Cours 8

Mathématiques pure et mathématiques mixtes au siècle des Lumières

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

IMJ-PRG

LU3MA209

ÉLÉMENTS D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

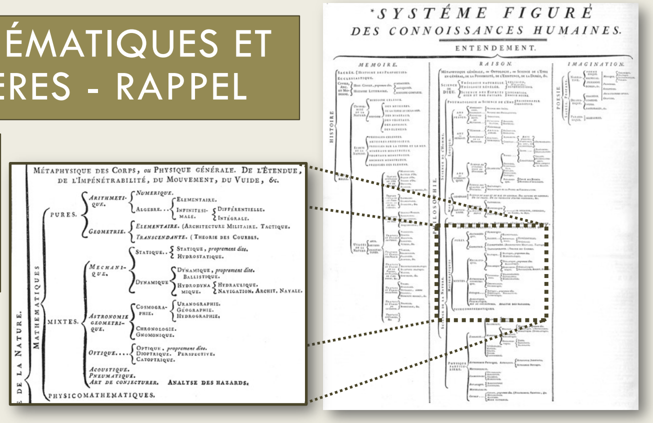
2023-2024, 2e période

David Aubin
david.aubin@sorbonne-université.fr

1

MATHÉMATIQUES ET LUMIÈRES - RAPPEL

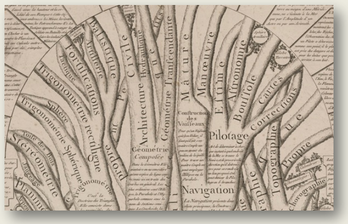
Diderot et D'Alembert, *Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers* (1751–1765)

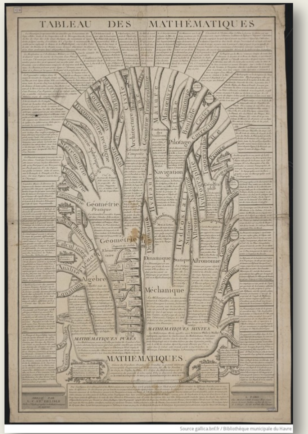


2

TABLEAU DES MATHÉMATIQUES

par L. C. Etienne Delisle, Maître d'Hydrographie et de Mathématiques au Havre, vers 1779





3

MATHÉMATIQUES ET LUMIÈRES : PANORAMA – RAPPEL

Mathématiques pures

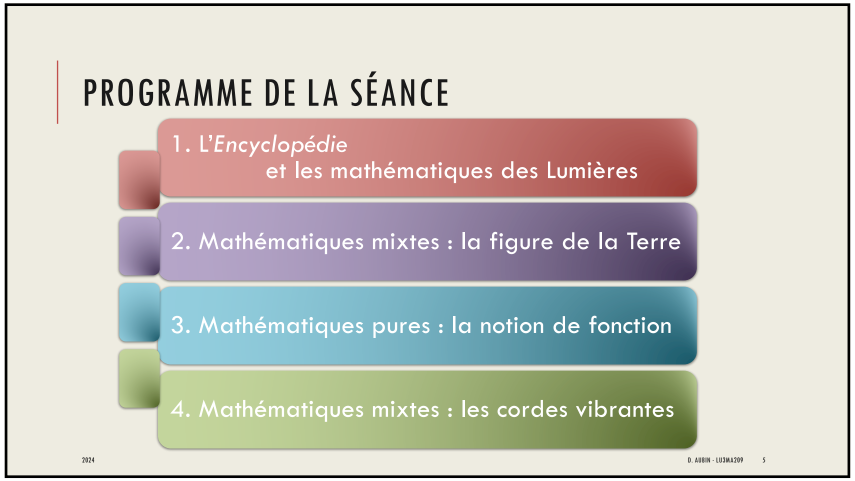
- Calcul des variations.
- L'intégration des fractions rationnelles et le théorème fondamental de l'algèbre.
- La notion de fonction.
- (La théorie d'intégration des équations et systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants.)
- (Les équations aux dérivées partielles.)
- (Application de l'analyse aux problème du hasard.)

Mathématiques mixtes

- La figure de la Terre.
- Le problème des trois corps.
- Le problème des cordes vibrantes.
- (La mécanique analytique.)
- (L'hydrodynamique.)

Tendances géométriques et arithmétiques en recul jusqu'à la fin du siècle.

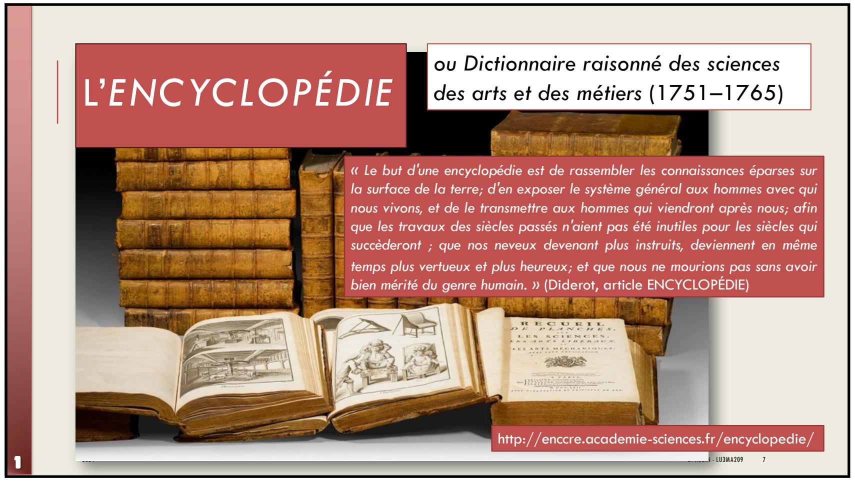
4


PROGRAMME DE LA SÉANCE
1. L'*Encyclopédie* et les mathématiques des Lumières
2. Mathématiques mixtes : la figure de la Terre
3. Mathématiques pures : la notion de fonction
4. Mathématiques mixtes : les cordes vibrantes
2024
D. AUBIN - LU3MA209 5

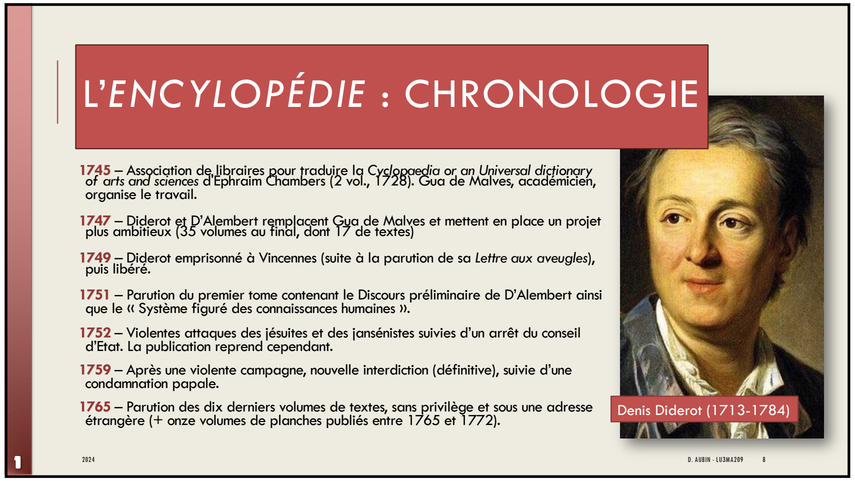
5


L'ENCYCLOPÉDIE
Les mathématiques des Lumières
1
2024
D. AUBIN - LU3MA209 6

6


L'*ENCYCLOPÉDIE*
ou *Dictionnaire raisonné des sciences des arts et des métiers* (1751–1765)
« Le but d'une encyclopédie est de rassembler les connaissances éparses sur la surface de la terre; d'en exposer le système général aux hommes avec qui nous vivons, et de le transmettre aux hommes qui viendront après nous; afin que les travaux des siècles passés n'aient pas été inutiles pour les siècles qui succèderont ; que nos neveux devenant plus instruits, deviennent en même temps plus vertueux et plus heureux; et que nous ne mourions pas sans avoir bien mérité du genre humain. » (Diderot, article ENCYCLOPÉDIE)
RECUEIL DE PLANCHES, SUR LES SCIENCES, LES ARTS LIBERAUX, ET LES ARTS MÉCHANIQUES
http://enccre.academie-sciences.fr/encyclopedie/
1

7


L'*ENCYLOPÉDIE* : CHRONOLOGIE
1745 – Association de libraires pour traduire la *Cyclopaedia or an Universal dictionary of arts and sciences* d'Ephraim Chambers (2 vol., 1728). Gua de Malves, académicien, organise le travail.
1747 – Diderot et D'Alembert remplacent Gua de Malves et mettent en place un projet plus ambitieux (35 volumes au final, dont 17 de textes)
1749 – Diderot emprisonné à Vincennes (suite à la parution de sa *Lettre aux aveugles*), puis libéré.
1751 – Parution du premier tome contenant le Discours préliminaire de D'Alembert ainsi que le « Système figuré des connaissances humaines ».
1752 – Violentes attaques des jésuites et des jansénistes suivies d'un arrêt du conseil d'Etat. La publication reprend cependant.
1759 – Après une violente campagne, nouvelle interdiction (définitive), suivie d'une condamnation papale.
1765 – Parution des dix derniers volumes de textes, sans privilège et sous une adresse étrangère (+ onze volumes de planches publiés entre 1765 et 1772).
Denis Diderot (1713-1784)
1
2024
D. AUBIN - LU3MA209 8

8

MATHÉMATIQUES ET ABSTRACTION

Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783)

Une philosophie dans le « discours préliminaire » de l'*Encyclopédie*.

Fondement empirique « Rien n'est plus incontestable que l'existence de nos sensations »

Abstraction « par des opérations & des abstractions successives de notre esprit, nous dépouillons la matiere de presque toutes ses propriétés sensibles, pour n'envisager en quelque maniere que son phantôme; & l'on doit sentir d'abord que les découvertes auxquelles cette recherche nous conduit, ne pourront manquer d'être fort utiles […] par exemple, lorsqu'il sera question d'étudier leur mouvement, en les considérant comme des parties de l'espace, figurées, mobiles, & distantes les unes des autres. »

Recomposition « après avoir généralisé ses perceptions jusqu'au point de ne pouvoir plus les décomposer davantage, [l'esprit] revient ensuite sur ses pas, recompose de nouveau ces perceptions mêmes, & en forme peu à peu & par gradation, les êtres réels qui sont l'objet immédiat & direct de nos sensations. Ces êtres, immédiatement relatifs à nos besoins, sont aussi ceux qu'il nous importe le plus d'étudier ; les abstractions mathématiques nous en facilitent la connoissance ; mais elles ne sont utiles qu'autant qu'on ne s'y borne pas. »

2024 D. AUBIN - LU3MA209 9

9

MATHÉMATIQUES PURES ET MIXTES

« Les Mathématiques se divisent en deux classes ; la première, qu'on appelle **Mathématiques pures**, considère les propriétés de la grandeur d'une manière abstraite : or la grandeur sous ce point de vue, est ou calculable, ou mesurable ; dans le premier cas, elle est représentée par des nombres, dans le second, par l'étendue ; dans le premier cas les Mathématiques pures s'appellent Arithmétique, dans le second Géométrie. […] La seconde classe s'appelle **Mathématiques mixtes** ; elle a pour objet les propriétés de la grandeur concrette, en tant qu'elle est mesurable ou calculable ; nous disons de la grandeur concrette, c'est-à-dire de la grandeur envisagée dans certains corps ou sujets particuliers. […] Du nombre des Mathématiques mixtes sont la Méchanique, l'Optique, l'Astronomie, la Géographie, la Chronologie, l'Architecture militaire, l'Hydrostatique, l'Hydraulique, l'Hydrographie ou Navigation, &c. »

— D'Alembert, art. MATHÉMATIQUE OU MATHÉMATIQUES (*Encyclopédie*, t. X, 1765) .

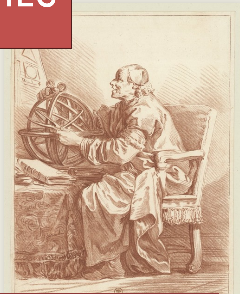
2024 D. AUBIN - LU3MA209 10

10

GÉOMÈTRES ET PHILOSOPHES

« Faites naître, s'il est possible, des géometres parmi ces peuples ; c'est une semence qui produira des philosophes avec le tems, & presque sans qu'on s'en aperçoive. L'orthodoxie la plus délicate & la plus scrupuleuse n'a rien à démêler avec la Géométrie. Ceux qui croiroient avoir intérêt de tenir les esprits dans les ténebres, fussent-ils assez prévoyans pour pressentir la suite des progrès de cette science, manqueroient toûjours de prétexte pour l'empêcher de se répandre. Bientôt l'étude de la Géométrie conduira à celle de la méchanique ; celle-ci menera comme d'elle-même & sans obstacle, à l'étude de la saine Physique; & enfin la saine Physique à la vraie Philosophie, qui par la lumiere générale & prompte qu'elle répandra, sera bientôt plus puissante que tous les efforts de la superstition; car ces efforts, quelque grands qu'ils soient, deviennent inutiles dès qu'une fois la nation est éclairée. »

— D'Alembert, art. GÉOMÈTRE, t. VII .



Le Géomètre, par Jean-Baptiste Le Prince (1734-1781)

2024 D. AUBIN - LU3MA209 11

11

LIMITES DES MATHÉMATIQUES

Georges Leclerc, comte de Buffon (1707-1788)

Histoire naturelle, générale et particulière, avec la description du cabinet du Roy, tome premier,1749.

- « Il est vrai que cette union des Mathématiques & de la Physique ne peut se faire que pour un très-petit nombre de sujets ; il faut pour cela que les phénomènes que nous cherchons à expliquer, soient susceptibles d'être considérez d'une manière abstraite, & que de leur nature ils soient dénuez de presque toutes qualités physiques, car pour peu qu'ils soient composez, le calcul ne peut plus s'y appliquer. »
- « Lorsque les sujets sont trop compliquez pour qu'on puisse y appliquer avec avantage le calcul & les mesures, comme le sont presque tous ceux de l'Histoire Naturelle & de la Physique particulière, il me paroît que la vraie méthode de conduire son esprit dans ces recherches, c'est d'avoir recours aux observations, de les rassembler, d'en faire de nouvelles, & en assez grand nombre pour nous assurer de la vérité des faits principaux, & de n'employer la méthode mathématique que pour estimer les probabilités des conséquences qu'on peut tirer de ces faits ; surtout il faut tâcher de les généraliser & de bien distinguer ceux qui sont essentiels de ceux qui ne sont qu'accessoires au sujet que nous considérons ; il faut ensuite les lier ensemble par les analogies, confirmer ou détruire certains points équivoques, par le moyen des expériences, former son plan d'explication sur la combinaison de tous ces rapports, & les présenter dans l'ordre le plus naturel. »

2024 D. AUBIN - LU3MA209 12

12

MATHÉMATIQUES POUR LA FORMATION DE L'ÉLITE

1679 : École royale d'artillerie de Douai

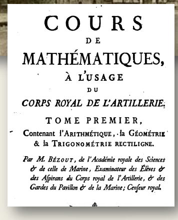
1720 : cinq écoles royales d'artillerie

1748 : École du génie à Mézières (un examen d'entrée)

1756 : École de l'Artillerie à La Fère

1756–1763 : Guerre de Sept Ans.

1764 : Étienne Bézout à l'École des gardes du pavillon et de la marine.


COURS DE MATHÉMATIQUES, À L'USAGE DU CORPS ROYAL DE L'ARTILLERIE.

TOME PREMIER,

Contenant l'Arithmétique, la Géométrie & la Trigonométrie rectiligne.

Par M. Bézout, de l'Académie royale des Sciences & de celle de Marine, Examinateur des Élèves & des Aspirans du Corps royal de l'Artillerie, & des Gardes du Pavillon & de la Marine; Censeur royal.

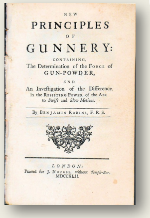
Les écoles d'ingénieurs

École des Ponts et chaussées (1747; corps établi en 1716), École du Génie maritime (1741, puis 1765), École du Génie de Mézières pour les fortifications (1749), École des Mines (1783)…

2024 D. AUBIN - LU3MA209 13

13

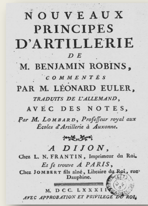
MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES À LA GUERRE


NEW PRINCIPLES OF GUNNERY: CONTAINING, The Determination of the Force of Gun-powder, and An Investigation of the Difference in the Resisting Power of the Air to Swift and Slow Motions. By Benjamin Robins, F.R.S. LONDON

1742 – New Principles of Gunnery
- Benjamin Robins (1707-1751)

1745 – Neue Grundsätze der Artillerie
- Leonhard Euler (1707-1783)

1783 – Nouveaux Principes d'artillerie
- Jean-Louis Lombard (1723–1794)


NOUVEAUX PRINCIPES D'ARTILLERIE DE M. BENJAMIN ROBINS, COMMENTÉS PAR M. LEONARD EULER, TRADUITS DE L'ALLEMAND, AVEC DES NOTES, Par M. Lombard, Professeur royal aux Écoles d'Artillerie à Auxonne. A DIJON, M. DCC. LXXXIII. AVEC APPROBATION ET PRIVILÈGE DU ROI.

2024 D. AUBIN - LU3MA209 14

14

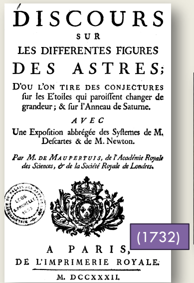
MATHÉMATIQUES MIXTES

1. Figure de la terre
2. Problème des trois corps

2024 D. AUBIN - LU3MA209 15

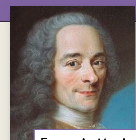
15

DÉBAT SUR LA FIGURE DE LA TERRE


DISCOURS SUR LES DIFFERENTES FIGURES DES ASTRES; D'OÙ L'ON TIRE DES CONJECTURES sur les Étoiles qui paroissent changer de grandeur; & sur l'Anneau de Saturne. AVEC Une Exposition abrégée des Systèmes de M. Descartes & de M. Newton. Par M. de Maupertuis, de l'Académie Royale des Sciences, & de la Société Royale de Londres. A PARIS, DE L'IMPRIMERIE ROYALE. M. DCCXXXII.

(1732)

Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698–1759)



François-Marie Arouet, dit Voltaire (1694–1778)

Voltaire, *Lettres philosophiques* (1734).

A Paris vous vous figurés la Terre faite comme un Melon; à Londres elle est applatie des deux cotés.

2024 D. AUBIN - LU3MA209 16

16

ORANGE OU MELON ?

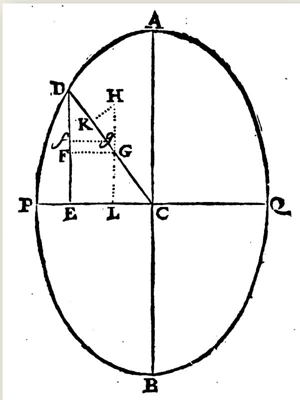
Coefficient d'aplatissement :

$$\alpha = \frac{PC - AC}{AC}$$

$\alpha = 0$: Terre sphérique
$\alpha > 0$: Terre aplatie aux pôles
$\alpha < 0$: Terre allongée aux pôles

→ Un conflit entre **Cartésiens** et **Newtoniens**

→ Des enjeux mathématiques

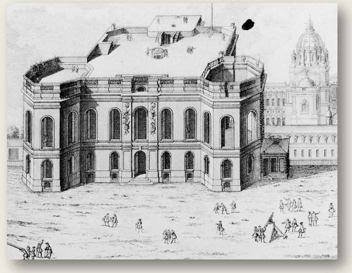


2024 D. AUBIN - LU3MA209 17

17

UNE ATTAQUE CONTRE LES CASSINI

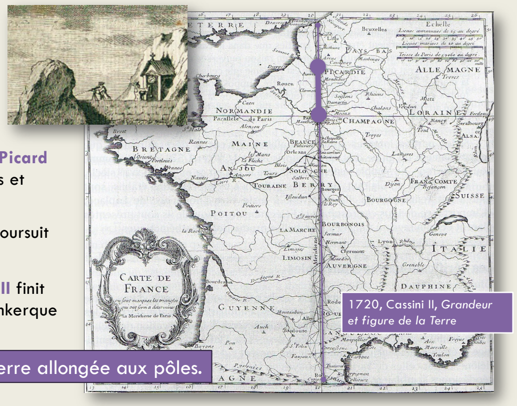
- I – Giovanni Domenico (1625–1712)
- II – Jacques (1677–1756)
- III – César-François (1714–1784)
- IV – Jean-Dominique (1748–1845)



2024 D. AUBIN - LU3MA209 18

18

GÉODÉSIE



1720, Cassini II, *Grandeur et figure de la Terre*

En 1669–1670, l'abbé **Jean Picard** mesure le méridien entre Paris et Amiens

À Partir de 1683, **Cassini I** poursuit le travail (avec La Hire)

Entre 1700 et 1718, **Cassini II** finit la mesure du Méridien de Dunkerque aux Pyrénées

→ une Terre allongée aux pôles.

2024 D. AUBIN - LU3MA209 19

19

THÉORIES NEWTONIENNE VS. CARTÉSIENNE

Christiaan Huygens (1629-1695)

Newton :
attraction et rotation causent la figure de la Terre

> « Si les planettes n'avoient point le mouvement journalier de roation autour de leur axe, elles devroient être sphériques à cause de l'égale gravité de leurs parties. Le mouvement de rotation fait que les parties qui s'éloignent de l'axe font effort pour monter vers l'équateur. Et par conséuent, si la matière dont elles sont composées étoit fluide, son élévation vers l'équateur augmenteroit le diamétre de ce cercle, & son abaissement vers les Pôles diminueroit l'axe. »
> – Newton, *Principia*, Livre III, prop. 18, p. 34.

- Grâce à l'application d'une condition d'équilibre hydrostatique, Newton conclut à un coefficient d'aplatissement de la Terre de **1/230**.
- Dans son *Discours sur la cause de la pesanteur* (1690), **Huygens**, cartésien, propose une autre théorie pour le calcul du coefficient d'aplatissement :
  - il suppose pareillement la planète fluide et homogène mais refuse l'idée d'attraction mutuelle à distance des particules
  - il démontre que la figure de la Terre est un ellipsoïde de révolution (ce que Newton s'était contenté de supposer), et parvient à un coefficient d'aplatissement **1/578**.

2024 D. AUBIN - LU3MA209 20

20

DES MESURES CONTRADICTOIRES

Les **mesures pendulaires** : les périodes des petites oscillations d'un pendule augmentent si l'on augmente la longueur du fil et diminuent et si l'on augmente la force qui l'attire vers le bas (un pendule d'un « mètre » fait un aller-et-retour en une seconde!)

- L'observation de Richer à Cayenne (1672) est confirmée par les mesures de Halley à Sainte-Hélène en 1677 et par celles de Varin et Deshayes au Cap Vert en 1682. Confirment l'aplatissement aux pôles.

L'Une des plus considerables Observations que j'ay faites, est celle de la longueur du pendule à secondes de temps, laquelle s'est trouvée plus courte en Caïenne qu'à Paris : car la mesme mesure qui avoit esté marquée en ce lieu-là sur une verge de fer, suivant la longueur qui s'estoit trouvée necessaire pour faire un pendule à secondes de temps, ayant esté apportée en France, & comparée avec celle de Paris, leur difference a esté trouvée d'une ligne & un quart, dont celle de Caïenne est moindre que celle de Paris, laquelle est de 3. pieds 8. lignes ⅗. Cette Observation a esté réïterée pendant dix mois entiers, où il ne s'est point passé de semaine qu'elle n'ait esté faite plusieurs fois avec beaucoup de soin.

Les **mesures géodésiques** : la méthode consiste à relier deux lieux d'un même méridien par une chaîne de triangles dont on détermine la longueur des côtés de proche en proche à partir de la longueur d'un coté de départ et de la mesure des angles successifs.

- Contredisent les théories de Newton et de Huygens.

2024 D. AUBIN - LU3MA209 21

21

LE DÉBAT DE 1734-1735

- Les mesures des Cassini donnent raison aux cartésiens, qui tentent de justifier l'aplatissement de la Terre à l'équateur par le biais de la théorie des tourbillons.
  - Mais Descartes n'avait pas traité le problème et Huygens était parvenu au résultat inverse en utilisant des arguments cartésiens.
- Ce débat entre cartésiens et newtoniens à l'Academie des sciences de Paris est le reflet d'une opposition à plusieurs niveaux :
  - l'opposition de deux explications du monde (Descartes / Newton, vide / plein, tourbillons / attraction) et deux traditions, l'une française, l'autre anglaise.
  - l'opposition entre des astronomes de terrain reconnus et puissants (les Cassinis) et des géomètres.
  - l'opposition entre les tenants d'arguments géométriques traditionnels et les adaptes de l'analyse différentielle.
- En 1735, l'Académie royale des sciences décide de financer deux expéditions, l'une en **Laponie**, l'autre au **Pérou**, afin de mesurer les degrés de méridiens au pôle et à l'équateur.

2024 D. AUBIN - LU3MA209 22

22

DEUX EXPÉDITIONS

Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759)

L'expédition en Laponie (1735-1737)

- Les participants : Maupertuis, Clairaut, Celsius, Le Monnier.
- Au retour de l'expédition, le 13 novembre 1737, Maupertuis fait un compte-rendu devant l'Académie royale des Sciences :

« enfin notre degré avec l'aberration diffère de 950 toises de ce qu'il devrait être suivant les mesures que Mr Cassini a établies dans son livre *Grandeur et figure de la Terre*… d'où l'on voit que la Terre est considérablement aplatie vers les pôles »

L'expédition au Pérou (1736-1744)

- Les participants : Pierre Bouguer, La Condamine.
- Retour… en 1744 ! Bouguer et La Condamine confirment l'aplatissement au pôle, mais le résultat est déjà admis par l'Académie…
- … En 1740, suite au retour de l'expédition de Laponie, une nouvelle mesure géodésique (plus précise) de la méridienne de France avait été menée par Cassini de Thury et La Caille et avait conduit à une nouvelle confirmation de l'aplatissement aux pôles.

2024 D. AUBIN - LU3MA209 23

23

INNOVATION MATHÉMATIQUE

Alexis Clairaut (1713-1765)

Mise en équation du problème notamment fondée sur la formulation analytique du principe de l'hydrostatique.
Un extension du calcul différentiel et intégral aux fonctions de plusieurs variables :

Théorie de la figure de la Terre, tirée des principes de l'hydrostatique (1743)

& l'on auroit le poids total de ON. Mais comme l'équilibre du Fluide demande que le poids de ON ne dépende pas de la courbure de OSN, c'est-à-dire de la valeur particuliere de y en x, il faut donc que $Pdy + Qdx$ puisse s'intégrer sans connoître la valeur de x, c'est-à-dire qu'*il faut que* $Pdy + Qdx$ *soit une differentielle complette*, * *afin qu'il puisse y avoir équilibre dans le Fluide.*

Lorsque les expressions des forces P & Q seront assez composées, pour qu'on ne reconnoisse pas facilement si $Pdy + Qdx$ est une differentielle complette, il faudra se servir du Theoreme que j'ai donné dans mon mémoire * sur le calcul intégral, c'est-à-dire qu'il faudra voir si $\frac{dP}{dx} \overset{**}{=} \frac{dQ}{dy}$. Toutes les fois que

2024 D. AUBIN - LU3MA209 24

24

PROBLÈME DES TROIS CORPS

Pour tout système de plus de deux corps, la loi de la gravitation universelle conduit au fait que les lois de Kepler ne sont qu'approximativement valides.

1747: Problème du calcul de la trajectoire de la lune

Clairaut suggère de changer la loi de la gravitation en y ajoutant un terme en $1/r^4$?

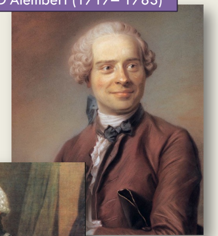
d'Alembert et Euler:

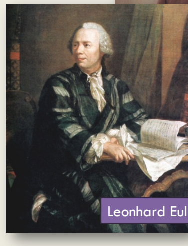
Résolution (temporaire) par la théorie des perturbations (cf. Laplace) : réaffirmation de la loi de la gravitation universelle et de la puissance du calcul différentiel et intégral.

2024 D. AUBIN - LU3MA209 25

25

UNE RIVALITÉ CRÉATRICE


Jean Le Rond D'Alembert (1717– 1783)


Leonhard Euler (1707–1783)

Les Académies:
- D'Alembert : Académie des Sciences (1741); Académie française (1754)
- Euler : Saint-Pétersbourg (1727); Berlin (1741); Saint-Pétersbourg (1766).

Interaction thématique forte, allers-retours parle biais de la correspondance et des publications
- Théorie des cordes vibrantes et notion de fonction
- Théorème fondamental de l'algèbre
- Théorie de la Lune
- Mécanique des fluides, etc.

2024 D. AUBIN - LU3MA209 26

26

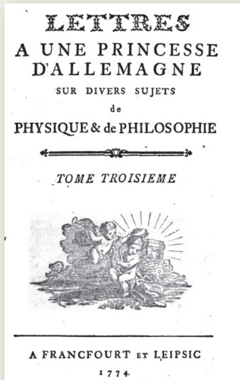
ŒUVRES D'EULER

Étudiant de Jean Bernoulli.

A Berlin, il rédige plus de 380 articles !
- dans tous les domaines des mathématiques pures: surtout l'analyse et la géométrie
- et des « mathématiques mixtes »: mécanique, hydrodynamique, optique, etc.

Une grande synthèse mathématique:
- *Introductio in analysin infinitorum* (1748).
- *Institutiones calculi differentialis* (1755).

Une grande œuvre de vulgarisation:
- *Lettres de L. Euler à une princesse d'Allemagne au sujet de divers sujets de physique et de philosophie* (1760–1762)


LETTRES
A UNE PRINCESSE
D'ALLEMAGNE
SUR DIVERS SUJETS
de
PHYSIQUE & de PHILOSOPHIE
TOME TROISIEME
A FRANCFOURT ET LEIPSIC
1774

2024 D. AUBIN - LU3MA209 27

27

MATHÉMATIQUES PURES

1. Intégration des fonctions rationnelles
2. Théorème fondamental de l'algèbre
3. L'analyse et la notion de fonction

2024 D. AUBIN - LU3MA209 28

28

INTÉGRATION DES FONCTIONS RATIONNELLES

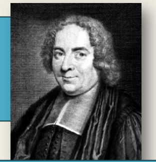

Leibniz (1646–1716)

- Dans la première moitié du 18e siècle, l'évolution du problème de l'intégration des fractions rationnelle est liée à celle du problème de la décomposition réelle des polynômes… $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$
- **Leibniz**, [Aperçu d'une nouvelle analyse concernant la science de l'infini appliquée aux sommes et aux quadratures], *Acta Eruditorum*, mai 1702.
  - le cas des racines simples (décomposition en facteurs du premier degré à coefficients réels ou imaginaires)
  - la possibilité de décomposer, de façon générale, les polynômes en facteurs réels du 1er ou 2nd degré: réponse négativement.
    - Conclusion erronée: les intégrales des différentielles rationnelles ne peuvent pas être généralement réduites à la quadrature de sections de cercle et d'hyperbole.
  - la méthode repose sur la décomposition des fractions rationnelles en éléments simples réels, ce qui n'est pas le cas de celle de Jean Bernoulli…

2024 D. AUBIN - LU3MA209 29

29

INTÉGRATION DES FONCTIONS RATIONNELLES (2)

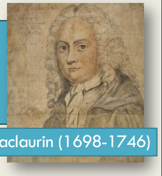

Varignon (1654-1722)

- Lecture par **Pierre Varignon**, en août 1702, d'un mémoire de Jean Bernoulli, « Solution d'un problème concernant le calcul intégral » (publié dans les *MARS* pour l'année 1704).
  - Comme Leibniz, uniquement le cas des racines simples (décomposition en facteurs du premier degré à coefficients réels ou imaginaires), mais…
  - intégration formelle de chaque élément simple sous la forme d'un logarithme, réel ou imaginaire.
    - Conclusion : les intégrales des différences rationnelles peuvent toujours être réduites à la quadrature de sections coniques, mais sans preuve.
- **Leibniz**, « Continuatio analyseos quadraturam rationalium », *Acta Eruditorum*, janvier 1703 : cas des racines multiples.

2024 D. AUBIN - LU3MA209 30

30

INTÉGRATION DES FONCTIONS RATIONNELLES (3)


Maclaurin (1698-1746)

- Dans son *Treatise of Fluxions* (1742), **Maclaurin** propose une synthèse presque complète sur l'intégration des fractions rationnelles :
  - il s'appuie sur les travaux de Leibniz, **René de Cotes** (1722) et **Abraham de Moivre** (1730) pour montrer que l'intégrale s'exprime par des expressions algébriques et/ou des arcs circulaires et/ou des logarithmes…
  - mais ne traite pas le cas où le dénominateur se factorise en trinômes du second degré élevés à une puissance > 1.
    - Ce cas sera traité par **Bougainville** dans son *Traité du calcul intégral* (1754–1756) puis par **Euler** dans son *Calculus integralis* (1768).
  - **MacLaurin** conclut prudemment sur la possibilité de décomposer les polynômes en facteurs réels du 1er ou 2nd degré.

2024 D. AUBIN - LU3MA209 31

31

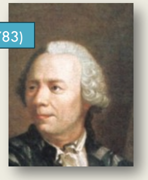
THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE (TFA) : ÉQUIVALENCES

Tout polynôme de degré n supérieur ou égal à 1 à coefficients complexes a **au moins une racine complexe** Tout polynôme de degré n supérieur ou égal à 1 à coefficients complexes se décompose en un **produit de n facteurs linéaires à coefficients complexes** et admet n racines complexes (distinctes ou confondues)	⟷	L'ensemble des nombres complexes est un corps algébriquement clos
Tout polynôme de degré n supérieur ou égal à 1 à coefficients réels peut se décomposer en un **produit de facteurs réels du premier ou du second degré**	⟷	L'ensemble des nombres réels est un corps ordonné maximal

2024 D. AUBIN - LU3MA209 32

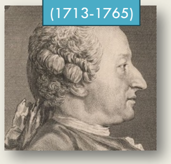
32

TFA (2) : LES PRÉMICES


Euler (1707–1783)

- Dans l'*Invention nouvelle en algèbre* (1619) et dans la *Géométrie* (1637), **Girard** et **Descartes** affirment que toute équation algébrique de degré n admet n racines réelles ou imaginaires.
- L'énoncé du TFA n'apparaît qu'au 18e siècle et sera contesté jusqu'au milieu du siècle en raison du statut des quantités imaginaires.
  - Les imaginaires sont vus comme des quantités exprimées par des formules faisant intervenir des puissances paires qui sont des nombres négatifs; ils ne s'expriment donc pas toujours sous la forme $a+b\sqrt{-1}$
- En 1739, **Euler** ramène une autre question de calcul intégral au problème de la résolution du TFA : l'intégration des équations différentielles linéaires homogènes d'ordre n à coefficients constants.
- Le 15 février 1744, **Clairaut** fait la lecture d'une lettre d'Euler (du 14 août 1742) sur le sujet devant l'Académie royale des sciences de Paris :

> « Il faudroit démontrer que dans toute équation les racines imaginaires vont toujours paire à paire en sorte que tant la somme que le produit de chaque paire fut réel […], ce que je crois indubitable, quoique je ne le puisse démontrer parfaitement ».


Clairaut (1713-1765)

33

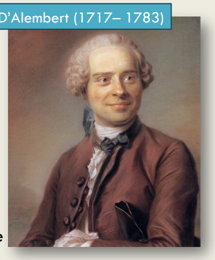
TFA (3): D'ALEMBERT


D'Alembert (1717– 1783)

- D'Alembert:
  - première démonstration erronée du TFA dans un mémoire inédit de 1745,
  - puis une seconde totalement différente un mémoire intitulé « Recherches sur le calcul intégral » présenté en 1746 et publié en 1748.
- Dans les deux cas, il commence par démontrer la stabilité des imaginaires par les opérations algébriques usuelles (addition, soustraction, multiplication et division) :
  - sa démonstration ne s'applique pas aux autres opérations usuelles, qu'elles soient ou non algébriques
  - son résultat sur la **stabilité** des expressions $a+b\sqrt{-1}$ va permettre d'obtenir le consensus des savants sur la forme des imaginaires.
- Ce résultat est à la base d'une des deux démonstrations du TFA donnée par Euler dans son mémoire « Recherches sur les racines imaginaires des équations » présenté en 1749 et publié en 1751.

34

TFA (4): DÉMONSTRATION DE D'ALEMBERT


D'Alembert (1717– 1783)

- « J'ai démontré
  1. Que tout quantité imaginaire, d'une forme quelconque, peut se réduire à la forme : $a+b\sqrt{-1}$, a et b étant des quantités réelles.
  2. Que toute racine imaginaire d'une équation quelconque pouvoit s'exprimer par $a+b\sqrt{-1}$, et qu'en ce cae il y en avoit une autre représentée par $a-b\sqrt{-1}$

d'où j'ai conclu que toute quantité algébrique rationnelle, ou si l'on veut, toute équation étoit réductible en facteurs trinômes réels.

A l'égard de la seconde proposition, il semble d'abord qu'elle soit une suite nécessaire de la première, mais il faudroit pour cela avoir démontré […] que l'on peut toujours supposer une forme imaginaire quelconque à une racine non réelle ; cette supposition peut être fort vraisemblable, mais elle est en même temps fort difficile à démontrer rigoureusement ».

- [« Observations de 1752 », BI, Paris, Ms. 1787 (papiers D'Alembert), f. 191 r°-v°]

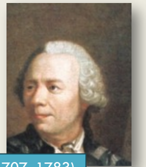
35

TFA (5): LES DÉMONSTRATIONS

D'Alembert, « Recherches sur le calcul intégral », MARS année 1746 (1748).	Démonstration analytique fondée sur l'utilisation des séries.
Euler, « Recherches sur les racines imaginaires des équations », HAB année 1749 (1751).	Démonstration algébrique.
Lagrange, « Sur la forme des racines imaginaires des équations », NMAB année 1772 (1774).	Corrige deux lacunes techniques de la démonstration d'Euler et propose une démonstration dans la même lignée.
Gauss, Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicum rationalem integram unius variabilis, 1799.	Démonstration géométrico-algébrique assortie d'un commentaire critique des démonstrations de D'Alembert, Euler et Lagrange

36

LE CONCEPT DE « FONCTION »

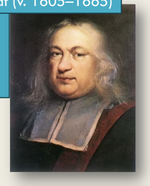


Euler (1707–1783)

- Établir l'analyse comme branche autonome des mathématiques.
- Rien de plus qu'un nouveau mot pour un concept antique?
  - *e.g.* les tables de cordes de Ptolémée.
- Les courbes transcendantes.
- **Leibniz** (1694) et **Jean Bernoulli** (1718):
  - Les « fonctions » d'une ligne.
- **Euler:**
  Renversement des bases de l'analyse
  - la courbe au lieu d'être considérée comme la trajectoire d'une particule, décrite par ses coordonnées, devient une **fonction de ses coordonnées**.

37

LA COURBE COMME FONCTION



Fermat (v. 1605–1665)

- **Fermat**, *Ad locos et solidos isagoge* (écrit en 1637, publié en 1679) :

  « Aussitôt que deux quantités inconnues apparaissent dans une ultime égalité, il y a un lieu et le point terminal de l'une des deux quantités décrit une ligne droite ou courbe. »

- **Descartes**, *Géométrie* (1637):

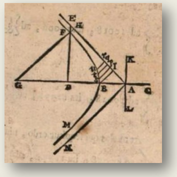
  « Prenant successivement infinies diverses grandeurs pour la ligne y, on en trouvera aussi infinies pour la ligne x, et ainsi, on aura une infinité de divers points tels que celui qui est marqué C, par le moyen desquels on décrit la ligne courbe demandée. »

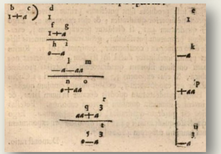
  - Descartes fait le lien entre une équation en x et y et une courbe sur le plan.
  - Il restreint cette relation fonctionnelle aux courbes « géométriques » (c'est-à-dire algébriques) et en exclut donc les courbes « méchaniques » (c'est-à-dire transcendantes).

Descartes (1596–1650)

38

COURBES TRANSCENDANTES





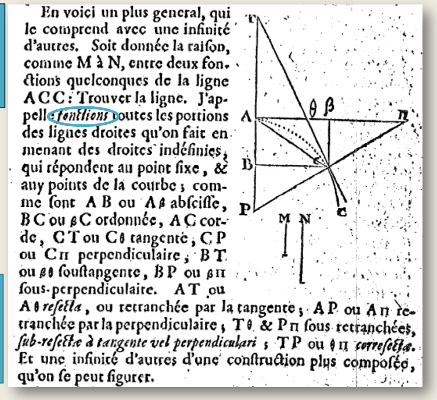
- Développement en séries entières (par Mengoli, Mercator et Newton) va permettre de représenter analytiquement les courbes transcendantes laissées de côté par Descartes :
  - Dans le *Logarithmotechnia* (1668), Nicolas **Mercator** (1620–1687) parvient à calculer l'aire sous l'hyperbole grâce à la réduction en série géométrique de $1/(1+x)$ puis à son intégration terme à terme.
  - Isaac Newton obtient le développement en séries entières des fonctions sinus, cosinus, des fonctions inverses des lignes trigonométriques, etc.
- **Leibniz** introduit pour la première fois le terme de « fonction » dans un manuscrit d'août 1673, non publié et intitulé « la Méthode inverse des tangentes ou à propos des fonctions ».

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$$

39

« FONCTIONS » CHEZ LEIBNIZ

Leibniz (1646–1716)



En voici un plus general, qui le comprend avec une infinité d'autres. Soit donnée la raiſon, comme M à N, entre deux fonctions quelconques de la ligne ACC: Trouver la ligne. J'appelle *fonctions* toutes les portions des lignes droites qu'on fait en menant des droites indéfinies, qui répondent au point fixe, & aux points de la courbe ; comme ſont AB ou Aβ abſciſſe, BC ou βC ordonnée, AC corde, CT ou Cθ tangente, CP ou Cπ perpendiculaire ; BT ou βθ ſouſtangente, BP ou βπ ſous-perpendiculaire. AT ou Aθ *reſecta*, ou retranchée par la tangente ; AP ou Aπ retranchée par la perpendiculaire ; Tθ & Pπ ſous retranchées, *ſub-reſectæ à tangente vel perpendiculari* ; TP ou θπ *correſectæ*. Et une infinité d'autres d'une conſtruction plus composée, qu'on ſe peut figurer.

Leibniz, « Considérations sur la différence qu'il y a entre l'analyse ordinaire & le nouveau calcul des transcendantes », *Journal des Sçavants* (1694), p. 405

40

« FONCTION » CHEZ JEAN BERNOULLI

DEFINITION. On appelle ici *Fonction* d'une grandeur variable, une quantité composée de quelque maniere que ce soit de cette grandeur variable & de constantes.

Jean Bernoulli, « Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions des problèmes sur les isopérimètres, avec une nouvelle méthode courte & facile de les résoudre sans calcul, laquelle s'étend aussi à d'autres problèmes qui ont rapport à ceux-là », *MARS* (1718), p. 105.

Dans tout ce qui appartient aux Courbes de la plus vîte descente M. Bernoulli a supposé d'abord le Siftême de Galilée fur la chûte des Corps, c'eft-à-dire, que les vîteffes font à chaque inftant comme les Racines des hauteurs verticales d'où le Corps eft tombé jufques-là. Enfuite pour donner à fon Problême cette univerfalité fi chere aux grands Geometres, il prend les vîteffes comme telles fonctions qu'on voudra des hauteurs, & cela le conduit à des refléxions qui s'enfoncent trop dans les profondeurs de l'Art pour nous permettre de les fuivre.

Fontenelle, *HARS* (1718), p. 54.

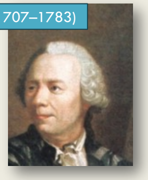
2024 D. AUBIN - LU3MA209 41

41

FONCTION CHEZ EULER

« Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée de quelque manière que ce soit de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes. » (1748)

Euler (1707–1783)



Le terme « analytique » désigne ici une expression obtenue à partir d'une combinaison d'opérations et de modes de calcul connus (opérations algébriques usuelles, exponentielle, logarithme, passage d'un arc à ses lignes trigonométriques), certaines de ces opérations pouvant être itérées un nombre infini de fois.

INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio BEROLINENSI, & *Academiæ Imperialis Scientiarum* PETROPOLITANÆ *Socio.*

TOMUS PRIMUS.

LAUSANNÆ,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.
MDCCXLVIII.

2024 D. AUBIN - LU3MA209 42

42

CLASSIFICATION DES FONCTIONS

Euler (1707–1783)

« Je les ai d'abord divisées en algébriques et transcendantes. Les premières sont composées de quantités variables combinées entre elles par les opérations ordinaires de l'algèbre, et les secondes dépendent d'autres opérations ou des mêmes combinaisons que les précédentes, mais répétées une infinité de fois ».

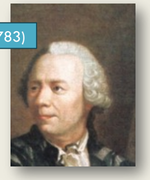
- Euler considère que toute fonction peut être développée en série.
  - Le sinus par exemple n'est plus la longueur d'un segment, mais un nombre défini par la série : $z - z^3/3! + z^5/5! + \ldots$.
  - → La formule d'Euler.
- Dans son application du concept de fonction à la géométrie, il distingue les fonctions « continues » (une seule expression analytique !) des fonctions « discontinues »…

2024 D. AUBIN - LU3MA209 43

43

GÉNÉRALISATION

Euler (1707–1783)



- Dans ses *Institutiones calculi differentialis*, publiés en 1755, Euler fait état d'une évolution importante de sa définition de la notion de fonction :

« Si des quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, alors on a l'habitude de nommer ces quantités fonctions de ces dernières ; cette dénomination a la plus grande étendue et contient en elle-même toutes les manières par lesquelles une quantité peut être déterminée par d'autres. Si, par conséquent, x désigne une quantité variable, alors toutes les autres quantités qui dépendent de x de n'importe quelle manière, ou qui sont déterminées par x, sont appelées fonctions de x ».

2024 D. AUBIN - LU3MA209 44

44

LA LIMITE COMME FONDEMENT

D'Alembert (1717– 1783)

Article « calcul différentiel » dans L'*Encyclopédie* (1755) :

- « M. Newton […] n'a jamais regardé le calcul différentiel comme le calcul des quantités infiniment petites, mais comme la méthode des premieres & dernieres raisons, c'est-à-dire la méthode de trouver les limites des rapports. Aussi cet illustre auteur n'a-t-il jamais différentié des quantités, mais seulement des équations ; parce que toute équation renferme un rapport entre deux variables, & que la différentiation des équations ne consiste qu'à trouver les limites du rapport entre les différences finies des deux variables que l'équation renferme. »
- « Quand une fois on l'aura bien comprise, on sentira que la supposition que l'on y fait de quantités infiniment petites, n'est que pour abréger & simplifier les raisonne-mens ; mais que dans le fond le calcul différentiel ne suppose point nécessairement l'existence de ces quantités ; que ce calcul ne consiste qu'à déterminer algébriquement la limite d'un rapport de laquelle on a déjà l'expression en lignes, & à égaler ces deux limites, ce qui fait trouver une des lignes que l'on cherche. Cette définition est peut-être la plus précise & la plus nette qu'on puisse donner du calcul différentiel »

La notion de **limite** dégagée comme fondement du calcul, mais non définie.

45

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

- Évoquées par Leibniz, Jean I, Jacques I et Nicolas Bernoulli dans leurs travaux sur les familles de courbes dépendant d'un paramètre.
- **Euler**: deux mémoires présentés en 1734 devant l'Académie de Pétersbourg (et publiés en 1740), parvient notamment à la formulation d'un critère (dit « critère d'Euler ») assurant l'équivalence entre une équation aux différences partielles (EDP) du 1er ordre et la « différentielle complète » associée :

$\frac{dp}{dt} = \frac{dq}{dx}$ ⟺ $p(x,t)dx + q(x,t)dt$ est une **« différentielle complète »…**

… c'est-à-dire telle qu'il existe une fonction $y(x,t)$ vérifiant : $dy = pdx + qdt$

- **Clairaut**, qui sera le premier à en faire usage dans le cadre d'une application à un problème physico-mathématique (en 1743…), et **Fontaine**, retrouveront ce critère de façon indépendante d'Euler à la fin des années 1730.

46

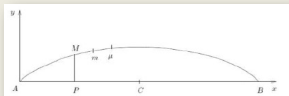
MATHÉMATIQUES MIXTES

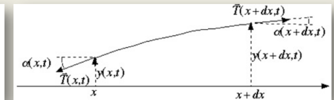
1. Le problème des cordes vibrantes

47

CORDES VIBRANTES : LE PROBLÈME

- **Problème** : équation du mouvement longitudinal d'une corde d'amplitude $y(x,t)$, de masse linéique μ, de longueur l, fixe en ses deux extrémités A et B (dans l'hypothèse de petites vibrations et en négligeant la force de pesanteur)
  - dx un élément infinitésimal de cette corde,
  - $T(x,t)$ le module de la force de tension au point $(x,y(x,t))$ à l'instant t (force exercée par la partie droite de la corde sur la celle de gauche),
  - et $\alpha(x,t)$ l'angle entre la force de module $T(x,t)$ et l'axe horizontal. [hypothèse des petits α]





48

L'ÉQUATION DE LA CORDE VIBRANTE

- Suivant l'axe des x : $0 = T(x+dx,t)\cos(\alpha(x+dx,t)) - T(x,t)\cos(\alpha(x,t))$

  d'où l'on déduit que : $T(x+dx,t) = T(x,t)$, soit $T(x,t) = \text{Cste} = T$.

- Suivant l'axe des y : $\mu\, dx \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(x+dx,t)\sin(\alpha(x+dx,t)) - T(x,t)\sin(\alpha(x,t))$

  c'est-à-dire, sachant que $\alpha \approx \sin\alpha \approx \tan\alpha = \dfrac{\partial y}{\partial x}$:

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\left[\frac{\partial y}{\partial x}(x+dx) - \frac{\partial y}{\partial x}(x)\right] = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx.$$

L'excursion $y(x,t)$ de la corde vérifie donc l'équation :

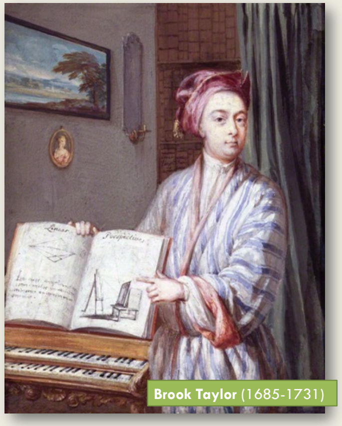
$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \quad \text{avec } c^2 = \frac{T}{\mu}$$

2024 D. AUBIN - LU3MA209 49

49

CORDE VIBRANTE : CHRONOLOGIE

- Jusqu'en 1713, les recherches concernent essentiellement le calcul du temps de vibration d'une corde tendue fixe entre deux extrémités.
- En 1713, **Taylor** « De motu nervi tensi » (*Philosophical Transactions*).
  - Détermination de la courbe que forme une telle corde au cours de ses oscillations. Calcul différentiel et intégral (mais que des fonctions d'une variable). → La corde forme une sinusoïde (la « compagne de la cycloïde ») à chaque instant.
- 1747–1754 : débats entre **D'Alembert**, **Euler** et **Daniel Bernoulli**.
- D'autres problèmes lié à celui des cordes vibrantes font également l'objet de recherches : le problème de la courbe élastique, le problème des lames vibrantes, le problème d'une corde chargée de poids suspendue par l'une de ses extrémités, etc.



Brook Taylor (1685-1731)

2024 D. AUBIN - LU3MA209 50

50

D'ALEMBERT 1747

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dx^2}}$$

en posant $c^2 = 1$

D'Alembert « Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration », *Histoire de l'Académie des sciences et belles-lettres de Berlin pour l'année 1747.*

- L'expression générale de la solution en utilisant notamment le « critère d'Euler » :
  - Il pose : $dy = pdt + qdx \longrightarrow$ $p = \dfrac{dy}{dt}$ et $q = \dfrac{dy}{dx}$; $pdt+qdx$ est une « différentielle complète » (*exacte*)
  - Puis : $\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{d^2y}{dx^2} \Rightarrow \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{dq}{dx} \Leftrightarrow$ $pdx+qdt$ est une « différentielle complète » (*exacte*)

2024 D. AUBIN - LU3MA209 51

51

D'ALEMBERT 1747

système de deux « différentielles complètes » :

$$\begin{cases} pdx + qdt \\ pdt + qdx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (p+q)d(x+t) \text{ complète} \\ (p-q)d(x-t) \text{ complète} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} p+q \text{ fonction de } x+t \\ p-q \text{ fonction de } x-t \end{matrix}$$

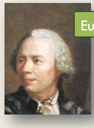
expression générale de la solution au problème: $\boxed{y(x,t) = \varphi(t+x) + \Gamma(t-x)}$

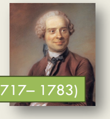
Conditions initiales (extrémités fixes)	Détermination complète de y(x,t) par:
Corde en position rectiligne (position d'équilibre) et vitesse non nulle : « corde frappée »	la courbe de la vitesse initiale de la corde
Corde écartée de sa position d'équilibre et vitesse nulle : « corde pincée »	la courbe de la position initiale de la corde
Cas mixtes	

2024 D. AUBIN - LU3MA209 52

52

DÉSACCORD


Euler (1707–1783)


D'Alembert (1717– 1783)

- En 1748, Euler « Sur la vibration des cordes » et très proche de celui de D'Alembert (il reconnaît d'ailleurs explicitement la priorité de ce dernier).
- En 1750, D'Alembert présente une addition à ses recherches de 1747. Il y réagit au mémoire d'Euler et ajoute une condition pour que la solution soit admissible, que :
  - « les différentes figures de la corde vibrante [soient] renfermées dans une seule & même équation. »
- Ce point de désaccord entre les deux savants est issu de leurs conceptions respectives de la **notion de fonction** :
  - D'Alembert associe le mot de fonction à une **expression analytique**
  - Euler conçoit une fonction comme une courbe donnée **arbitrairement** (c'est-à-dire graphiquement)
- Contrairement à Euler, D'Alembert rejette les fonctions changeant d'expression, c'est-à-dire les « fonctions discontinues » dans le sens du XVIIIᵉ siècle.

2024 D. AUBIN - LU3MA209 53

53

SÉRIES « DE FOURIER » ?


Daniel Bernoulli (1700–1782)

« ce que les nouvelles vibrations de Mrs D'Alembert et Euler ont de physique »

- **Daniel Bernoulli,** à l'Académie de Berlin, 1753 :
  - reproche à D'Alembert et Euler d'avoir admis de nouvelles courbes (autres que la sinusoïde de Taylor) « dans un sens tout-à-fait impropre ».
  - il établit sans calcul l'expression générale de la solution sous la forme d'une combinaison de vibrations simples (c'est-à-dire de fonctions sinusoïdales du type

$$\alpha(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

(avec $\alpha(t)$ une fonction du temps t, n un entier et l la longueur de la corde), de telle sorte que :

$$y(x,t) = \alpha(t)\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \beta(t)\sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + \gamma(t)\sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right) + \ \&\text{c}.$$

- cette solution est selon lui la plus générale (les courbes obtenues par Euler et D'Alembert doivent donc pouvoir s'y ramener).

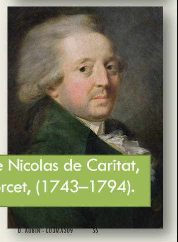
2024 Le vendredi 9 avril 2010 LM300 D. AUBIN - LU3MA209 54

54

SAUTS DE COURBURE

Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)

- D'Alembert en 1761 :
  - la fonction ϕ ne doit pas faire de « sauts de courbure » (c'est-à-dire ne pas passer « brusquement du fini à l'infini, ou de l'infini au fini, ou d'une valeur finie à une autre valeur finie »); elle ne doit pas changer d'expression ; et les deux conditions précédentes sont équivalentes.
- A partir de 1761, **Joseph Lagrange** (Berlin) est d'accord avec D'Alembert.
- D'Alembert va finir par changer de position sur les solutions admissibles :
  - **Condorcet**, disciple de D'Alembert, en 1771, envisage la possibilité de raccorder des fonctions changeant d'expression de telle sorte que leurs dérivées première et seconde ne fassent pas de sauts.
  - En 1780, dans un mémoire portant sur le problème de la propagation du son, D'Alembert généralise ce critère théorique jusqu'à l'ordre *n*.
  - Dans un mémoire non publié de son vivant, il affirme que la la fonction ϕ peut changer d'expression à condition qu'elle ne fasse pas de « sauts de courbure ».


Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat, marquis de Condorcet, (1743–1794).

2024 D. AUBIN - LU3MA209 55

55

CONCLUSIONS : LE CONCEPT DE FONCTION

- Concept de fonction et problèmes physiques : l'approche d'Euler semble en sortir vainqueur.
- Dans ses *Institutiones calculi differentiali* (1755), nouvelle définition très générale de la notion de fonction.
  - Mais Euler continue de ne considérer que des fonctions « analytiques » (dans le sens de développables en séries polynomiales ou trigonométriques).
  - Il maintient par ailleurs la distinction entre fonctions « continues » et « discontinues » (au sens de la possibilité de les exprimer ou non par une unique expression analytique).
- Dans sa *Théorie des fonctions analytiques* (1797), Lagrange ira plus loin en tentant de démontrer que toute fonction, aussi générale soit-elle, est développable en série. [L'application de l'analyse au champ des mathématiques mixtes sera portée à son apogée par Lagrange, dans sa *Mécanique analytique* (1788).]
- L'approche de D'Alembert dans le problème des cordes vibrantes conduit à une autre question, à côté de laquelle passe Euler : quelle notion de continuité est appropriée pour la solution des problèmes physiques ?
- **Liens très forts entre mathématiques pures et mathématiques mixtes**

2024 D. AUBIN - LU3MA209 56

56