

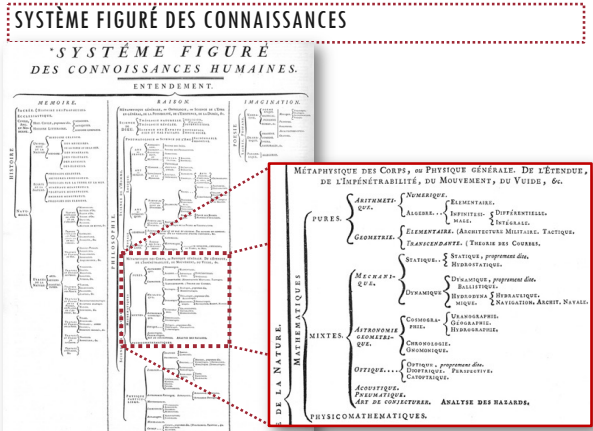
Cours 8:
Mathématiques pure
et mathématiques mixtes
au siècle des Lumières

LU3MA209
ÉLÉMENTS D'HISTOIRE DES
MATHÉMATIQUES

2021-2022, 2^e période
David Aubin
david.aubin@sorbonne-universite.fr

13/01/2022 D. AUBIN - LU3MA209 1

1



SYSTÈME FIGURÉ DES CONNAISSANCES
"SYSTÈME FIGURÉ
DES CONNOISSANCES HUMAINES."
ENTENDEMENT

MÉTAPHYSIQUE DES CORPS, ou PHYSIQUE GÉNÉRALE. DE L'ÉTENDUE, DE L'IMPÉNÉTRABILITÉ, DU MOUVEMENT, DU VUIDE, &c.

MATHÉMATIQUES

PURES: ARITHMÉTIQUE, ALGÈBRE, GÉOMÉTRIE, ÉLÉMENTAIRE, TRANSCENDENTE, MÉCANIQUE, STATIQUE, OPTIQUE, ACOUSTIQUE, PNEUMATIQUE, OPTIQUE, ANALYSE DES HASARDS, PHYSICOMATHÉMATIQUES.

MIXTES: MÉCANIQUE, STATIQUE, OPTIQUE, ACOUSTIQUE, PNEUMATIQUE, OPTIQUE, ANALYSE DES HASARDS, PHYSICOMATHÉMATIQUES.

13/01/2022 D. AUBIN - LU3MA209 2

2

RAPPEL — SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LUMIÈRES: PANORAMA

<p>Mathématiques pures</p> <p>Calcul des variations. L'intégration des fractions rationnelles et le théorème fondamental de l'algèbre. La notion de fonction. (La théorie d'intégration des équations et systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants.) (Les équations aux dérivées partielles.) (Application de l'analyse aux problème du hasard.)</p>	<p>Mathématiques mixtes</p> <p>La figure de la Terre. Le problème des trois corps. Le problème des cordes vibrantes. (La mécanique analytique.) (L'hydrodynamique.) Tendances géométriques et arithmétiques en recul jusqu'à la fin du siècle.</p>
---	---

13/01/2022 D. AUBIN - LU3MA209 3

3

PROGRAMME DE LA SÉANCE

1. L'Encyclopédie et les mathématiques des Lumières
2. Mathématiques mixtes : la figure de la Terre
3. Mathématiques pures : la notion de fonction
4. Mathématiques mixtes : les cordes vibrantes

13/01/2022 D. AUBIN - LU3MA209 4

4



L'ENCYCLOPÉDIE

Les mathématiques des Lumières

13/01/2022

D. AUBIN - LUTRADA309 5

5

L'ENCYCLOPÉDIE, OU DICTIONNAIRE RAISONNÉ DES SCIENCES DES ARTS ET DES MÉTIERS (1751—1765)

« Le but d'une encyclopédie est de rassembler les connaissances éparses sur la surface de la terre; d'en exposer le système général aux hommes avec qui nous vivons, et de le transmettre aux hommes qui viendront après nous; afin que les travaux des siècles passés n'aient pas été inutiles pour les siècles qui succéderont; que nos neveux devenant plus instruits, deviennent en même temps plus vertueux et plus heureux; et que nous ne mourions pas sans avoir bien mérité du genre humain. » (Diderot, article ENCYCLOPÉDIE)

<http://enccre.academie-sciences.fr/encyclopedie/>

13/01/2022

D. AUBIN - LUTRADA309 6

6

L'ENCYCLOPÉDIE: CHRONOLOGIE

Denis Diderot (1713-1784)

1745 – Association de libraires pour traduire la *Cyclopaedia or an Universal dictionary of arts and sciences* d'Ephraim Chambers (2 vol., 1728). Gua de Malves, académicien, organise le travail.

1747 – Diderot et D'Alembert remplacent *Gua de Malves* et mettent en place un projet plus ambitieux (35 volumes au final, dont 17 de textes)


1749 – Diderot emprisonné à Vincennes (suite à la parution de sa *Lettre aux aveugles*), puis libéré.

1751 – Parution du premier tome contenant le Discours préliminaire de D'Alembert ainsi que le « système figuré des connaissances humaines ».

1752 – Violentes attaques des jésuites et des jansénistes suivies d'un arrêt du conseil d'Etat. La publication reprend cependant.

1759 – Après une violente campagne, nouvelle interdiction (définitive), suivie d'une condamnation papale.

1765 – Parution des dix derniers volumes de textes, sans privilège et sous une adresse étrangère (+ onze volumes de planches publiés entre 1765 et 1772).



13/01/2022

D. AUBIN - LUTRADA309 7


7

LE « DISCOURS PRÉLIMINAIRE », DE D'ALEMBERT

« Rien n'est plus incontestable que l'existence de nos sensations [...]

« par des opérations & des abstractions successives de notre esprit, nous dépouillons la matière de presque toutes ses propriétés sensibles, pour n'envisager en quelque manière que son phantôme; & l'on doit sentir d'abord que les découvertes auxquelles cette recherche nous conduit, ne pourront manquer d'être fort utiles toutes les fois qu'il ne sera point nécessaire d'avoir égard à l'impénétrabilité des corps; par exemple, lorsqu'il sera question d'étudier leur mouvement, en les considérant comme des parties de l'espace, figurées, mobiles, & distantes les unes des autres. [...]

« Mais telle est la marche de l'esprit dans ses recherches, qu'après avoir généralisé ses perceptions jusqu'au point de ne pouvoir plus les décomposer davantage, il revient ensuite sur ses pas, récompose de nouveau ces perceptions mêmes, & en forme peu à peu & par gradation, les êtres réels qui sont l'objet immédiat & direct de nos sensations. Ces êtres, immédiatement relatifs à nos besoins, sont aussi ceux qu'il nous importe le plus d'étudier; les abstractions mathématiques nous en facilitent la connaissance; mais elles ne sont utiles qu'autant qu'on ne s'y borne pas. »



Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783)


13/01/2022

D. AUBIN - LUTRADA309 8

8

« MATHÉMATIQUES »

« Les Mathématiques se divisent en deux classes ; la première, qu'on appelle **Mathématiques pures**, considère les propriétés de la grandeur d'une manière abstraite : or la grandeur sous ce point de vue, est ou calculable, ou mesurable ; dans le premier cas, elle est représentée par des nombres, dans le second, par l'étendue ; dans le premier cas les Mathématiques pures s'appellent Arithmétique, dans le second Géométrie. [...] La seconde classe s'appelle **Mathématiques mixtes** ; elle a pour objet les propriétés de la grandeur concrète, en tant qu'elle est mesurable ou calculable ; nous disons de la grandeur concrète, c'est-à-dire de la grandeur envisagée dans certains corps ou sujets particuliers. [...] Du nombre des Mathématiques mixtes sont la Mécanique, l'Optique, l'Astronomie, la Géographie, la Chronologie, l'Architecture militaire, l'Hydrostatique, l'Hydraulique, l'Hydrographie ou Navigation, &c. »



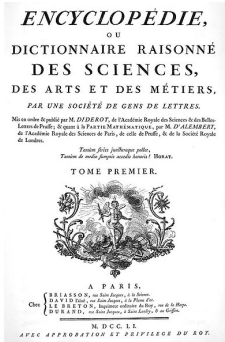
— D'Alembert, art. MATHÉMATIQUE OU MATHÉMATIQUES (*Encyclopédie*, t. X, 1765).

D. AUBIN - LIT284209 9

9

MATHÉMATIQUES ET LUMIÈRES

« Faites naître, s'il est possible, des géomètres parmi ces peuples ; c'est une semence qui produira des philosophes avec le tems, & presque sans qu'on s'en aperçoive. L'orthodoxie la plus délicate & la plus scrupuleuse n'a rien à démêler avec la Géométrie. Ceux qui croiroient avoir intérêt de tenir les esprits dans les ténèbres, fussent-ils assez prévoyans pour pressentir la suite des progrès de cette science, manqueroient toujours de prétexte pour l'empêcher de se répandre. Bientôt l'étude de la Géométrie conduira à celle de la mécanique ; celle-ci mena comme d'elle-même & sans obstacle, à l'étude de la saine Physique ; & enfin la saine Physique à la vraie Philosophie, qui par la lumière générale & prompte qu'elle répandra, sera bientôt plus puissante que tous les efforts de la superstition ; car ces efforts, quelque grands qu'ils soient, deviennent inutiles dès qu'une fois la nation est éclairée. »



— D'Alembert, art. GÉOMÈTRE, t. VII.


D. AUBIN - LIT284209 10

10

LES LIMITES DES MATHÉMATIQUES

**Histoire naturelle, générale et particulière, avec la description du cabinet du Roy, tome premier, 1749.*

- « Il est vrai que cette union des Mathématiques & de la Physique ne peut se faire que pour un très-petit nombre de sujets ; il faut pour cela que les phénomènes que nous cherchons à expliquer, soient susceptibles d'être considérés d'une manière abstraite, & que de leur nature ils soient dénués de presque toutes qualités physiques, car pour peu qu'ils soient composés, le calcul ne peut plus s'y appliquer. »
- « Lorsque les sujets sont trop compliqués pour qu'on puisse y appliquer avec avantage le calcul & les mesures, comme le sont presque tous ceux de l'Histoire Naturelle & de la Physique particulière, il me paroît que la vraie méthode de conduire son esprit dans ces recherches, c'est d'avoir recours aux observations, de les rassembler, d'en faire de nouvelles, & en assez grand nombre pour nous assurer de la vérité des faits principaux, & de n'employer la méthode mathématique que pour estimer les probabilités des conséquences qu'on peut tirer de ces faits ; surtout il faut tâcher de les généraliser & de bien distinguer ceux qui sont essentiels de ceux qui ne sont qu'accessoirs au sujet que nous considérons ; il faut ensuite les lier ensemble par les analogies, confirmer ou détruire certains points équivoques, par le moyen des expériences, former son plan d'explication sur la combinaison de tous ces rapports, & les présenter dans l'ordre le plus naturel. »



Georges Leclerc, comte de Buffon
(1707-1788)

D. AUBIN - LIT284209 11

11

MATHÉMATIQUES POUR LA FORMATION DE L'ÉLITE

1679: École royale d'artillerie de Douai

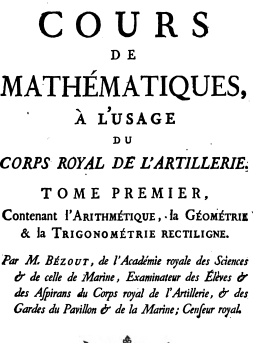
1720: cinq écoles royales d'artillerie

1748: École du génie à Mézières (un examen d'entrée)

1756: École de l'Artillerie à La Fère

1756-1763: Guerre de Sept Ans.

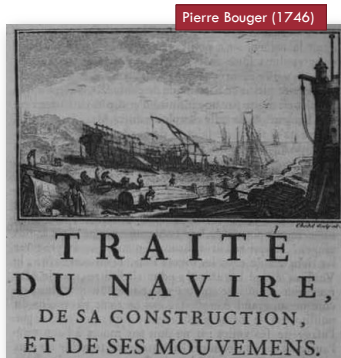
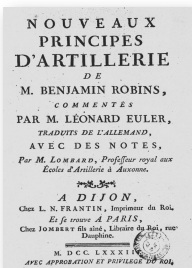
1764: Étienne Bézout à l'École des gardes du pavillon et de la marine.



D. AUBIN - LIT284209 12

12

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES À LA GUERRE



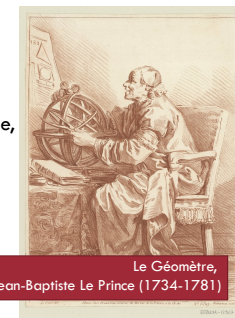
13/01/2022

D. AUBIN - LUTRIMAP09 13

13

MATHÉMATIQUES AU XVIII^E SIÈCLE

- « Coincées » entre les grandes inventions du 17^e siècle (géométrie algébrique, calcul différentiel) et les « révolutions » du 19^e siècle (géométrie non-euclidienne, rigueur, algèbres abstraites, etc.).
- Exploitation du calcul différentiel:
 - mathématiques pures (calcul des variations, etc.);
 - mathématiques mixtes (mécanique, hydrodynamique, etc.).
- Les crises de l'analyse:
 - les fondements;
 - l'adéquation théorie-observation.
- Le triomphe de l'analyse.
- Deux grandes figures du milieu du 18^e siècle: Euler et D'Alembert.



13/01/2022

D. AUBIN - LUTRIMAP09 14

14

JEAN LE ROND D'ALEMBERT

- 1717: naissance. fils naturel du chevalier Destouches et de Mme de Tençin, il est déposé bébé devant l'église Saint-Jean le Rond à Paris.
- Études au Collège des Quatre Nations.
- 1741: membre de l'Académie royale des sciences à Paris.
- 1743: *Traité de Dynamique*.
- 1751–1772: avec Denis Diderot, rédacteur en chef de l'*Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers*.
- 1754: Académie française.
- 1758: *Encyclopédie* interdite.
- 1783: mort.



13/01/2022

D. AUBIN - LUTRIMAP09 15

15

BIOGRAPHIE DE LEONHARD EULER

- Né à Bâle (Suisse) en 1707. Proche de la famille Bernoulli.
- 1727: appelé à l'Académie de Saint-Petersbourg par Catherine I^{re}.
- 1741: Académie de Berlin, à l'instigation de Frédéric le Grand.
- 1766: retour en Russie, appelé par la Grande Catherine II.
- Meurt à Saint-Petersbourg en 1783.



13/01/2022

D. AUBIN - LUTRIMAP09 16

16

ŒUVRES D'EULER

Étudiant de Jean Bernoulli.

A Berlin, il rédige plus de 380 articles !

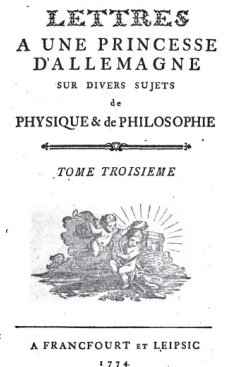
- dans tous les domaines des mathématiques pures: surtout l'analyse et la géométrie
- et des « mathématiques mixtes »: mécanique, hydrodynamique, optique, etc.

Une grande synthèse mathématique:

- Introductio in analysin infinitorum* (1748).
- Institutiones calculi differentialis* (1755).

Une grande œuvre de vulgarisation:

- Lettres de L. Euler à une princesse d'Allemagne au sujet de divers sujets de physique et de philosophie* (1760–1762)



13/01/2022 0. AUBIN - LUTIMAZEP 17

17

LA MARQUE D'EULER SUR LES MATHÉMATIQUES MODERNES

Notations introduites par Euler

$f(x)$ pour une **fonction** de x , mot qu'il est le premier à utiliser et à définir.

Fonctions trigonométriques: $\sin x$, $\cos x$, ...

Lettre « e » comme base du logarithme naturel.

Lettre « Σ » pour les sommations.

Lettre « i » pour l'unité imaginaire.

Lettre « π » pour le rapport entre le périmètre d'un cercle et son diamètre (il en popularise l'usage).

13/01/2022 0. AUBIN - LUTIMAZEP 18

18

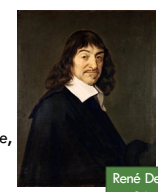
MATHÉMATIQUES MIXTES

- Figure de la terre
- Problème des trois corps

13/01/2022 0. AUBIN - LUTIMAZEP 19

19

CARTÉSIANISME



René Descartes (1596-1650)

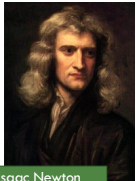
- La mécanique cartésienne est exposée dans son traité *Du Monde*, rédigé entre 1629 et 1633, mais publié en 1664.
- La matière est caractérisée par le concept d'étendue; l'Univers est infini, sans vide et en constant mouvement.
- La mécanique de Descartes s'appuie sur deux lois essentielles :
 - la loi de l'inertie
 - la loi de conservation de la quantité de mouvement
- Son système du monde repose sur la théorie des tourbillons :
 - l'Univers est composé d'un ensemble de tourbillons imbriqués au centre desquels se trouvent les astres (Soleil et planètes)
 - la matière solaire est au centre d'un tourbillon principal qui emporte les planètes, lesquelles forment des tourbillons emportant les satellites.

13/01/2022 0. AUBIN - LUTIMAZEP 20

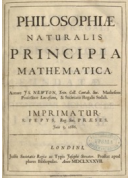
20

NEWTONIANISME

- La mécanique newtonienne, exposée dans les *Principia* → une profonde rupture avec la mécanique de Descartes :
 - Exposé des trois axiomes (ou lois) du mouvement : la loi d'inertie, la loi d'impulsion et la loi d'action / réaction.
 - Les corps sont caractérisés par leur masse, leur étendue et par la notion d'impenétrabilité.
 - Énoncé de la loi d'attraction universelle, qui unifie l'accélération de la pesanteur avec le phénomène d'attraction des corps célestes.



Isaac Newton (1643-1729)



PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA

13/01/2022 0. AUBIN - LUTR04209 21

21

CARTÉSISME VS. NEWTONIANISME

	Descartes	Newton
Matière	tourbillons, fluides, le continu.	les atomes
Forces	contacts, chocs.	Action à distance; des forces « occultes » ?
Mathématiques	l'algèbre pour faire de la géométrie.	approche « physicienne ».
	des règles pour la pensée.	calcul différentiel et intégral : un langage pour la physique.

13/01/2022 0. AUBIN - LUTR04209 22

22

FIGURE DE LA TERRE: MESURES DE PENDULES

On pense que la terre est sphérique depuis l'Antiquité.

Jean Richer, à Cayenne: *Observations astronomiques et physiques en l'Isle de Caienne*, 1679, repr. in *Recueils d'observations faites en plusieurs voyages, par ordre de Sa Majesté*, 1693.

L'UNE des plus considérables Observations que j'ay faites, est celle de la longueur du pendule à secondes de temps, laquelle s'est trouvée plus courte en Caienne qu'à Paris: car la même mesure qui avoit été marquée en ce lieu-là sur une verge de fer, suivant la longueur qui s'étoit trouvée nécessaire pour faire un pendule à secondes de temps, ayant été apportée en France, & comparée avec celle de Paris, leur différence a été trouvée d'une ligne & un quart; dont celle de Caienne est moindre que celle de Paris, laquelle est de 3. pieds 8. lignes !. Cette Observation a été répétée pendant dix mois entiers, où il ne s'est point passé de semaine, qu'elle n'ait été faite plusieurs fois avec beaucoup de soin.

Fin 17^e siècle, controverse lancée par Robert Hooke (1635-1703) au sujet de la figure d'équilibre du globe terrestre en supposant que les mers n'ont pas une figure parfaitement sphérique mais ellipsoïdale. **Mais quelle en est la forme?**

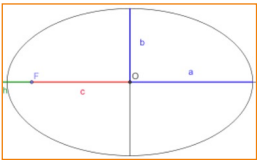
13/01/2022 0. AUBIN - LUTR04209 23

23

UN MELON OU UNE ORANGE ?

Voltaire, *Lettres philosophiques* (1734)

... comment pas mieux la cause. A Paris vous vous figurés la Terre faite comme un Melon; à Londres elle est aplatie des deux cotés. La Lumière



Coefficient d'aplatissement :

$$\alpha = \frac{a - b}{a}$$

$\alpha > 0$: terre aplatie
 $\alpha < 0$: terre oblongue
 $\alpha = 0$: terre sphérique

13/01/2022 0. AUBIN - LUTR04209 24

24

NEWTONIENS VS. CARTÉSIENS

Christiaan Huygens (1629-1695)



• **Newton**: la figure de la Terre est à la fois le résultat de l'attraction mutuelle de ses parties et du mouvement de rotation autour de son axe :

– « Si les planètes n'avoient point le mouvement journalier de rotation autour de leur axe, elles devroient être sphériques à cause de l'égalité de gravité de leurs parties. Le mouvement de rotation fait que les parties qui s'éloignent de l'axe font effort pour monter vers l'équateur. Et par conséquent, si la matière dont elles sont composées étoit fluide, son élévation vers l'équateur augmenteroit le diamètre de ce cercle, & son abaissement vers les Pôles diminueroit l'axe. [...] si notre terre n'étoit pas un peu plus haute à l'équateur qu'aux pôles, les mers s'affaisant vers les pôles, & s'élevant vers l'équateur inonderoient ces régions. »

– Newton, *Principia*, trad. Marquise du Châtelet, 1749, Livre III, prop. 18, p. 34.

• Grâce à l'application d'une condition d'équilibre hydrostatique, Newton conclut à un coefficient d'aplatissement de la Terre de $1/230$.

• Dans son *Discours sur la cause de la pesanteur* (1690), Huygens, cartésien, propose une autre théorie pour le calcul du coefficient d'aplatissement :

– il suppose pareillement la planète fluide et homogène mais refuse l'idée d'attraction mutuelle à distance des particules

– il démontre que la figure de la Terre est un ellipsoïde de révolution (ce que Newton s'était contenté de supposer), et parvient à un coefficient d'aplatissement $1/578$.

13/01/2022

D. AUBIN - LUTIMAD209 25

25

DES MESURES CONTRADICTOIRES

• Les méthodes expérimentales sont de deux types :

- Les **mesures pendulaires** : les périodes des petites oscillations d'un pendule augmentent si l'on augmente la longueur du fil et diminuent et si l'on augmente la force qui l'attire vers le bas (un pendule d'un « mètre » fait un aller-et-retour en une seconde!)
 - L'observation de Richer (1672) est confirmée par les mesures de Halley à Sainte-Hélène en 1677 et par celles de Varin et Deshayes au Cap Vert en 1682. Confirment l'aplatissement aux pôles.
- Les **mesures géodésiques** : la méthode consiste à relier deux lieux d'un même méridien par une chaîne de triangles dont on détermine la longueur des côtés de proche en proche à partir de la longueur d'un côté de départ et de la mesure des angles successifs.
 - Contredisent les théories de Newton et de Huygens.

13/01/2022

D. AUBIN - LUTIMAD209 26

26

MESURES GÉODÉSIQUES

• En **1669–1670**, Picard mesure par la méthode géodésique le degré de méridien reliant le sud de Paris à Amiens.

• A partir de **1683**, les mesures de Picard sont poursuivies au Nord par Jean-Dominique Cassini et au Sud par La Hire.

• La chaîne est achevée entre **1700 et 1718** par Jacques Cassini, Maraldi et La Hire fils. Elle permet d'obtenir le degré de méridien reliant Dunkerque aux pieds de Pyrénées.

• En **1720**, Jacques Cassini publie son ouvrage *Grandeur et figure de la Terre*. Il déduit de ses observations que la Terre est allongée suivant son axe de rotation!



Giovanni Domenico Cassini (1643-1729)

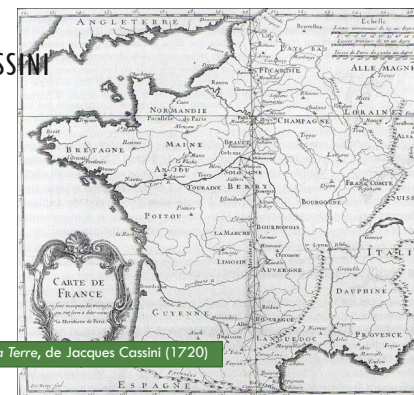
13/01/2022

D. AUBIN - LUTIMAD209 27

27

LA CARTE DE FRANCE DE CASSINI

Schéma de la triangulation réalisée pour mesurer la méridienne de France entre 1683 et 1718.



Grandeur et figure de la Terre, de Jacques Cassini (1720)

13/01/2022

D. AUBIN - LUTIMAD209 28

28

LE DÉBAT DE 1734-1735

- Les mesures des Cassini donnent raison aux cartésiens, qui tentent de justifier l'aplatissement de la Terre à l'équateur par le biais de la théorie des tourbillons.
 - Mais Descartes n'avait pas traité le problème et Huygens était parvenu au résultat inverse en utilisant des arguments cartésiens.
- Ce débat entre cartésiens et newtoniens à l'Académie des sciences de Paris est le reflet d'une opposition à plusieurs niveaux :
 - l'opposition de deux explications du monde (Descartes / Newton, vide / plein, tourbillons / attraction) et deux traditions, l'une française, l'autre anglaise.
 - l'opposition entre des astronomes de terrain reconnus et puissants (les Cassinis) et des géomètres.
 - l'opposition entre les tenants d'arguments géométriques traditionnels et les adeptes de l'analyse différentielle.
- En 1735, l'Académie royale des sciences décide de financer deux expéditions, l'une en **Laponie**, l'autre au **Pérou**, afin de mesurer les degrés de méridiens au pôle et à l'équateur.

29

DEUX EXPÉDITIONS


Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759)

L'expédition en Laponie (1735-1737)

- Les participants : Maupertuis, Clairaut, Celsius, Le Monnier.
- Au retour de l'expédition, le 13 novembre 1737, Maupertuis fait un compte-rendu devant l'Académie royale des Sciences :
 - « enfin notre degré avec l'aberration diffère de 950 toises de ce qu'il devrait être suivant les mesures que Mr Cassini a établies dans son livre *Grandeur et figure de la Terre...* d'où l'on voit que la Terre est considérablement aplatie vers les pôles ».

L'expédition au Pérou (1736-1744)

- Les participants : Pierre Bouguer, La Condamine.
- Retour... en 1744 ! Bouguer et La Condamine confirment l'aplatissement au pôle, mais le résultat est déjà admis par l'Académie...
- ... En 1740, suite au retour de l'expédition de Laponie, une nouvelle mesure géodésique (plus précise) de la méridienne de France avait été menée par Cassini de Thury et La Caille et avait conduit à une nouvelle confirmation de l'aplatissement aux pôles.



30


FIGURE DE TERRE ET MÉCANIQUE

Alexis Clairaut (1713-1765)

- *Théorie de la figure de la Terre, tirée des principes de l'hydrostatique* (1743)
 - une mise en équation du problème notamment fondée sur la formulation analytique du principe de l'hydrostatique.
 - fait appel à un résultat connu depuis peu, relevant d'une extension du calcul différentiel et intégral aux fonctions de plusieurs variables :

« On auroit le poids total de ON. Mais comme l'équilibre du fluide demande que le poids de ON ne dépende pas de la courbure de OSN, c'est-à-dire de la valeur particulière de y en x, il faut donc que P dy + Q dx puisse s'intégrer sans connaître la valeur de x, c'est-à-dire qu'il faut que P dy + Q dx soit une différentielle complète, * afin qu'il puisse y avoir équilibre dans le fluide. »

LORSQUE les expressions des forces P & Q seront assez composées, pour qu'on ne reconnoisse pas facilement si P dy + Q dx est une différentielle complète, il faudra se servir du Theoremè que j'ai donné dans mon mémoire * sur le calcul intégral, c'est-à-dire qu'il faudra voir si $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}$. Toutes les fois que



31

PROBLÈME DES TROIS CORPS

1747: Problème du calcul de la trajectoire de la lune

Clairaut suggère de changer la loi de la gravitation en y ajoutant un terme en $1/r^4$?

d'Alembert et Euler:
Résolution (temporaire) par la théorie des perturbations (cf. Laplace) : réaffirmation de la loi de la gravitation universelle et de la puissance du calcul différentiel et intégral.



32

MATHÉMATIQUES PURES

1. Intégration des fonctions rationnelles
2. Théorème fondamental de l'algèbre
3. L'analyse et la notion de fonction

13/01/2022 D. ARBON - LUTRIM209 33

33

INTÉGRATION DES FONCTIONS RATIONNELLES

• Dans la première moitié du 18^e siècle, l'évolution du problème de l'intégration des fractions rationnelle est liée à celle du problème de la décomposition réelle des polynômes... $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

• Leibniz, [Aperçu d'une nouvelle analyse concernant la science de l'infini appliquée aux sommes et aux quadratures], *Acta Eruditorum*, mai 1702.

- le cas des racines simples (décomposition en facteurs du premier degré à coefficients réels ou imaginaires)
- la possibilité de décomposer, de façon générale, les polynômes en facteurs réels du 1^{er} ou 2nd degré: réponse négativement.
 - Conclusion erronée: les intégrales des différentielles rationnelles ne peuvent pas être généralement réduites à la quadrature de sections de cercle et d'hyperbole.
- la méthode repose sur la décomposition des fractions rationnelles en éléments simples réels, ce qui n'est pas le cas de celle de Jean Bernoulli...

13/01/2022 D. ARBON - LUTRIM209 34

34

INTÉGRATION DES FONCTIONS RATIONNELLES (2)

• Lecture par **Pierre Varignon**, en août 1702, d'un mémoire de Jean Bernoulli, « Solution d'un problème concernant le calcul intégral » (publié dans les MARS pour l'année 1704).

- Comme Leibniz, uniquement le cas des racines simples (décomposition en facteurs du premier degré à coefficients réels ou imaginaires), mais...
- intégration formelle de chaque élément simple sous la forme d'un **logarithme, réel ou imaginaire.**
 - Conclusion: les intégrales des différences rationnelles peuvent toujours être réduites à la quadrature de sections coniques, mais sans preuve.

• **Leibniz**, « Continuatio analyseos quadraturam rationalium », *Acta Eruditorum*, janvier 1703 : cas des racines multiples.

13/01/2022 D. ARBON - LUTRIM209 35

35

INTÉGRATION DES FONCTIONS RATIONNELLES (3)

• Dans son *Treatise of Fluxions* (1742), **Maclaurin** propose une synthèse presque complète sur l'intégration des fractions rationnelles :

- il s'appuie sur les travaux de Leibniz, René de Cotes (1722) et Abraham de Moivre (1730) pour montrer que l'intégrale s'exprime par des expressions algébriques et/ou des arcs circulaires et/ou des logarithmes...
- mais ne traite pas le cas où le dénominateur se factorise en trinômes du second degré élevés à une puissance > 1 .
 - Ce cas sera traité par Bougainville dans son *Traité du calcul intégral* (1754-1756) puis par Euler dans son *Calculus integralis* (1768).
- **Maclaurin** conclut prudemment sur la possibilité de décomposer les polynômes en facteurs réels du 1^{er} ou 2nd degré.

13/01/2022 D. ARBON - LUTRIM209 36

36

THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE (TFA): ÉQUIVALENCES

Tout polynôme de degré n supérieur ou égal à 1 à coefficients complexes a au moins une racine complexe

L'ensemble des nombres complexes est un corps algébriquement clos

Tout polynôme de degré n supérieur ou égal à 1 à coefficients complexes se décompose en un produit de n facteurs linéaires à coefficients complexes et admet n racines complexes (distinctes ou confondues)

Tout polynôme de degré n supérieur ou égal à 1 à coefficients réels peut se décomposer en un produit de facteurs réels du premier ou du second degré

L'ensemble des nombres réels est un corps ordonné maximal

13/01/2022

D. AUBIN - L137MA209 37

37

TFA (2): LES PRÉMICES

- Dans *l'Invention nouvelle en algèbre* (1619) et dans la *Géométrie* (1637), Girard et Descartes affirment que toute équation algébrique de degré n admet n racines réelles ou imaginaires.
- L'énoncé du TFA n'apparaît qu'au 18^e siècle et sera contesté jusqu'au milieu du siècle en raison du statut des quantités imaginaires. $a + b\sqrt{-1}$
 - Les imaginaires sont vus comme des quantités exprimées par des formules faisant intervenir des puissances paires qui sont des nombres négatifs; ils ne s'expriment donc pas toujours sous la forme
- En 1739, Euler ramène une autre question de calcul intégral au problème de la résolution du TFA : l'intégration des équations différentielles linéaires homogènes d'ordre n à coefficients constants.
- Le 15 février 1744, Clairaut fait la lecture d'une lettre d'Euler (du 14 août 1742) sur le sujet devant l'Académie royale des sciences de Paris :

« Il faudrait démontrer que dans toute équation les racines imaginaires vont toujours paire à paire en sorte que tant la somme que le produit de chaque paire fut réel [...], ce que je crois indubitable, quoique je ne le puisse démontrer parfaitement ».

13/01/2022

D. AUBIN - L137MA209 38

38

TFA (3): D'ALEMBERT

- D'Alembert:
 - première démonstration erronée du TFA dans un mémoire inédit de 1745,
 - puis une seconde totalement différente un mémoire intitulé « Recherches sur le calcul intégral » présenté en 1746 et publié en 1748.
- Dans les deux cas, il commence par démontrer la stabilité des imaginaires par les opérations algébriques usuelles (addition, soustraction, multiplication et division) :
 - sa démonstration ne s'applique pas aux autres opérations usuelles, qu'elles soient ou non algébriques
 - son résultat sur la stabilité des expressions $a + b\sqrt{-1}$ va permettre d'obtenir le consensus des savants sur la forme des imaginaires.
- Ce résultat est à la base d'une des deux démonstrations du TFA donnée par Euler dans son mémoire « Recherches sur les racines imaginaires des équations » présenté en 1749 et publié en 1751.

13/01/2022

D. AUBIN - L137MA209 39

39

TFA (4): LA DÉMONSTRATION DE D'ALEMBERT

- « J'ai démontré
 1. Que tout quantité imaginaire, d'une forme quelconque, peut se réduire $a - b\sqrt{-1}$, a et b étant des quantités réelles.
 1. Que toute racine imaginaire d'une équation quelconque pouvoit s'exprimer par $a + b\sqrt{-1}$, et qu'en ce cas il y en avoit une autre représentée par

d'où j'ai conclu que toute quantité algébrique rationnelle, ou si l'on veut, toute équation étoit réductible en facteurs trinômes réels.

A l'égard de la seconde proposition, il semble d'abord qu'elle soit une suite nécessaire de la première, mais il faudroit pour cela avoir démontré [...] que l'on peut toujours supposer une forme imaginaire quelconque à une racine non réelle; cette supposition peut être fort vraisemblable, mais elle est en même temps fort difficile à démontrer rigoureusement ».

*[« Observations de 1752 », BI, Paris, Ms. 1787 (papiers D'Alembert), f. 191 r^o-v^o]

13/01/2022

D. AUBIN - L137MA209 40

40

TFA (5): LES DÉMONSTRATIONS

D'Alembert, « Recherches sur le calcul intégral », MARS année 1746 (1748).	Démonstration analytique fondée sur l'utilisation des séries.
Euler, « Recherches sur les racines imaginaires des équations », HAB année 1749 (1751).	Démonstration algébrique.
Lagrange, « Sur la forme des racines imaginaires des équations », NMAB année 1772 (1774).	Corrige deux lacunes techniques de la démonstration d'Euler et propose une démonstration dans la même lignée.
Gauss, Demonstratio nova theorematum omnium functionum algebraicorum rationalium integram unius variabilis, 1799.	Démonstration géométrico-algébrique assortie d'un commentaire critique des démonstrations de D'Alembert, Euler et Lagrange

13/01/2022

D. AUBIN - LUTM4209 41

41

LE CONCEPT DE « FONCTION »

- Établir l'analyse comme branche autonome des mathématiques.
- Rien de plus qu'un nouveau mot pour un concept antique?
 - e.g. les tables de cordes de Ptolémée.
- Les courbes transcendentes.
- Leibniz (1694) et Jean Bernoulli (1718):
 - Les « fonctions » d'une ligne.
- Euler:
 - **Renversement des bases de l'analyse**
 - la courbe au lieu d'être considérée comme la trajectoire d'une particule, décrite par ses coordonnées, devient une fonction de ses coordonnées.

13/01/2022

D. AUBIN - LUTM4209 42

42

LA COURBE COMME FONCTION

- Fermat, *Ad locos et solidos isagoge* (écrit en 1637, publié en 1679) :
 - « Aussitôt que deux quantités inconnues apparaissent dans une ultime égalité, il y a un lieu et le point terminal de l'une des deux quantités décrit une ligne droite ou courbe. »
- Descartes, *Géométrie* (1637):
 - « Prenant successivement infinies diverses grandeurs pour la ligne ;, on en trouvera aussi infinies pour la ligne x , et ainsi, on aura une infinité de divers points tels que celui qui est marqué C, par le moyen desquels on décrit la ligne courbe demandée. »
 - Descartes fait pour la première fois le lien entre une équation en x et y et la dépendance entre deux quantités variables.
 - Il restreint cette relation fonctionnelle aux courbes « géométriques » (c'est-à-dire algébriques) et en exclut donc les courbes « mécaniques » (c'est-à-dire transcendentes).

13/01/2022

D. AUBIN - LUTM4209 43

43

COURBES TRANSCENDENTES

- Développement en séries entières (par Mengoli, Mercator et Newton) va permettre de représenter analytiquement les courbes transcendentes laissées de côté par Descartes :
 - Dans le *Logarithmotechnia* (1668), Nicolas Mercator parvient à calculer l'aire sous l'hyperbole grâce à la réduction en série géométrique de $1/(1+x)$ puis à son intégration terme à terme.
 - Isaac Newton obtient le développement en séries entières des fonctions sinus, cosinus, des fonctions inverses des lignes trigonométriques, etc.
- Leibniz introduit pour la première fois le terme de « fonction » dans un manuscrit d'août 1673, non publié et intitulé « la Méthode inverse des tangentes ou à propos des fonctions ».

13/01/2022

D. AUBIN - LUTM4209 44

44

LES « FONCTIONS » CHEZ LEIBNIZ

En voici un plus general, qui le comprend avec une infinité d'autres. Soit donnée la raison, comme M à N, entre deux fonctions quelconques de la ligne ACC: Trouver la ligne. J'appelle fonctions toutes les portions des lignes droites qu'on fait en menant des droites indélinies, qui répondent au point fixe, & aux points de la courbe; comme sont AB ou Aβ abscisse, BC ou βC ordonnée, AC corde, CT ou Cδ tangente, CP ou Cπ perpendiculaire, BT ou βπ sous-tangente, BP ou βπ sous-perpendiculaire. AT ou Aη *refitta*, ou retranchée par la tangente; AP ou Aη *retranchée* par la perpendiculaire, Tθ & Pη sous-retranchées, *sub-refitta à tangente vel perpendiculi*; TP ou θπ *correfitta*. Et une infinité d'autres d'une construction plus composée, qu'on se peut figurer.

Leibniz, « Considérations sur la différence qu'il y a entre l'analyse ordinaire & le nouveau calcul des transcendentes », *Journal des Savants* (1694), p. 405

45

« FONCTION » CHEZ JEAN BERNOULLI

DEFINITION. On appelle ici *Fonction* d'une grandeur variable, une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable & de constantes.

Jean Bernoulli, « Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions des problèmes sur les isopérimètres, avec une nouvelle méthode courte & facile de les résoudre sans calcul, laquelle s'étend aussi à d'autres problèmes qui ont rapport à ceux-là », *MARS* (1718), p. 105.

Dans tout ce qui appartient aux Courbes de la plus vîte descente M. Bernoulli a supposé d'abord le Système de Galilée sur la chute des Corps, c'est-à-dire, que les vitesses sont à chaque instant comme les Racines des hauteurs verticales d'où le Corps est tombé jusques-là. Ensuite pour donner à son Problème cette universalité si chère aux grands Geometres, il prend les vitesses comme telles fonctions qu'on voudra des hauteurs, & cela le conduit à des réflexions qui s'enfoncent trop dans les profondeurs de l'Art pour nous permettre de les suivre.

Fontenelle, *MARS* (1718), p. 54.

46

FONCTION CHEZ EULER

« Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée de quelque manière que ce soit de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes. » (1748)

Le terme « analytique » désigne ici une expression obtenue à partir d'une combinaison d'opérations et de modes de calcul connus (opérations algébriques usuelles, exponentielle, logarithme, passage d'un arc à ses lignes trigonométriques), certaines de ces opérations pouvant être itérées un nombre infini de fois.

**INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.**
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio BEROLINENSIS, & Academia Imperialis Scientiarum PETERSBURGICAE Socio.

TOMUS PRIMUS

LAUSANNÆ,
Apud MARCUM-MICHAËLEM BOUSQUET & Socios.
MDCCLXVIII.

47

CLASSIFICATION DES FONCTIONS SELON EULER:

« Je les ai d'abord divisées en algébriques et transcendentes. Les premières sont composées de quantités variables combinées entre elles par les opérations ordinaires de l'algèbre, et les secondes dépendent d'autres opérations ou des mêmes combinaisons que les précédentes, mais répétées une infinité de fois ».

- Euler considère que toute fonction peut être développée en série.
 - Le sinus par exemple n'est plus la longueur d'un segment, mais un nombre défini par la série : $z - z^3/3! + z^5/5! + \dots$
 - La formule d'Euler.
- Dans son application du concept de fonction à la géométrie, il distingue les fonctions « continues » (une seule expression analytique !) des fonctions « discontinues »...

48

GÉNÉRALISATION DE LA NOTION DE FONCTION

- Dans ses *Institutiones calculi differentialis*, publiés en 1755, Euler fait état d'une évolution importante de sa définition de la notion de fonction :

« Si des quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, alors on a l'habitude de nommer ces quantités *fonctions* de ces dernières ; cette dénomination a la plus grande étendue et contient en elle-même toutes les manières par lesquelles une quantité peut être déterminée par d'autres. Si, par conséquent, x désigne une quantité variable, alors toutes les autres quantités qui dépendent de x de n'importe quelle manière, ou qui sont déterminées par x , sont appelées fonctions de x ».

49

« CALCUL DIFFÉRENTIEL » DANS L'ENCYCLOPÉDIE (1755)

Article par Jean Le Rond D'Alembert.

- « M. Newton [...] n'a jamais regardé le calcul différentiel comme le calcul des quantités infiniment petites, mais comme la méthode des premières & dernières raisons, c'est-à-dire la méthode de trouver les limites des rapports. Aussi cet illustre auteur n'a-t-il jamais différencié des quantités, mais seulement des équations ; parce que toute équation renferme un rapport entre deux variables, & que la différenciation des équations ne consiste qu'à trouver les limites du rapport entre les différences finies des deux variables que l'équation renferme. »
- « Quand une fois on l'aura bien comprise, on sentira que la supposition que l'on y fait de quantités infiniment petites, n'est que pour abrégé & simplifier les raisonnemens ; mais que dans le fond le calcul différentiel ne suppose point nécessairement l'existence de ces quantités ; que ce calcul ne consiste qu'à déterminer algébriquement la limite d'un rapport de laquelle on a déjà l'expression en lignes, & à évaluer ces deux limites, ce qui fait trouver une des lignes que l'on cherche. Cette définition est peut-être la plus précise & la plus nette qu'on puisse donner du calcul différentiel »

La notion de *limite* dégagée comme fondement du calcul, mais non définie.

50

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

- Évoquées par Leibniz, Jean I, Jacques I et Nicolas Bernoulli dans leurs travaux sur les familles de courbes dépendant d'un paramètre.
- Euler: deux mémoires présentés en 1734 devant l'Académie de Pétersbourg (et publiés en 1740), parvient notamment à la formulation d'un critère (dit « critère d'Euler ») assurant l'équivalence entre une équation aux différences partielles (EDP) du 1^{er} ordre et la « différentielle complète » associée :

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dq}{dx} \iff p(x,t)dx + q(x,t)dt \text{ est une « différentielle complète »...}$$

... c'est-à-dire telle qu'il existe une fonction $y(x,t)$
vérifiant : $dy = p dx + q dt$

- Clairaut, qui sera le premier à en faire usage dans le cadre d'une application à un problème physico-mathématique (en 1743...), et Fontaine, retrouveront ce critère de façon indépendante d'Euler à la fin des années 1730.

51

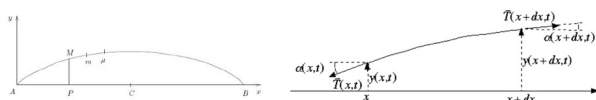
MATHÉMATIQUES MIXTES

1. Le problème des cordes vibrantes

52

CORDES VIBRANTES: PROBLÈME

- **Problème** : équation du mouvement longitudinal d'une corde d'amplitude $y(x,t)$, de masse linéique μ , de longueur l , fixe en ses deux extrémités A et B (dans l'hypothèse de petites vibrations et en négligeant la force de pesanteur)
 - dx un élément infinitésimal de cette corde,
 - $T(x,t)$ le module de la force de tension au point $(x,y(x,t))$ à l'instant t (force exercée par la partie droite de la corde sur la celle de gauche),
 - et $\alpha(x,t)$ l'angle entre la force de module $T(x,t)$ et l'axe horizontal. [hypothèse des petits α]



13/01/2022

D. AUBIN - LUTR04209 53

53

L'ÉQUATION DE LA CORDE VIBRANTE

- Suivant l'axe des x : $0 = T(x+dx,t) \cos(\alpha(x+dx,t)) - T(x,t) \cos(\alpha(x,t))$
d'où l'on déduit que : $T(x+dx,t) = T(x,t)$, soit $T(x,t) = Cste = T$.
- Suivant l'axe des y : $\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(x+dx,t) \sin(\alpha(x+dx,t)) - T(x,t) \sin(\alpha(x,t))$
c'est-à-dire, sachant que $\alpha \approx \sin \alpha \approx \tan \alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$:

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \left[\frac{\partial y}{\partial x}(x+dx) - \frac{\partial y}{\partial x}(x) \right] = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx.$$

L'excursion $y(x,t)$ de la corde vérifie donc l'équation :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{avec } c^2 = \frac{T}{\mu}$$

13/01/2022

Le vendredi 9 avril 2010

LM300

D. AUBIN - LUTR04209 54

54

CORDE VIBRANTE: CHRONOLOGIE

- Jusq'en 1713, les recherches concernent essentiellement le calcul du temps de vibration d'une corde tendue fixe entre deux extrémités.
- En 1713, Taylor « De motu nervi tensi » (*Philosophical Transactions*).
 - Détermination de la courbe que forme une telle corde au cours de ses oscillations.
 - calcul différentiel et intégral (mais que des fonctions d'une variable)
 - La corde forme une sinusoïde (la « compagne de la cycloïde ») à chaque instant.
- Le problème des cordes vibrantes est ensuite abordé par Jean Bernoulli et Euler sans qu'ils ne parviennent à l'équation générale du mouvement.
- D'autres problèmes liés à celui des cordes vibrantes font également l'objet de recherches : le problème de la corde élastique, le problème des lames vibrantes, le problème d'une corde chargée de poids suspendue par l'une de ses extrémités, etc.



Brook Taylor (1685-1731)

13/01/2022

D. AUBIN - LUTR04209 55

55

D'ALEMBERT 1747:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{en posant } c^2 = 1$$

D'Alembert « Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration », *Histoire de l'Académie des sciences et belles-lettres de Berlin* pour l'année 1747.

- L'expression générale de la solution en utilisant notamment le « critère d'Euler » :

$$\diamond \text{ Il pose : } \quad dy = p dt + q dx \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} p = \frac{dy}{dt} \text{ et } q = \frac{dy}{dx} \\ p dt + q dx \text{ est une « différentielle complète » (exacte)} \end{cases}$$

$$\diamond \text{ Puis : } \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \longrightarrow \quad \frac{dp}{dt} = \frac{dq}{dx} \quad \longleftarrow \quad p dx + q dt \text{ est une « différentielle complète » (exacte)}$$

13/01/2022

Le vendredi 9 avril 2010

LM300

D. AUBIN - LUTR04209 56

56

D'ALEMBERT 1747

d'où il déduit :

Il parvient ainsi à un

- Il considère deux types de *conditions initiales*... (+ *fixité des extrémités en A et en B*) :

- corde en position rectiligne (position d'équilibre) et vitesse non nulle : « corde frappée »	par la courbe de la vitesse initiale de la corde
- corde écartée de sa position d'équilibre et vitesse nulle : « corde pincée »	par la courbe de la position initiale de la corde
- cas mixtes	

et montre que $y(x,t)$ est alors complètement déterminée :

13/01/2022 D. AUBIN - L1304209 57

57

D'ALEMBERT 1747

système de deux « différentielles complètes » :

$$\begin{cases} p dx + q dt \\ p dt + q dx \end{cases} \iff \begin{cases} (p+q)d(x+t) \text{ complète} \\ (p-q)d(x-t) \text{ complète} \end{cases} \iff \begin{cases} p+q \text{ fonction de } x+t \\ p-q \text{ fonction de } x-t \end{cases}$$

expression générale de la solution au problème: $y(x,t) = \varphi(t+x) + \Gamma(t-x)$

Conditions initiales (extrémités fixes)	Détermination complète de $y(x,t)$ par:
Corde en position rectiligne (position d'équilibre) et vitesse non nulle : « corde frappée »	la courbe de la vitesse initiale de la corde
Corde écartée de sa position d'équilibre et vitesse nulle : « corde pincée »	la courbe de la position initiale de la corde
Cas mixtes	

13/01/2022 D. AUBIN - L1304209 58

58

DÉSACCORD ENTRE EULER ET D'ALEMBERT

- En 1748, Euler « Sur la vibration des cordes » et très proche de celui de D'Alembert (il reconnaît d'ailleurs explicitement la priorité de ce dernier).
- En 1750, D'Alembert présente une addition à ses recherches de 1747. Il y réagit au mémoire d'Euler et ajoute une condition pour que la solution soit admissible : il faut que :
 - « les différentes figures de la corde vibrante [soient] renfermées dans une seule & même équation. »
- Ce point de désaccord entre les deux savants est issu de leurs conceptions respectives de la notion de fonction :
 - D'Alembert associe le mot de fonction à une expression analytique
 - Euler conçoit une fonction comme une courbe donnée arbitrairement (c'est-à-dire graphiquement)
- Contrairement à Euler, D'Alembert rejette les fonctions changeant d'expression, c'est-à-dire les « fonctions discontinues » dans le sens du XVIII^e siècle.

13/01/2022 D. AUBIN - L1304209 59

59

BERNOULLI ET LES SÉRIES « DE FOURIER »

- En 1753 (toujours dans HA8), Daniel Bernoulli publie « Réflexions et éclaircissemens sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les mémoires de l'Académie de 1747 & 1748 » :
 - reproche à D'Alembert et Euler d'avoir admis de nouvelles courbes (autres que la sinusoïde de Taylor) « dans un sens tout-à-fait impropre ».
 - il établit sans calcul l'expression générale de la solution sous la forme d'une combinaison de vibrations simples (c'est-à-dire de fonctions sinusoïdales du type $\alpha(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ (avec $\alpha(t)$ une fonction du temps t , n un entier et l la longueur de la corde), de telle sorte que :

$$y(x,t) = \alpha(t) \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \beta(t) \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + \gamma(t) \sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right) + \&c.$$
- cette solution est selon lui la plus générale (les courbes obtenues par Euler et D'Alembert doivent donc pouvoir s'y ramener).
- il affirme avoir ainsi présenté « ce que les nouvelles vibrations de Mrs D'Alembert et Euler ont de physique ».

13/01/2022 Le vendredi 9 avril 2010 LM300 D. AUBIN - L1304209 60

60

LES SAUTS DE COURBURE

* Dans un mémoire de 1761, D'Alembert maintient sa position contre Euler mais aborde la question sous un autre angle en affirmant que :

– la fonction ϕ ne doit pas faire de « sauts de courbure » (c'est-à-dire ne pas passer « brusquement du fini à l'infini, ou de l'infini au fini, ou d'une valeur finie à une autre valeur finie »); elle ne doit pas changer d'expression; et que les deux conditions précédentes sont équivalentes.

* A partir de 1761, Euler s'est désengagé de la polémique mais continue à publier des recherches sur le sujet, comme Daniel Bernoulli et **Joseph Lagrange** qui est d'accord avec D'Alembert.

* D'Alembert, quant à lui, va finir par changer de position sur la question des solutions admissibles :

– Condorcet, disciple de D'Alembert joue un rôle dans ce revirement. Dans les *Mémoires de l'Académie* de 1771, il envisage en effet la possibilité de raccorder des fonctions changeant d'expression de telle sorte que leurs dérivées première et seconde ne fassent pas de sauts.

– En 1780, dans un mémoire portant sur le problème de la propagation du son, D'Alembert généralise ce critère théorique jusqu'à l'ordre n .

– Dans un mémoire non publié de son vivant, il affirme enfin que la fonction ϕ peut changer d'expression à condition qu'elle ne fasse pas de « sauts de courbure ».

13/01/2022

D. AUBIN - LUTIM2019 61

61

UNE NOUVELLE GÉNÉRATION



Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat, marquis de Condorcet, (1743–1794).



Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)

13/01/2022

D. AUBIN - LUTIM2019 62

62

CONCLUSIONS: LE CONCEPT DE FONCTION

* Concept de fonction et problèmes physiques : l'approche d'Euler semble en sortir vainqueur.

* Dans ses *Institutiones calculi differentiali* (1755), nouvelle définition très générale de la notion de fonction.

– Mais Euler continue de ne considérer que des fonctions « analytiques » (dans le sens de développables en séries polynomiales ou trigonométriques).

– Il maintient par ailleurs la distinction entre fonctions « continues » et « discontinues » (au sens de la possibilité de les exprimer ou non par une unique expression analytique).

* Dans sa *Théorie des fonctions analytiques* (1797), Lagrange ira plus loin en tentant de démontrer que toute fonction, aussi générale soit-elle, est développable en série.

* [L'application de l'analyse au champ des mathématiques mixtes sera portée à son apogée par Lagrange, dans sa *Mécanique analytique* (1788).]

* L'approche de D'Alembert dans le problème des cordes vibrantes conduit à une autre question, à côté de laquelle passe Euler : quelle notion de continuité est appropriée pour la solution des problèmes physiques ?

* **Liens très forts entre mathématiques pures et mathématiques mixtes**

13/01/2022

D. AUBIN - LUTIM2019 63

63