction du quotient dy/dx pour exprimer la pente de la tangente en un point d'une courbe.


MENSIS OCTOBRIS A. MDCLXXXIV. 467

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MInimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & singulare pro illis calculi genus, per G.G.L.

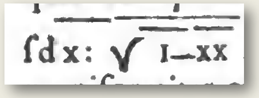
Sit axis AX, & curvæ plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatæ, ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quæ vocentur respective, v, vv, y, z; & ipsa AX abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint VB, WC, YD, ZE axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur dx, & recta quæ sit ad dx, ut v (vel vv, vel y, vel z) est ad VB (vel WC, vel YD, vel ZE) vocetur d v (vel d vv, vel dy vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsarum vv, aut y, aut z) His positis calculi regulæ erunt tales:

Sit a quantitas data constans, erit da æqualis o, & d ax erit æqu. a dx: si sit y æqu. v (seu ordinata quævis curvæ YY, æqualis cuivis ordinatæ respondenti curvæ VV) erit dy æqu. dv. Jam *Additio & Subtractio*: si sit z -y † vv † x æqu. v, erit d z--y † vv † x seu dv, æqu. dz--dy † dvv † dx. *Multiplicatio*, d x v æqu. x d v † v dx, seu posito y æqu. xv, fiet d y æqu. x d v † v dx. In arbitrio enim est vel formulam, ut xv, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum & x & dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y & dy, vel aliam literam indeterminatam cum sua differentiali. Notandum etiam non dari semper regressum a differentiali Æquatione, nisi cum quadam cautione, de quo alibi. Porro *Divisio*, d v/y vel (posito z æqu. v/y) d z æqu. † v d y † y d v

2024 D. AUBIN - LU3MA209 19

19

ANALYSE INFINITÉSIMALE



« De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum », *Acta Eruditorum*, juin **1686**.

- Le mémoire traite du problème des quadratures
- Inspiré d'un mémoire de John Craig consacré aux quadratures et utilisant la notation différentielle introduite par Leibniz en 1684
- Leibniz y introduit le symbole d'intégration et définit les opération de « sommation » et de « différentiation » l'une par rapport à l'autre.

2024 D. AUBIN - LU3MA209 20

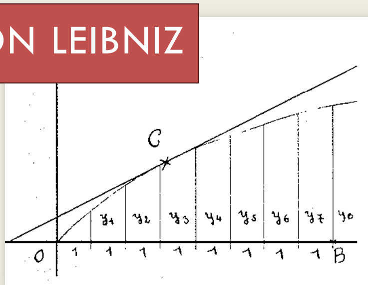
20

INTÉGRATION SELON LEIBNIZ

Considérée comme une somme infinie

Leibniz sait calculer des sommes infinies comme par exemple celle-ci qui lui a été soumise par Huygens:

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{2}{r(r+1)} = 2 - \frac{2}{n+1}$$



$$\int y = \sum y_i$$

2024 D. AUBIN - LU3MA209 21

21

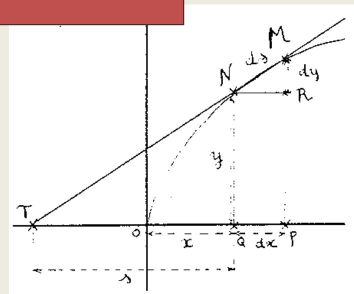
TRIANGLE CARACTÉRISTIQUE

TNQ et MNR sont des triangles semblables.

Donc MR/NR=NQ/TQ une constante quelques soient les grandeurs dx et dy.

Les règles du calcul différentiel:

$d(x+y) = dx + dy$;
$d(xy) = xdy + ydx$;
$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$; et $d(x^n) = nx^{n-1}dx$.



2024 D. AUBIN - LU3MA209 22

22

LE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL LEIBNIZIEN

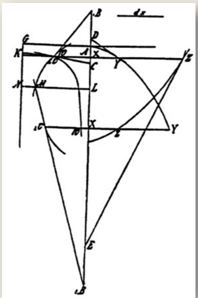
"Appelons alors dx un segment de droite choisi arbitrairement et dv (dw, dy ou dz), c'est-à-dire la différence de v ("differentia") (de w, de y ou de z) un segment qui soit avec dx comme v (w, y ou z) avec XB (XC, XD ou XE)".

"Soit a une constante donnée, da sera égal à 0 et $\overline{dax}$ sera égal à adx. Si y est égal à v (c'est-à-dire toute ordonnée de la courbe YY égale à l'ordonnée correspondante de la courbe VV), dy sera égal à dv.

Maintenant l'*Addition et la Soustraction* : si $z - y + w + x$ est égal à v, $\overline{dz - y + w + x}$ ou dv sera égal à $dz - dy + dw + dx$.

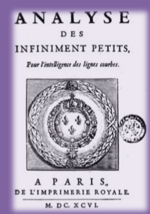
Multiplication : $\overline{dxv}$ est égal à $xdv + vdx$, c'est-à-dire, en posant y égal à xv, on aura dy égal à $xdv + vdx$. Car on a tout loisir d'employer, soit l'expression xv, soit à sa place pour abréger, une lettre, par exemple y. Remarquons que dans ce calcul, x et dx sont traités de la même façon, de même que y et dy, ou toute autre lettre indéterminée et sa différentielle. Remarquons également que la démarche inverse, à partir de l'équation différentielle, n'est pas toujours possible, si ce n'est avec une certaine précaution dont nous parlerons ailleurs.

Ensuite, la *Division* : $d\frac{v}{y}$ ou (en posant z égal à $\frac{v}{y}$) dz est égal à $\frac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$



2024 D. AUBIN - LU3MA209 23

23



DIFFUSION DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

2024 D. AUBIN - LU3MA209 24

24

RÉCEPTION LONGUE


Jacques Bernoulli (1654-1705)

Jacques Bernoulli (1654–1705):

- « Je pense que vous, Monsieur, y cachez les traces d'une forme de mathématiques plus sublime que je n'ai pas encore réussi à pénétrer à l'aide de l'analyse cartésienne ordinaire. […] Si vous me jugiez digne de partager avec moi un rayon de lumière de votre méthode […], je deviendrai non seulement un simple admirateur, mais le plus dévoué propagateur [de votre méthode] » — lettre du 15 décembre 1687.


Jean I Bernoulli (1667-1748)

Jean Bernoulli (1667–1748), son frère:

- « Par l'incomparable Leibniz fut inventé le fameux calcul appelé différentiel par lequel toutes les questions qui vont au-delà de l'algèbre commune et des courbes exclues de la géométrie par Descartes sont traitées et exprimées par des équations » — leçon inaugurale à l'université de Bâle (1705).

2024 D. AUBIN - LU3MA209 25

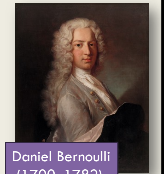
25

LA FAMILLE BERNOULLI

- Nicolas (1623-1708
  - Jacques I (1654-1705)
  - Nicolas I (1662-1716)
    - Nicolas II (1687-1759)
  - Jean I (1667-1748)
    - Nicolas III (1695-1726)
    - Daniel (1700-1782)
    - Jean II (1710-1790)
      - Jacques II (1759-1789)
      - Jean II (1744-1807)


Jacques Bernoulli (1654-1705)

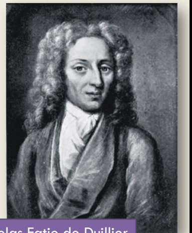

Jean I Bernoulli (1667-1748)


Daniel Bernoulli (1700–1782)

2024 D. AUBIN - LU3MA209 26

26

POLÉMIQUES


Nicolas Fatio de Duillier (1664-1753)

La querelle est initiée par Nicolas Fatio de Duillier, proche de Newton, dans son *Linea brevissimi descensus investigatio geometrica* (1699) :

- « Convaincu par l'évidence des faits, je reconnais que Newton fut le premier et de plusieurs années le plus ancien inventeur de ce calcul. »

John Keill (1671–1721) in *Transactions of the Royal Society* en 1711:

- accuse Leibniz d'avoir plagié Newton.

2024 D. AUBIN - LU3MA209 27

27

L'INSTITUTIONNALISATION DES SCIENCES : LES ACADÉMIES

Les précédents italiens (début XVII^e s.)

- Académies de Rome, des lynx [*lincei*]), etc.

La Royal Society de Londres (1662).

- indépendante de l'Etat, mais privilège du roi; membres fort nombreux, dirige l'observatoire de Greenwich.


Jean-Baptiste Colbert présentant les membres de l'Académie royale des sciences à Louis XIV (H. Testelin, d'après une gravure de Lebrun)

L'Académie royale des sciences de Paris (1666).

- héritière de l'Académie de Mersenne, du bureau d'adresse de Théophraste Renaudot (privées).
- créée par **Colbert** en 1666. L'Observatoire de Paris en 1667 sous l'impulsion de l'Académie.

2024 D. AUBIN - LU3MA209 28

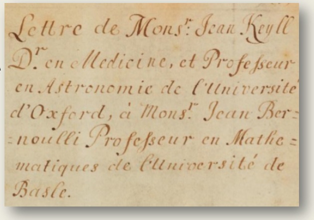
28

COMITÉ DE LA ROYAL SOCIETY

Leibniz s'en offusque ; un comité de la Royal Society est établi qui tranche en faveur de Newton, président depuis 1703 et qui rédige lui-même le rapport !

« Il faut […] qu'il [Leibniz] renonce au droit qu'il prétend avoir à la méthode différentielle de M. Newton en tant que second inventeur : les seconds inventeurs n'ont pas de droit ».

Poursuite de la querelle avec des accents nationalistes: deux écoles en compétition
- analyse infinitésimale sur le continent
- calcul des fluxions en Angleterre.


Lettre de Mons.r Jean Keyll D.r en Medicine, et Professeur en Astronomie de l'Université d'Oxford, à Mons.r Jean Bernoulli Professeur en Mathematiques de l'Université de Basle.

Newton PapersMS Add.3968

2024 D. AUBIN - LU3MA209 29

29

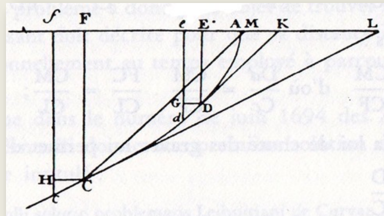
DES DÉFIS

« Trouver une ligne de descente, dans laquelle le corps pesant descend uniformément, et approche également l'horizon en temps égaux. L'Analyse de Messieurs les cartésiens le donnera peut-être aisément. » Leibniz in *Nouvelles de la République des Lettres*, 1687, p. 956

Le problème de la courbe **isochrone**:
- Solution sans l'analyse par Huygens
- Solution analytique par les Bernoulli.

Le problème du **brachistochrone**:
- La courbe de plus rapide descente
- Posé par Leibniz en 1696.
- Solutions en 1697.

Des solutions en deux parties :
1. le problème physique est ramené à un problème de géométrie
2. résolution de ce problème grâce au calcul différentiel et intégral.



2024 D. AUBIN - LU3MA209 30

30

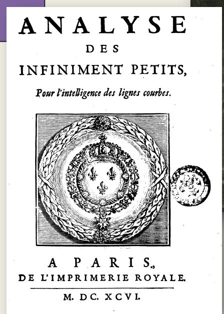
UN PREMIER TRAITÉ

L'*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1696), le premier manuel.

Guillaume de l'Hôpital, auteur anonyme.

Il apprend les techniques de l'analyse infinitésimale lors d'un voyage de Jean Bernoulli à Paris en 1691–1692.

Ne développe pas le calcul intégral, car il pense que Leibniz prépare un ouvrage.


ANALYSE DES INFINIMENT PETITS, Pour l'intelligence des lignes courbes.

A PARIS, DE L'IMPRIMERIE ROYALE. M. DC. XCVI.


Guillaume de l'Hospital (1661-1704)

2024 D. AUBIN - LU3MA209 31

31

À L'ACADÉMIE DES SCIENCES

L'Hospital entre à l'Académie en juin 1693.

En mai et août 1693, puis en juin 1694, trois mémoires sont présentés utilisant – sans les détailler – les méthodes du calcul leibnizien.

De juin à novembre 1695, **Pierre de Varignon** présente quatre mémoires utilisant le nouveau calcul.

→ une synthèse entre physique newtonienne et analyse leibnizienne


Pierre Varignon (1654-1722)

2024 D. AUBIN - LU3MA209 32

32

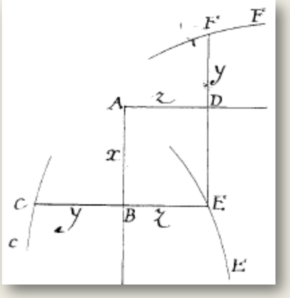
L'ARITHMÉTISATION DU MOUVEMENT

Varignon dans *Registres manuscrits des procès-verbaux de l'Académie royale des sciences de Paris*, t. 17, f. 298 v° - 299 r. [« 1[er] mémoire »], **1698.**

« Pour le voir (tous les angles rectilignes de la figure qu'on voit icy, etant droits) soient $AB = x$ les espaces parcourus en quelque sens qu'on voudra, $BE = z$ les temps employez à les parcourir, et $BC = y = DF$ les vitesses à chaque point B de ces espaces.

[...]

De sorte que cette vitesse (y), dans chaque instant pouvant être regardée comme uniforme, a cause que $y \pm dy = y$, la notion seule des vitesses uniformes donnera $y = \frac{dx}{dz}$ pour la regle de tous les mouvemens variés comme on voudra, c'est a dire quelque rapport d'espace, de temps, ou de vitesse, qu'on suppose ; la vitesse de chaque instant etant toujours et par tout egale au quotient de l'espace parcouru dans chaque instant divisé par cette même differentielle de temps. »



2024 D. AUBIN - LU3MA209 33

33

VARIGNON ET LA DYNAMIQUE

Le 30 janvier 1700, Varignon présente un nouveau mémoire intitulé « Manière générale de déterminer les forces, les vitesses, les espaces, et les temps… ».

La question des forces centrales introduites par Newton dans ses *Principia* et de l'accroissement de vitesse (i.e. de l'accélération) qu'elles produisent :

« De plus les espaces parcourus par un corps mû d'une force constante et continuellement appliquée, telle qu'on conçoit d'ordinaire la pesanteur, étant en raison composée de cette force et des quarrés des temps employés à les parcourir ; l'on aura aussi $ddx = ydt^2$, ou $y = \frac{ddx}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$. Ce qui fait encore une Règle $y = \frac{dv}{dt}$, qui avec la précédente $v = \frac{dx}{dt}$, satisfait à tout ce qu'on se propose icy de résoudre. »

2024 D. AUBIN - LU3MA209 34

34

LA QUESTION DES FONDEMENTS

2024 D. AUBIN - LU3MA209 35

35

POLÉMIQUES ACADÉMIQUES

Philippe de La Hire (1640–1718)

Dès février 1697, **Philippe de La Hire** présente un court mémoire intitulé « Remarque sur l'usage qu'on doit faire de quelques suppositions dans la méthode des infiniment petits » :

- sans précautions, la « méthode des infinis » peut conduire à des erreurs
- la « géométrie ordinaire » (ou « géométrie des anciens ») demeure un garde fou nécessaire.

Le 6 août 1697, Varignon écrit à Jean Bernoulli :

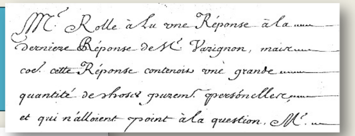
« M. le Marquis de l'Hospital est encore à la campagne de sorte que je me trouve seul ici chargé de la défense des infiniment petits, dont je suis le vray martyr tant j'ay desja soutenu d'assauts pour eux contre certains mathématiciens du vieux stile, qui chagrins de voir que par ce calcul les jeunes gens les attrapent et même les passent, font tout ce qu'ils peuvent pour la décrier, sans qu'on puisse obtenir d'eux d'écrire contre ».

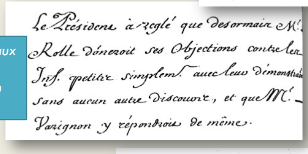
1700 – 1701: débat entre Michel Rolle et Varignon à l'Académie.

2024 D. AUBIN - LU3MA209 36

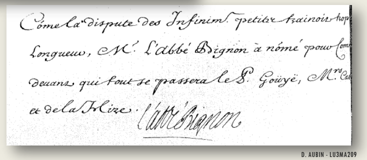
36

ROLLE VS VARIGNON


Mr. Rolle a lu une Réponse à la derniere Réponse de Mr. Varignon, mais come cette Réponse contenoit une grande quantité de choses purement personelles et qui n'alloient point à la question. Mr.


Le Président a reglé que desormais Mr. Rolle dôneroit ses Objections contre les Inf. petits simplement avec leur démonstration sans aucun autre discours, et que Mr. Varignon y répondroit de même.

Registres manuscrits des procès-verbaux de l'Académie royale des sciences de Paris, t. 20, f. 183 r° - v° (séance du 21 mai 1700)


Côme la dispute des Infinim. petits trainoit trop Longueur, Mr. l'abbé Bignon a nômé pour com... devant qui tout se passera le P. Goüyë, Mrs. Ca... et de la Hire. l'abbé Bignon

Registres manuscrits des procès-verbaux de l'Académie royale des sciences de Paris, t. 20, f. 335 v° (séance du 3 septembre 1700)

2024 D. AUBIN - LU3MA209 37

37

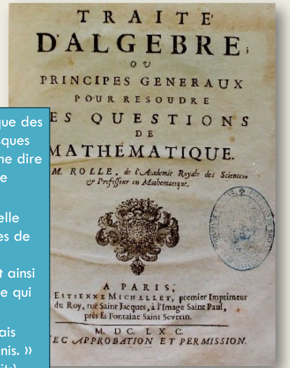
OBJECTIONS DE ROLLE

« Difficulté I. Si en geometrie il y a des infiniment grands, infinis les uns des autres ; et des infiniment petits, infiniment les uns des autres ».

« Difficulté II. Si une grandeur plus ou moins sa différentielle, peut estre prise pour egale a cette même grandeur ».

« Difficulté III. Si les différentielles sont des zéros absolus ».

« L'Analyse ordinaire ne traite pas que des grandeurs finies : celle-ci pénètre jusques dans l'infini même. […] On peut même dire que cette Analyse s'étend au-delà de l'infini : car elle ne se borne pas aux différences infiniment petites ; mais elle découvre les rapports des différences de ces différences, ceux encore des différences troisiemes, quatriemes, et ainsi de suite, sans trouver jamais de terme qui la puisse arrêter. De sorte qu'elle n'embrasse pas seulement l'infini ; mais l'infini de l'infini, ou une infinité d'infinis. »
(l'Hospital, *Analyse des infiniment petits*)



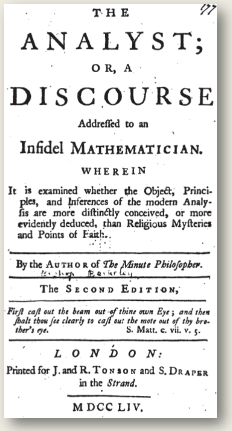
2024 D. AUBIN - LU3MA209 38

38

THE *ANALYST*, GEORGE BERKELEY (1734)

« Je ne discute en rien vos conclusions, mais seulement votre logique et votre méthode. Comment démontrez-vous ? De quel objet vous occupez-vous et les concevez-vous clairement ? Avec quels principes progressez-vous ? Quel en est la validité ? Et comment les mettez-vous en œuvre ? »

« J'admets qu'on puisse créer des signes pour dénoter quelque chose ou rien ; et que, par conséquent, dans l'expression primitive $x + o$, o a pu représenter, soit un incrément, soit rien. Mais alors, quoi que vous lui fassiez représenter, vous devez raisonner en conformités avec notre convention et ne jamais recourir à une ambiguïté. »
(Traduction du père Pèzenas)



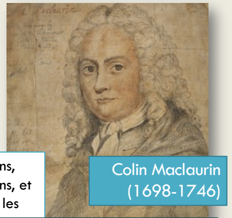
2024 D. AUBIN - LU3MA209 39

39

TREATISE OF FLUXIONS DE MACLAURIN (1742)

Réponse aux objections de Berkeley

« C'est pourquoi, dès que cette pièce [l'Analyste] fut tombée entre mes mains, (…), je formai le dessein de démontrer ces élémens à la manière des Anciens, et de ne les appuyer que sur un petit nombre de principes incontestables, par les démonstrations les plus rigoureuses. »
(*Traité des fluxions*, trad. par le Père Pézenas,1749, préface, p. ix.)


Colin Maclaurin (1698-1746)

« When the certainty of any part of geometry is brought into question, the most effectual way to set the truth in a full light, and to prevent disputes, is to deduce it from axioms or first principles of unexceptional evidence, by demonstrations of the strictest kind, after the manner of the ancient geometers » (p. 2-3)

Base des fluxions selon MacLaurin : un concept de limite tiré de la méthode d'exhaustion, qui n'utilise pas les infinitésimaux.

2024 D. AUBIN - LU3MA209 40

40

SCIENCES MATHÉMATIQUES AU SIÈCLE DES LUMIÈRES

Le triomphe de l'analyse

41

L'*ENCYCLOPÉDIE* (1755)

Article « calcul différentiel » par Jean Le Rond D'Alembert.

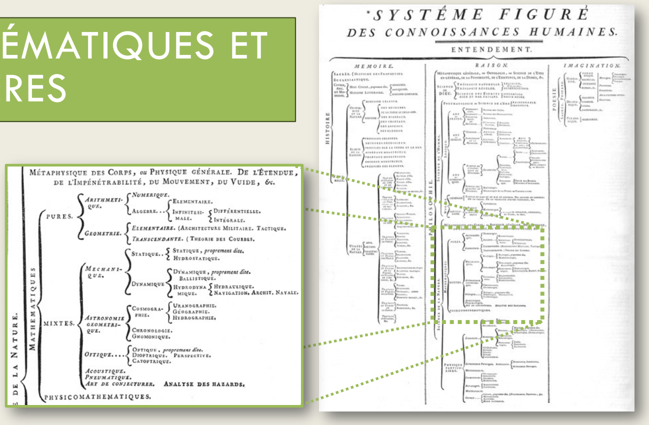
- « M. Newton […] n'a jamais regardé le calcul différentiel comme le calcul des quantités infiniment petites, mais comme la méthode des premieres & dernieres raisons, c'est-à-dire la méthode de trouver les limites des rapports. Aussi cet illustre auteur n'a-t-il jamais différentié des quantités, mais seulement des équations ; parce que toute équation renferme un rapport entre deux variables, & que la différentiation des équations ne consiste qu'à trouver les limites du rapport entre les différences finies des deux variables que l'équation renferme. »
- « Quand une fois on l'aura bien comprise, on sentira que la supposition que l'on y fait de quantités infiniment petites, n'est que pour abréger & simplifier les raisonne-mens ; mais que dans le fond le calcul différentiel ne suppose point nécessairement l'existence de ces quantités ; que ce calcul ne consiste qu'à déterminer algébriquement la limite d'un rapport de laquelle on a déjà l'expression en lignes, & à égaler ces deux limites, ce qui fait trouver une des lignes que l'on cherche. Cette définition est peut-être la plus précise & la plus nette qu'on puisse donner du calcul différentiel »

La notion de limite dégagée comme fondement du calcul. Mais quelle limite ?

42

MATHÉMATIQUES ET LUMIÈRES

Diderot et D'Alembert, *Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers* (1751–1765)



43

MATHÉMATIQUES ET LUMIÈRES : PANORAMA

Mathématiques pures

Calcul des variations.

L'intégration des fractions rationnelles et le théorème fondamental de l'algèbre.

La notion de fonction.

(La théorie d'intégration des équations et systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants.)

(Les équations aux dérivées partielles.)

(Application de l'analyse aux problème du hasard.)

Mathématiques mixtes

La figure de la Terre.

Le problème des trois corps.

Le problème des cordes vibrantes.

(La mécanique analytique.)

(L'hydrodynamique.)

Tendances géométriques et arithmétiques en recul jusqu'à la fin du siècle.

44