

Cours 9:  
Les « Révolutions mathématiques »  
du XIX<sup>e</sup> siècle:  
Contexte et analyse

**LU3MA209**  
ÉLÉMENTS D'HISTOIRE DES  
MATHÉMATIQUES

2021-2022, 2<sup>e</sup> période  
David Aubin  
david.aubin@sorbonne-universite.fr

14/01/2022 0. AUBIN - LU3MA209 1

1

## PROGRAMME DES DEUX PROCHAINS COURS

1. Révolutions mathématiques du 19<sup>e</sup> siècle
2. Réforme de l'analyse : fondements, rigueur, séries de Fourier, intégration
3. Renouveau de la géométrie : géométries descriptive, projective, non euclidienne
4. Explosion de l'algèbre : équations, abstraction, axiomatisation

14/01/2022 0. AUBIN - 20011 2

2

## RÉVOLUTIONS MATHÉMATIQUES

1. Les révolutions scientifiques et mathématiques
2. Révolution française et enseignement des maths
3. Nouvelles conditions du travail mathématiques au 19<sup>e</sup> s.

14/01/2022 0. AUBIN - 20011 3

3

## LES RÉVOLUTIONS EN SCIENCES ET EN MATHÉMATIQUES

**Des exemples:**

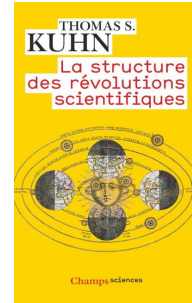
- la révolution scientifique (de Copernic à Newton)
- la révolution chimique (Lavoisier)
- les révolutions de la physique au début du XX<sup>e</sup> siècle:
  - Relativité restreinte et relativité générale d'Einstein,
  - Mécanique quantique (Bohr, Heisenberg, Schrödinger).
- les révolutions dans les sciences du vivant:
  - la théorie de l'évolution de Darwin (1859)
  - la biologie moléculaire (structure de l'ADN découverte par Watson et Crick en 1953).
- révolution cybernétique, informatique?...

**T. S. Kuhn, La Structure des révolutions scientifiques (1962):**

- « science normale », paradigmes et matrice disciplinaire,
- anomalies, révolutions, incommensurabilité...

**La question de la temporalité des « révolutions »**

**Y a-t-il des « révolutions » en mathématiques?**



14/01/2022 0. AUBIN - 20011 4

4

## LA RÉVOLUTION FRANÇAISE ET L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

### École centrale des travaux publics, fondée en 1794.

- École « **polytechnique** » avant les écoles d'applications (Mines, Ponts et Chaussées, Artillerie, etc.)
- Base théorique et mathématique
- Souci des applications
- Soucis pédagogiques
- Le modèle de l'école d'artillerie militaire de Mézières (Gaspard Monge).



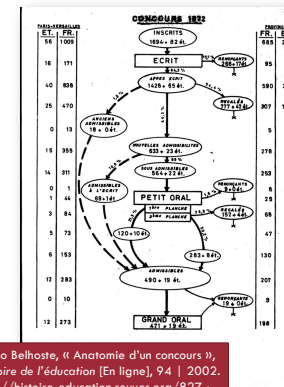
5

## LE CONCOURS, LA FORMATION

« 400 élèves ayant déjà, dans un **examen**, fait preuve d'intelligence et de connaissances acquises sur les éléments d'arithmétique, d'algèbre et de géométrie ».

« ces élèves étant destinés à remplir un jour, soit des fonctions d'ingénieurs de différents genres, soit des professions particulières qui exigent des hommes éclairés dans les sciences ou les arts, on leur apprend les parties de mathématiques et de physique qui sont effectivement la base des connaissances nécessaires ».

- Analyse mathématiques et applications à la géométrie et à la mécanique; Géométrie descriptive (stéréotomie, architecture et fortification) et dessin
- Physique générale et chimie: les sels, la matière vivante, les minéraux



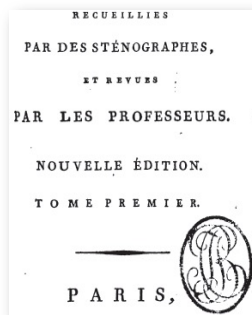
Bruno Belhoste, « Anatomie d'un concours », Histoire de l'éducation [En ligne], 94 | 2002. <http://histoire-education.revues.org/827> ,

6

## LA RÉVOLUTION FRANÇAISE ET L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

### L'École Normale de l'An III (1795)

- Appliquer la « *méthode révolutionnaire* » à la formation des maîtres.
- 1000 élèves à Paris, Jardin des Plantes.
- Leçons de mathématiques, par:
  - Pierre-Simon Laplace
  - Louis Lagrange
  - Gaspard Monge (géométrie)
- Une « dialectique entre l'originalité et la tradition ».
- Des maths pures et unifiées.



7

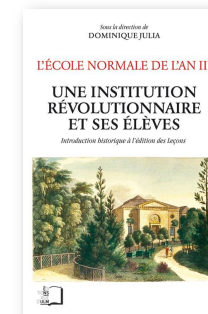
## LA "MÉTHODE RÉVOLUTIONNAIRE" DE L'ENSEIGNEMENT

### École polytechnique:

« (l'on s'y attache bien plus au travail que l'élève exécute de ses propres mains, qu'à ce qu'il peut apprendre en écoutant les professeurs ou en étudiant dans des livres.) »  
(Journal polytechnique, Germinal, 1794).

### École normale:

- « Les professeurs [...] ont pris, avec les Représentans du Peuple, et entr'eux, l'engagement de ne point lire ou débiter de mémoire des discours écrits. Ils parleront; leurs idées seront préparées, sans doute; leurs discours ne le seront point. »
- « Il sera moins question de mots que de choses, de verbiage académique que de philosophie exacte, de démonstrations et de vérités. »
- « Présenter les plus importantes découvertes que l'on ait faites dans les sciences, en développer les principes, faire remarquer les idées fines et heureuses qui leur ont donné naissance, indiquer la voie la plus directe qui peut y conduire, [présenter] ce qui reste à faire, la marche qu'il faut suivre pour s'élever à ces nouvelles découvertes. »

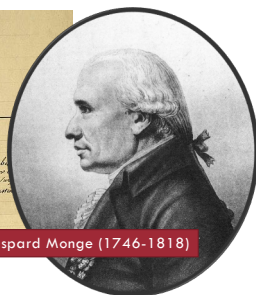


8

## LES PROFESSEURS DE L'ÉCOLE NORMALE DE L'AN III

**Monge:** Professeur de géométrie descriptive à l'école normale Révolutionnaires.

- Né à Beaune en 1746
- Professeur à l'École du génie de Mezières pendant 20 ans
- Révolutionnaire enthousiaste
- Ministre de la Marine (1793-1794)
- Fondateur de l'École polytechnique
- Application de l'analyse à la géométrie (1802)
- Mort à Paris en 1818.



Gaspard Monge (1746-1818)

9

## LES PROFESSEURS DE L'ÉCOLE NORMALE DE L'AN III

**Lagrange:** Professeur d'arithmétique et d'algèbre à l'école normale

- Originaire de Turin.
- Académie de Berlin (1756),
- À Paris en 1787.
- Ami de D'Alembert.
- Mécanique analytique (1788)
- Théorie des fonctions analytique (1797).



Louis de Lagrange (1736-1813)

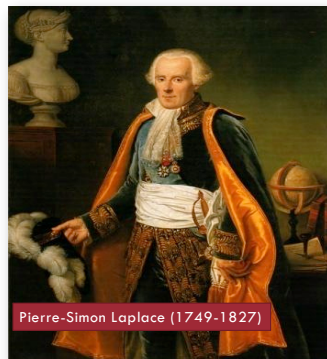
10

## LES PROFESSEURS DE L'ÉCOLE NORMALE DE L'AN III

**Laplace:** Professeur d'analyse à l'école normale

- les équations algébriques,
- la géométrie élémentaire,
- les poids et mesures,
- les probabilités.

- Exposition du système du monde (1796)
- Traité de mécanique céleste (1799).



Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

11

## LES NOUVELLES CONDITIONS DU TRAVAIL MATHÉMATIQUE AU XIX<sup>E</sup> SIÈCLE

Professionalisation des savants qui deviennent des enseignants.

- Exportation du modèle de l'École polytechnique (Europe, USA).
- Rénovation de l'université allemande: le modèle humboldtien

Démocratisation relative de l'enseignement

- Autonomie, liberté d'enseigner, lien avec la recherche.
- L'invention du séminaire: lieu libre d'échange entre étudiants avancés, et professeurs invité.

Prolifération des institutions

- Journaux et revues spécialisés.
- Sociétés professionnelles: la Société mathématique de France (1872).
- Congrès scientifiques, puis congrès internationaux des mathématiciens (le 1<sup>er</sup> en 1897).

12

## L'EXCLUSION ET LA LENTE RÉINTEGRATION DES FEMMES

Au 18e siècle, rares possibilités pour les femmes, surtout aristocrates

**Maria Agnesi (1718-1799)**

Une institutionnalisation qui exclut explicitement

- Le cas **Sophie Germain** : pseudo masculin; correspondance, prix de l'Académie

Des figure d'exception:

- Émilie du Châtelet (1706-1749)**
- Sofia Kovalevskaia (1850-1891), Emmy Noether (1882-1935)...
- Liouba Bortniker: 2<sup>e</sup> à l'agrégation de mathématiques en 1885

Des premières... tardives:

- 1972 : 7 femmes à l'École polytechnique (dont Anne Chopinet)
- 1979: Yvonne Choquet-Bruhat, Académie des sciences
- 2014: médaille Fields pour Maryam Mirzakhani (1977-2017).

**Sophie Germain (1776-1831)**

14/01/2022

Discours de Charles Zevort, à l'inauguration du lycée des jeunes filles du Havre, 1885.

© ADREN - LIDRA/109 13

13

## LA PREMIÈRE REVUE DE MATHÉMATIQUES

Publiées par **Joseph-Diez Gergonne** (1771–1859), professeur de mathématiques transcendantes à l'école centrale de Nîmes (1795) et d'astronomie à l'université de Montpellier (1816).

« Ces *Annales* seront principalement consacrées aux Mathématiques pures, et sur-tout aux recherches qui auront pour objets d'en perfectionner et d'en simplifier l'enseignement [...] si l'on n'y doit rien rencontrer d'absolument étranger au Calcul,

à la *Géométrie* et à la *Mécanique rationnelle*, les rédacteurs sont néanmoins dans l'intention de n'en rien exclure de ce qui pourra donner lieu à des applications de ces diverses branches des sciences exactes. Ainsi, sous ce rapport, l'*Art de conjecturer*, l'*Économie politique*, l'*Art militaire*, la *Physique générale*, l'*Optique*, l'*Acoustique*, l'*Astronomie*, la *Géographie*, la *Chronologie*, la *Chimie*, la *Minéralogie*, la *Météorologie*, l'*Architecture civile*, la *Fortification*, l'*Art nautique* et les *Arts mécaniques*, enfin, pourront y trouver accès. »

### ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

---

PROSPECTUS.

C'EST une singularité assez digne de remarque que, tandis qu'il existe une multitude de journaux relatifs à la *Politique*, à la *Jurisprudence*, à l'*Agriculture*, au *Commerce*, aux *Sciences physiques et naturelles*, aux *Lettres* et aux *Arts*; les *Sciences exactes*, cultivées aujourd'hui si universellement et avec tant de succès, ne comptent pas encore un seul recueil périodique qui leur soit spécialement consacré (\*), un recueil qui permette aux Géomètres d'établir entre eux un commerce ou, pour mieux dire, une sorte de communauté de vues et d'idées; un recueil qui leur épargne les recherches dans lesquelles ils ne s'engagent que trop souvent en pure perte, faute de savoir que déjà elles ont

14

## LES REVUES SPÉCIALISÉES

1810: *Annales de mathématiques pures et appliquées* de Joseph-Diaz Gergonne.

1826: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* d'August Crelle

1826: *Correspondance mathématique et physique* d'Adolphe Quetelet

1836: *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Joseph Liouville.

**Joseph-Diez Gergonne (1771–1859)**

**August Crelle (1780–1855)**

**Adolphe Quetelet (1796–1874)**

**Joseph Liouville (1802–1882)**

15

## DEUX ÉVOLUTIONS PARALLÈLES

**Extension du domaine des applications**

- « Seconde révolution scientifique » au début du 19<sup>e</sup> s.
  - = mathématisation des sciences physiques (électricité et magnétisme, chaleur, optique).
- Extension du domaine des applications (physique, « statistique », génie civil et militaire).
- Mathématiques sophistiquées en électromagnétisme, statistique, etc.
 

ATTENTION: cet aspect sera très peu traité ici.

**Abstraction croissante des mathématiques pures:**

- La « révolution structurale »: l'objet des mathématiques change.
- Autonomie croissante des mathématiques pures.
- Renouveau profond des questionnements et des techniques: en analyse, géométrie et algèbre.

16

## 2. RÉFORME DE L'ANALYSE

1. Les traités et les fondements.
2. La rigueur analytique.
3. Les séries de Fourier et l'intégration.

17

## LES TENTATIVES DE FONDAMENT DU CALCUL INFINITÉSIMAL

Leonhard Euler (1707-1783):

$$n = \frac{dx}{dy} = \frac{0}{0}.$$

Jean le Rond d'Alembert (1717-1783):

- « La notion de limite est la vraie métaphysique du calcul différentiel »

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813):

$$f(x+i) = f(x) + f'(x)i + \frac{f''(x)}{2}i^2 + \dots$$

18

## THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES (1797)

Sous-titre:

« contenant les Principes du Calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies. »

L'objet de cet ouvrage

« donner la théorie des fonctions, considérées comme primitives et dérivées, de résoudre par cette théorie les principaux problèmes d'Analyse, de Géométrie et de Mécanique, qu'on fait dépendre du Calcul différentiel, et de donner par là à la solution de ces problèmes toute la rigueur des démonstrations des Anciens ».

Le Plan:

- I. Principes fondamentaux;
- II. Applications à la géométrie;
- III. Applications à la mécanique.

$$f(x+i) = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + si^4 + \dots$$



Joseph-Louis Lagrange  
(1736-1813)

19

## UN NOUVEAU MANUEL

Sylvestre François Lacroix (1765-1843)



« On remarque dans l'histoire des Mathématiques certaines époques où, sans que la vérité des propositions particulières ait souffert aucune atteinte, leur enchaînement systématique a changé par les rapprochemens auxquels les nouvelles découvertes ont donné lieu. [...] Nous sommes, à ce que je crois, dans une de ces époques: la réunion des nombreux matériaux relatifs au Calcul différentiel et au Calcul intégral épars dans les collections Académiques, peut seule faire connaître toutes les richesses de cette branche de l'Analyse, et réduire à un petit nombre de méthodes générales, une foule de procédés particuliers [...] mais ce n'est point par une simple compilation qu'on atteindra ce but [...]. Il faut exposer dans un ordre, qui mette en évidence les rapports par lesquels [les méthodes] se lient les unes aux autres; [...] donner, pour ainsi dire, une teinte uniforme [...] et répandre sur le tout un égal degré de précision et de clarté.

20

## ENSEIGNEMENT À L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

**Cauchy:** Professeur à l'École polytechnique.

- Cours d'analyse (1821),
- Résumés des leçons sur le calcul infinitésimal (1823),
- Leçons sur le calcul différentiel (1829).

Définition du concept de limite:

« Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la **limite** de toutes les autres. »



Augustin-Louis Cauchy  
(1789-1857)

21

## L'ANALYSE COMPLEXE

Intégrale définies prises entre des limites imaginaires (1825)

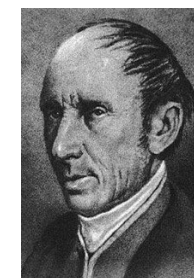
- L'intégrale curviligne
- Première écriture des équations de Cauchy-Riemann
- Théorème des résidus (1826): permet de calculer valeur d'une intégrale curviligne autour d'une singularité

Les **fonctions holomorphes**: fonctions à valeurs complexe, définies et dérivables en tout point d'un ouvert dans  $\mathbf{C}$ .

Première extension des possibilités de l'analyse mathématique à un autre domaine que les nombres réels.

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \quad \text{und} \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{du}{dy}$$

Riemann "Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Größe" 1851



22

## L'EXIGENCE DE LA RIGUEUR

Un contexte culturel

« Le temps n'est plus [...] où on se contentait d'aperçus vagues, de résultats approximatifs; il faut aujourd'hui apporter une rigueur mathématique dans les sciences naturelles comme dans les procédés des arts. »

— M. Bossé, Mémoire sur les différents espèces de chênes qui croissent en France, Mémoire de la Classe des Sciences Mathématiques et physiques de l'Institut (1808), p. 308.

Une préoccupation de professeurs de mathématiques

- Cauchy (1821): « Quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en géométrie. »
- Abel (1826): « Les séries divergentes sont une invention du diable, et c'est une honte que l'on ose fonder sur elles la moindre démonstration. On peut en tirer tout ce qu'on veut quand on les emploie et sont elles qui ont produit tant d'échecs et tant de paradoxes. »



Niels Abel  
(1802-1829)

23

## UNE PREUVE ANALYTIQUE DU THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES?

**Bolzano:** prêtre tchèque persécuté à cause de ses idées pacifistes.

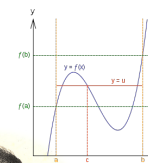
Une œuvre philosophique importante: *Théorie de la science; les Paradoxes de l'infini*.

Les notions de base du calcul.

Ignoré pendant un demi-siècle.

- « dans la science, les démonstrations ne doivent pas être de simples procédés de 'fabrication d'évidences', mais doivent être plutôt des fondements. » (1817)

Théorème des valeurs intermédiaires: une preuve analytique?



Bernard Bolzano (1781-1848)

24



## EPSILON ET DELTA

**Weierstrass:** Enseignant dans le secondaire (1842–1856), puis à l'université de Berlin.

Études sur les fonctions abéliennes publiées dans le journal de Crelle qui le rendent célèbres.

**Définition algébrique de la limite**

« S'il est possible de déterminer une borne  $\delta$  telle que, pour toute valeur  $h$  plus petites en valeur absolue que  $\delta$ ,  $f(x+h)-f(x)$  soit plus petite qu'une quantité  $\epsilon$ , aussi petite que l'on veut, alors on dira qu'on a fait correspondre à une variation infiniment petite de la variation une variation infiniment petite de la fonction. »



Karl Weierstrass (1815-1897)

25

## TÉRATOLOGIE: DES « MONSTRES » EN ANALYSE

**Riemann (1861):** une fonction continue presque partout non dérivable

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sin(k^2 x)$$

La fonction de **Weierstrass (1872):** continue et nulle part différentiable

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$$

→ les géométries fractales [Benoît Mandelbrot 1975]

« Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées » (Charles Hermite 1893)

« La logique parfois engendre des monstres. On vit surgir toute une foule de fonctions bizarres qui semblaient s'efforcer de ressembler aussi peu que possible aux honnêtes fonctions qui servent à quelque chose. [...] Autrefois, quand on inventait une fonction nouvelle, c'était en vue de quelque but pratique ; aujourd'hui, on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnements de nos pères, et on n'en tirera jamais que cela. » (Poincaré, *Science et méthode*, 1908)

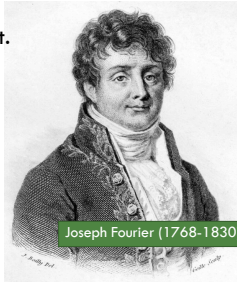
26

## DU NOUVEAU: LES SÉRIES DE FOURIER

Campagne d'Égypte avec Napoléon, puis préfet.  
1817: Académie des sciences.

**Théorie analytique de la chaleur (1822).**

- Philosophie de la modélisation.
- Les séries de Fourier: un nouvel outil mathématique.



Joseph Fourier (1768-1830)

$$f(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx),$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx.$$

27

## RAPPEL: BERNOULLI ET LES SÉRIES « DE FOURIER »

- En 1753 (toujours dans *HAB*), Daniel Bernoulli publie deux mémoires sur le sujet. Dans le premier des deux, intitulé « Réflexions et éclaircissements sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les mémoires de l'Académie de 1747 & 1748 » :
  - il reproche à D'Alembert et Euler d'avoir admis de nouvelles courbes (autres que la sinusoïde de Taylor) « dans un sens tout-à-fait impropre ».
  - il établit sans calcul l'expression générale de la solution sous la forme d'une combinaison de vibrations simples (c'est-à-dire de fonctions sinusoïdales) c'avec  $\alpha(t)$  une fonction du temps  $t$ ,  $n$  un entier et  $l$  la longueur de la corde :  $\alpha(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$  que :

$$y(x, t) = \alpha(t) \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \beta(t) \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + \gamma(t) \sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right) + \&c.$$

\*cette solution est selon lui la plus générale (les courbes obtenues par Euler et D'Alembert doivent donc pouvoir s'y ramener).

\*il affirme avoir ainsi présenté « ce que les nouvelles vibrations de Mrs D'Alembert et Euler ont de physique ».

28

## THÉORIE DE L'INTÉGRATION



**Lejeune-Dirichlet (1829):**

- élucidation des conditions sous lesquels la série de Fourier convergent vers la fonction originale.

**Riemann (1854):**

- Son habilitation (diplôme pour devenir professeur): géométrie et intégration
- définition formelle de l'intégrale, et d'intégrabilité des fonctions.

Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805-1859)


Bernhard Riemann (1826-1866)

Was hat man unter  $\int_a^b f(x) dx$  zu verstehen?


29

## LES GRANDS TRAITÉS


L'analyse : discipline-reine des mathématiques française vers 1900 → origine de Bourbaki




Camille Jordan  
Publié 1874 → 1959



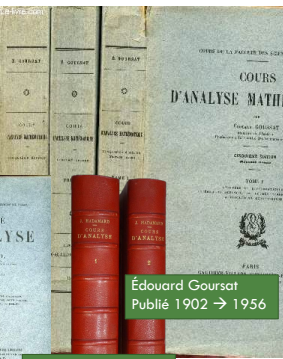
Hermann Laurent  
Publié 1885 → 1891



Émile Picard  
Publié 1891 → 1942



Jacques Hadamard  
Publié 1925 → 1930



Édouard Goursat  
Publié 1902 → 1956

30

## L'ANALYSE MODERNE

**Une théorie de la mesure**

- Borel (1897): Les ensembles mesurables
- Lebesgue (1902): généralisation et simplification de l'intégrale
- Baire (1905-1907): les catégories de Baire et ensembles de mesure nulle  
→ Impact sur les théories des probabilité [Andrei N. Kolmogorov, 1933]

**Vers la topologie abstraite et l'analyse fonctionnelle**

- Les équations intégrales de Ivar Fredholm (1903)
- Fréchet: les espaces métriques et les opérateurs linéaires (1908)
- Les espaces de Hilbert et de Banach (années 1920)

René Baire (1874-1932)



Émile Borel (1871-1956)



Henri Lebesgue (1875-1941)



Maurice Fréchet (1878-1973)



31