Cours 10 :
Les « Révolutions mathématiques »
du XIXe siècle:
Géométrie et algèbre

**LU3MA209**
ÉLÉMENTS D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

2021-2022, 2e période

David Aubin
david.aubin@sorbonne-université.fr



1

## PROGRAMME DES DEUX COURS (2E COURS)

1. Révolutions mathématiques du 19e siècle
2. Réforme de l'analyse : fondements, rigueur, séries de Fourier, intégration
3. Renouveau de la géométrie : géométries descriptive, projective, non euclidienne
4. Explosion de l'algèbre : équations, abstraction, axiomatisation



2

## 3. RENOUVEAU DE LA GÉOMÉTRIE

1. Précurseurs: la théorie des parallèles.
2. Géométries descriptive et projective
3. Les géométries non euclidienne.
4. Algèbre et axiomatique.
5. Géométrie et expérience.

3

## DEUX DROITES PARALLÈLES SE CROISENT-ELLES?

4

## LA THÉORIE DES PARALLÈLES

Remplacer le 5ᵉ postulat par une autre d'expression plus simple.

John Playfair: « *Par un point donné, on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite donnée.* »

Adrien-Marie Legendre: « *La somme des angles d'un triangle est de 180°.* »

Plus compliqué, le postulat des parallèles peut-il être démontré à partir des quatre premiers?

Mathématiciens arabes (Al-Khayyam, al-Tusi)

John Wallis, G. Saccheri: méthode de preuve par l'absurde.

5

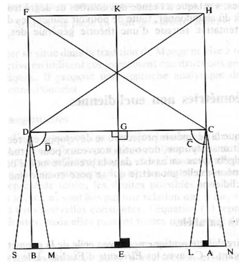
## QUADRILATÈRE DE « SACCHERI »

Chez al-Haytham et al-Khayyam (IXᵉ siècle).

- Si les angles C et D sont aigus…
- Si les angles C et D sont obtus…

Précurseurs des géométries non-euclidiennes:

- Girolamo Saccheri (1667–1733),
- Jean-Henri Lambert (1728–1777).
- Adrien-Marie Legendre (1752–1833),




6

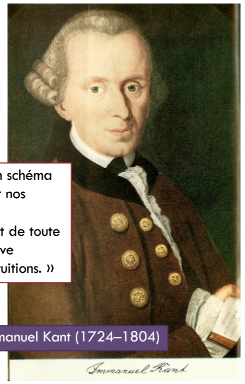
## GÉOMÉTRIE COMME A PRIORI

Les axiomes de la géométrie euclidienne sont des « jugements synthétiques *a priori.* »

> « L 'espace n 'est pas quelque chose d 'objectif et de réel, (…) mais un schéma subjectif et idéal servant à la coordination de tout ce qui est perçu par nos sens. »
> « La simple forme d'intuition qu'on appelle l'espace est donc le substrat de toute intuition déterminable à propos d'objets particuliers, et, en elle, se trouve évidemment la condition de la possibilité ou de la variabilité de ces intuitions. »

*Sur la forme et les principes du monde sensible et intelligible* (1770);

*Critique de la Raison pure* (1781-1787).



Immanuel Kant (1724–1804)

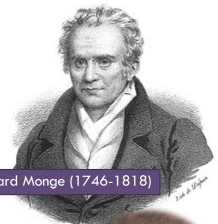
7

## ÉMERGENCE DE NOUVELLES GÉOMÉTRIES

**Entre la géométrie euclidienne et la géométrie analytique (Descartes et Fermat)**

- Géométrie descriptive (Monge)
- Géométrie projective (Poncelet)

De nouvelles méthodes de recherches propres à la géométrie.

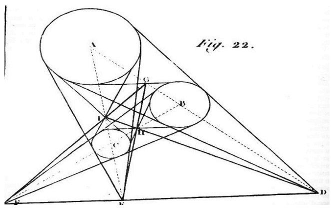


Gaspard Monge (1746-1818)

Jean-Victor Poncelet (1788-1867)

8

## GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE




Dérivant des techniques graphiques des praticiens (Mézières): par ex., *calcul du relief d'une fortification.*

Introduite à l'Ecole normale de l'An III (1794) et à l'Ecole polytechnique.

Approche synthétique des problèmes de géométrie (par opposition à l'approche analytique popularisée par Descartes et Fermat).

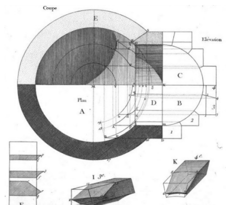
9

## GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE: DÉFINITION DE MONGE

**Gaspard Monge**
**à l'École normale de l'An III**

« *La géométrie descriptive a deux objets :*

1. *de donner les méthodes pour représenter sur une feuille de papier […] tous les corps de la nature […] ;*
2. *de déduire toutes les vérités qui résultent et des formes* [de ces corps] *et de leurs positions respectives.* »



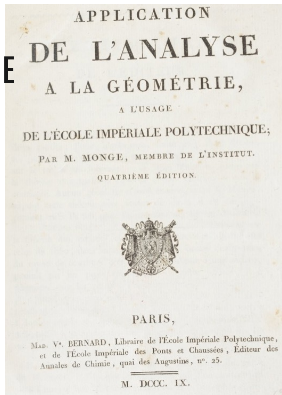
Simonin, *Traité élementaire de la coupe des pierres* (1792)

https://books.google.fr/books?id=DMVAAAAQAAJ

10

## DUALITÉ ANALYSE ET GÉOMÉTRIE

**Monge :** La géométrie et l'algèbre « *ont des rapports les plus intimes. Il n'y a aucune construction de **géométrie descriptive** qui ne puisse être traduite en **analyse**; et lorsque les questions ne comportent que trois inconnues, chaque opération analytique peut être regardée comme l'écriture d'un spectacle en géométrie. Il serait à désirer que ces deux sciences fussent cultivées ensemble: la géométrie descriptive porterait* […] ***l'évidence*** *et l'analyse* […] *la **généralité**.* »


APPLICATION
DE L'ANALYSE
A LA GÉOMÉTRIE,
A L'USAGE
DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE;
PAR M. MONGE, MEMBRE DE L'INSTITUT.
QUATRIÈME ÉDITION.
PARIS,
MAD. Ve. BERNARD, Libraire de l'École Impériale Polytechnique, et de l'École Impériale des Ponts et Chaussées, Éditeur des Annales de Chimie, quai des Augustins, no. 25.
M. DCCC. IX.

http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k65456c/f13.highres

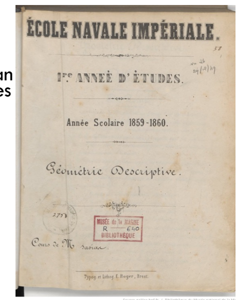
11

## INFLUENCE DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

« La géométrie descriptive […], par la nature de ses opérations, qui ont pour but d'établir une **correspondance complète** entre des figures effectivement tracées sur un plan et des corps fictifs dans l'espace, familiarisa avec les formes des corps, les fit concevoir idéalement, avec exactitude et promptitude, et doubla de la sorte nos moyens d'investigation dans la science de l'étendue. […]

« Elle fournit un moyen de solution *a priori* dans des questions où la géométrie de Descartes […] se trouvait arrêtée par les bornes que rencontrait l'algèbre elle-même. »

Michel Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (1837).

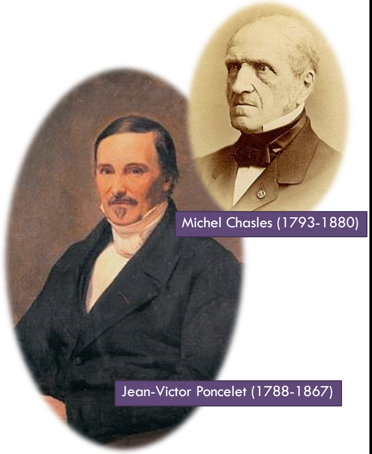



12

## GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

« Qu'on prenne une figure quelconque dans l'espace, et l'une des propriétés connues; qu'on applique à cette figure une transformation, et qu'on suive les diverses modifications (…) qu'éprouve le théorème qui exprime cette propriété, on aura une nouvelle figure, et une nouvelle propriété de cette figure, qui correspondra à celle de la première. Ces moyens (…) sont de véritables instruments, que ne possédait point l'ancienne géométrie, et qui font le caractère fort distinctif de la géométrie moderne. »

Michel Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (1837).


Michel Chasles (1793-1880)

Jean-Victor Poncelet (1788-1867)

13

## CHRONOLOGIE DES GÉOMÉTRIES NON EUCLIDIENNES

| | |
|---|---|
| **1792** | C.F. Gauss s'intéresse à la théorie des parallèles. |
| **1813** | Gauss commence à rédiger ses travaux |
| **1826** | Première publication de Lobatchevski. |
| **1827** | *Recherches générales sur les courbes* de Gauss. |
| **1832** | Première publication de Bolyai. |
| **1854** | *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie*, par Bernhard Riemann. |
| **1868** | « Pseudosphère » de Eugenio Beltrami. |
| **1872** | Programme d'Erlangen de Félix Klein. |
| **1900** | *Fondements de la géométrie* de David Hilbert. |
| **1917** | Théorie générale de la relativité d'Einstein. |


Carl Friedrich Gauss (1777–1855)


Eugenio Beltrami (1835–1900)

14

## GÉOMÉTRIE INTRINSÈQUE DES SURFACES (GAUSS 1827)

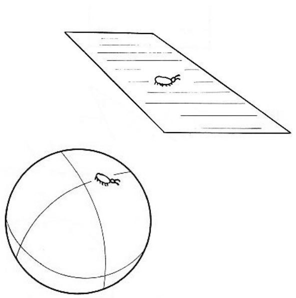
Fait abstraction de l'espace dans laquelle la surface est plongée.

Coordonnées $(x,y,z)$ en fonction de coordonnées internes $(p,q)$.

La distance euclidienne entre $(x,y,z)$ et $(x+dx, y+dy, z+dz)$ est $ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2$.

Elle s'écrit intrinsèquement $ds^2 = \mathrm{E}dp^2+2\mathrm{F}dpdq+\mathrm{G}dq^2$.

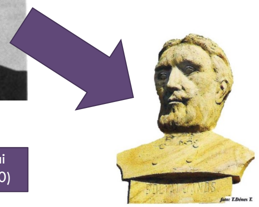
Propriétés géométriques de la surface ne dépendent que de E, F, G; par ex.: la notion de **courbure**.



15

## LES GÉOMÉTRIE NON-EUCLIDIENNES


János Bolyai (1802-1860)

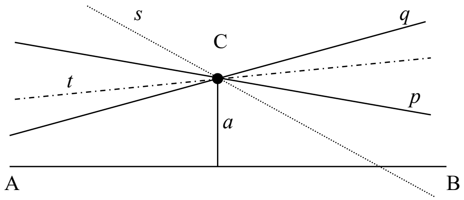



Nikolaï Lobatchevski (1792-1856)

16

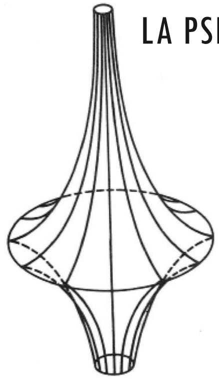
## LA « GÉOMÉTRIE IMAGINAIRE » DE LOBATCHEVSKI

*« Par une droite AB et un point C donnés, toutes les droites passant par C peuvent être partagées en deux classes par rapport à AB: celle des droites qui coupent AB et celle des droites qui ne coupent pas AB. »*




17

## LA PSEUDO-SPHÈRE (1868)



Imaginée par Eugenio Beltrami (1835-1899).

Surface à courbure négative constante.

Première “représentation” de la géométrie hyperbolique de Bolyai et Lobatchevski.

Prouve la cohérence des géométrie non-euclidiennes.

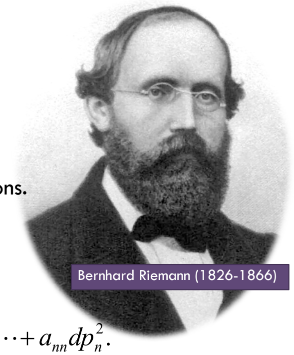
18

## LA GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE

À la suite des travaux de Gauss.

Considère un nombre quelconque de dimensions.

La notion de **variété**.



Bernhard Riemann (1826-1866)

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}dp_i dp_j = a_{11}dp_1^2 + a_{12}dp_1 dp_2 + \cdots + a_{nn}dp_n^2.$$

19

## TROIS GÉOMÉTRIES

| GÉOMÉTRIE | TERMINOLOGIE DE KLEIN | QUADRILATÈRE DE SACCHIERI | NOMBRE DE PARALLÈLES | MODÈLE |
|---|---|---|---|---|
| EUCLIDE | PARABOLIQUE | ANGLES DROITS | UNE SEULE | PLAN |
| GAUSS, BOLYAI, LOBTCHEVSKI | HYPERBOLIQUE | ANGLES AIGUS | UNE INFINITÉ | PSEUDOSPHÈRE |
| RIEMANN | ELLIPTIQUE | ANGLES OBTUS | AUCUNE | SPHÈRE |

13/01/2022 D. AUBIN - LU3MA209 20

20

## LE « PROGRAMME D'ERLANGEN »

Félix Klein (1849-1925).

Études à Göttingen avec Rudolph Clebsch [1833-1872]): physique et géométrie.

Rencontre Sophus Lie (1842-1899).

Brochure distribuée lors de sa leçon inaugurale à l'université d'Erlangen.


Félix Klein (1849-1925).

21

## ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

Changer le point de vue:

- s'intéresser aux **groupes de transformation** de l'espace plutôt qu'aux figures.

Toute géométrie peut être conçue comme:

- Un espace et un groupe de transformation qui agit sur cet espace [Euclide: plan et groupe des isométries].

| GROUPE | POSITION | DIRECTION | ORIENTATION | DISTANCE | ANGLE | PARALLÉLISME | COLLINÉARITÉ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Identité | | | | | | | |
| Translations | | | | | | | |
| Déplacements | | | | | | | |
| Isométries | | | | | | | |
| Similitudes | | | | | | | |
| Gr. affne | | | | | | | |
| Gr. Projectif | | | | | | | |

22

## QU'EST-CE QUE LA GÉOMÉTRIE ?

Réunification des géométrie

- Hiérarchie et classification
- Identification de certains espaces.
- Grande importance donnée à l'espace projectif.

« l'étude des groupes d'opérations auxquelles on peut soumettre un corps sans le déformer ».

- Henri Poincaré.

« Dépassée en tant que science autonome et vivante, la géométrie classique s'est ainsi transfigurée en un langage universel de la mathématique contemporaine, d'une souplesse et d'une commodité incomparables. »

- N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Algèbre* (1959).

Henri Poincaré (1854–1912)

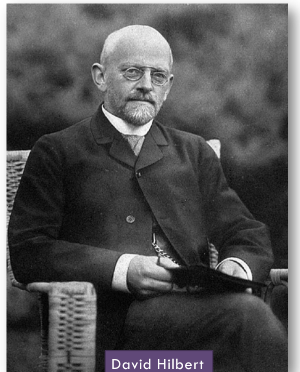
23

## LA NOUVELLE AXIOMATISATION

Embauché à Göttingen par F. Klein (qui est en train de travailler à sa grande *Encyclopédie des sciences mathématiques*, 23 tomes).

*Grundlagen des Geometrie* (1899).

- Rejet de l'intuition, de la visualisation et de l'expérience (*Anschauung*).
- Blumenthal (1935): « On devrait pouvoir dire, au lieu de "*points, lignes et plans*", "*tables, chaises et verres de bières*" » (à Berlin en 1891?).
- « Parmi les phénomènes, ou les faits de l'expérience que l'on prend en compte lorsqu'on décrit la nature, il y a un ensemble particulier, l'ensemble des faits qui détermine la forme extérieure des choses. La géométrie s'occupe de ces faits » (1894, selon Topell).



David Hilbert (1862–1943)

24

## LA THÉORIE DE LA RELATIVITÉ D'EINSTEIN


25

## GÉOMÉTRIE ET EXPÉRIENCE

« La géométrie ne peut être mise du côté de l'arithmétique, qui est de nature *a priori*, mais plutôt du côté de la **mécanique** » (Gauss 1817).

« L'inanité des efforts tentés depuis Euclide (…) m'a conduit à soupçonner que la vérité à établir n'était pas impliquée dans les notions antérieures et que pour la démontrer il fallait (…) recourir à l'**expérience** » (Lobatchevski 1835).

« [Notre travail] nous conduit dans le domaine d'une autre science, dans le domaine de la **physique** » (Riemann 1854).

« Les mathématiques révèlent les **espaces possibles**; la physique décide lequel parmi eux correspond à l'**espace physique** » (Hans Reichenbach 1927).

26

## LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE (1917)

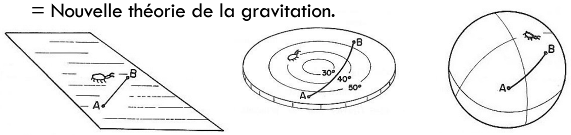
**Principe d'équivalence**

= tous les référentiels, même accélérés, sont équivalents du point de vue des lois de la physique.

**Conséquence**

= l'outil mathématique pour description de l'espace est la géométrie de Riemann.

= Nouvelle théorie de la gravitation.




27

## LA RAISON PEUT-ELLE DÉCOUVRIR LES PROPRIÉTÉS DU RÉEL? (1)

Albert Einstein, La Géométrie et l'expérience (1921):

« Comment se fait-il que la mathématique, qui est un produit de la pensée humaine et indépendante de toute expérience, s'adapte d'une si admirable manière aux objets de la réalité? (…)

« À cette question il faut, à mon avis, répondre de la façon suivante: **pour autant que les propositions de la mathématique se rapportent à la réalité, elles ne sont pas certaines, et pour autant qu'elles sont certaines, elles ne se rapportent pas à la réalité**. (…)

« Examinons de ce point de vue un axiome de géométrie (…): par deux points de l'espace on peut toujours tracer une droite, et l'on n'en peut tracer qu'une seule. Comment cet axiome doit-il être interpréter dans le sens ancien et comment dans le sens moderne ».

28

## LA RAISON PEUT-ELLE DÉCOUVRIR LES PROPRIÉTÉS DU RÉEL? (2)

Albert Einstein, La Géométrie et l'expérience (1921):

« **Interprétation ancienne:** Chacun sait ce qu'est une droite et ce qu'est un point. Que cette connaissance provienne de la faculté de l'esprit humain ou de l'expérience, de la coopération des deux ou d'ailleurs, le mathématicien n'est pas obligé d'en décider; il abandonne cette question au philosophe. (…)

« **Interprétation moderne [axiomatique]:** La géométrie traite d'objets qui sont désignés par les termes de *points, droite,* etc. Une connaissance quelconque ou intuition de ces objets n'est pas supposée; la seule chose qu'on suppose est la validité des axiomes (…) qui doivent être conçus comme purement formels [et] dépourvus de tout contenu intuitif. (…) Ces axiomes sont des **constructions libres de l'esprit humain.**

3

29

## LA RAISON PEUT-ELLE DÉCOUVRIR LES PROPRIÉTÉS DU RÉEL? (3)

Albert Einstein, La Géométrie et l'expérience (1921):

« (…) Mais il est d'autre part certain que la mathématique en général et la géométrie en particulier doivent leur existence à notre besoin de savoir quelque chose sur le comportement des objets réels. Le terme de géométrie, qui signifie ***mesure du terrain***, le prouve déjà. (…) Pour pouvoir fournir des énoncés [se rapportant au réel], la géométrie devrait être dépouillée de son caractère logique et formel, de telle sorte qu'on puisse coordonner aux concepts schématiques vides de la géométrie axiomatique des objets de la réalité accessible à l'expérience (…): *Des corps solides se comportent* (…) *comme des corps à trois dimensions de la géométrie euclidienne.*

« (…) Nous appellerons la géométrie ainsi complétée la **géométrie pratique.** (…) La question de savoir si la géométrie pratique est euclidienne ou non a un sens précis et la réponse ne peut être fournie que par l'**expérience.** »

3

30

## 4. L'EXPLOSION DE L'ALGÈBRE

**1.** Résolution des équations algébriques.
**2.** Le calcul sur de nouveaux objets.
a) Groupes et Théorie de Galois
b) Un cas: les imaginaires
c) Nouveaux objets, retour sur la géométrie
**3.** L'axiomatisation.

4

31

## THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE
(**C** EST ALGÉBRIQUEMENT CLOS)

**Albert de Girard (1629):** toute équation du degré *n* possède *n* racines.

**René Descartes (1637):** « *tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement **imaginaires.*** »

Tentatives de démonstration par Leibniz, Jean Bernouilli, d'Alembert, Euler, Lagrange, etc.

**Critique de Gauss (1799):** « *L'hypothèse de base de la démonstration, l 'axiome, est que toute équation possède effectivement n racines possibles ou impossibles. Si on entend par possibles: réelles, et par impossibles, complexes, cet axiome est inadmissible puisque c'est justement ce qu'il s'agit de démontrer. Mais si on entend par possibles les quantités réelles et complexes et par impossibles tout ce qui manque pour qu'on ait exactement n racines, cet axiome est acceptable. Impossible signifie alors quantité qui n'existe pas dans tout le domaine des grandeurs.* »

4

32

# THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE

(**C** est algébriquement clos)

Albert **Girard** (1629): toute équation du degré *n* possède *n* racines.

René **Descartes** (1637): « *tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement* ***imaginaires***. »

Tentatives de démonstration par Leibniz, Jean Bernouilli, d'Alembert, Euler, Lagrange, etc.

Critique de **Gauss** (1799):

- « *L'hypothèse de base de la démonstration, l 'axiome, est que toute équation possède effectivement n racines possibles ou impossibles. Si on entend par possibles: réelles, et par impossibles, complexes, cet axiome est inadmissible puisque c'est justement ce qu'il s'agit de démontrer. Mais si on entend par possibles les quantités réelles et complexes et par impossibles tout ce qui manque pour qu'on ait exactement n racines, cet axiome est acceptable. Impossible signifie alors quantité qui n'existe pas dans tout le domaine des grandeurs.* »

33

# ECLIPSE, PUIS RENOUVEAU DE L'ALGÈBRE AU XVIII^E SIÈCLE

Vers 1770: Van der Monde, Gauss, Laplace, et surtout Lagrange:

« Je me propose d'examiner les différentes méthodes que l'on a trouvées jusqu'à présent pour la résolution algébrique des équations, de les réduire à des principes généraux et de faire voir a priori pourquoi ces méthodes réussissent pour le troisième et le quatrième degré et sont en défaut pour les degrés ultérieurs. »

- Apparition de la notion de déterminant (algèbre linéaire).
- Utilisation des substitutions (théorie des groupes).
- Équations auxiliaires.

34

# ÉCLIPSE, PUIS RENOUVEAU DE L'ALGÈBRE


Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

Vers 1770: Vandermonde, Gauss, Laplace, et surtout **Lagrange**:

« Je me propose d'examiner les différentes méthodes que l'on a trouvées jusqu'à présent pour la résolution algébrique des équations, de les réduire à des principes généraux et de faire voir a priori pourquoi ces méthodes réussissent pour le troisième et le quatrième degré et sont en défaut pour les degrés ultérieurs. »

- Apparition de la notion de déterminant → algèbre linéaire
- Utilisation des substitutions → théorie des groupes
- Équations auxiliaires

Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796)

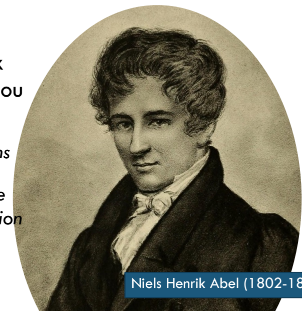
« La grande notoriété n'est assurée en Mathématiques qu'aux noms associés à une méthode, à un théorème, à une notation. Peu importe d'ailleurs que l'attribution soit fondée ou non, et le nom de Vandermonde serait ignoré de l'immense majorité des mathématiciens si on ne lui avait attribué ce déterminant que vous connaissez bien, et qui n'est pas de lui ! » (Lebesgue)

35

# PAS DE SOLUTION POUR $n=5$

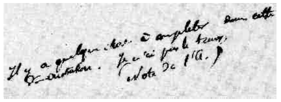
**Impossibilité** de résoudre par radicaux les équations générales de degré égal ou supérieur à 5.

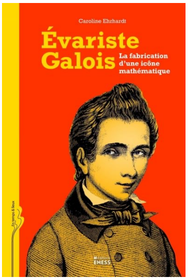
« *On se proposait de résoudre les équations sans savoir si cela était possible. (…) Au lieu de demander une relation dont on ne sait pas si elle existe ou non, il faut demander si une telle relation est en en effet possible.* »


Niels Henrik Abel (1802-1829)

36

## ÉVARISTE GALOIS (1811-1832)






Quelles sont les équations solubles par radicaux?

Introduction de la notion de **groupe** (au moins le terme).

*« Sauter à pieds joints sur ces calculs; grouper les opérations, les classer suivant leurs difficultés et non suivant leurs formes; telle est, suivant moi, la mission des géomètres futurs. »*

37

## THÉORIE DE GALOIS

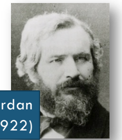
Introduite par Galois en 1830-1832

- ignorée jusqu'à ce qu'elle soit reprise par **Liouville** en 1843, mais dont la véritable ampleur n'apparaîtra qu'avec les travaux de **Camille Jordan** (vers 1870) jusqu'à **Emil Artin** (1930).

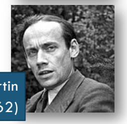
2 principes:

- décomposition du groupe des substitutions de l'équation en sous-groupes emboîtés,
- adjonction successives de grandeurs au domaine de résolvabilité.

Joseph Liouville (1809–1882)



Camille Jordan (1838–1922)



Emil Artin (1898–1962)

38

## THÉORIE DE GALOIS: UN EXEMPLE TRIVIAL

Soit l'équation $x^4 – 3 = 0$; irréductible dans le corps des rationnels.

Ses quatre racines sont: $r$, $ir$, $–r$ et $–ir$. $r = \sqrt[4]{3}$

Le corps de décomposition de l'équation est le corps des rationnels **Q** auquel on adjoint les deux quantités $i$ et $r$.

39

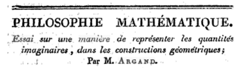
## REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DES IMAGINAIRES

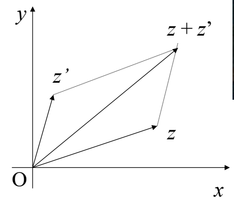
**John Wallis**, *Traité d'algèbre* (1685):

- *« aller en dehors de la ligne où si elles étaient réelles, elles seraient mesurées. »*

**Robert Argand** (1806):

- *« un genre de grandeur auquel peut s'allier l'idée de direction, de manière que, étant adoptées deux directions opposées, l'une pour les valeurs positives, l'autre pour les valeurs négatives, il en existât une troisième. »*
- Donc les imaginaires *« sont des quantités tout aussi réelles que l'unité primitive. »*


PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.
Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires, dans les constructions géométriques;
Par M. Argand.




Jean-Robert Argand (1768-1822)

40

## RÉTICENCES DES MATHÉMATICIENS

La troisième dimension résiste.

Abandon de la « pureté » algébrique, indépendante de la géométrie.

Fondée sur des conventions, et non des intuitions, l'algèbre ne peut être définie à partir d'une image géométrique.

Adoption progressive (v. 1847–1849) de la représentation géométrique des imaginaires à cause de l'interprétation qu'elle fournit de l'analyse complexe.

> *« je ne vois dans cette notation qu'un masque géométrique appliqué sur des formes analytiques dont l'usage immédiat me semble plus simple et plus expéditif. »*
> — François-Joseph Servois (1767 ou 1768-1847) en 1813.

41

## L'ANALYSE COMPLEXE

Position formaliste de Cauchy:

- un nombre imaginaire est une « *expression symbolique* » $(a,b) = a + ib$ soumise à des « *règles fixes* » selon des « *conventions établies.* »
- $\sqrt{-1}$ n'est qu'« *un outil, un instrument de calcul.* »

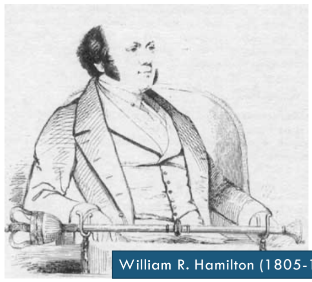
Lettre de Gauss à Bessel (1811):

- « de même qu'on peut se représenter tout le domaine des quantités réelles au moyen d'une ligne droite indéfinie, de même on peut se représenter le domaine complet de toutes les quantités, les réelles et les imaginaires, au moyen d'un plan indéfini; où chaque point déterminé par son abscisse $a$ et son ordonnée $b$, représente en même temps la quantité $a+bi$. Le passage continu d'une valeur de $x$ à une autre $a+bi$ se fait par conséquent suivant une ligne, et peut donc s'effectuer d'une infinité de manières. »

Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846)

42

## VERS UNE NOUVELLE ALGÈBRE



William R. Hamilton (1805-1866)

Théorie arithmétique des nombres complexes.

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),$$
$$(a,b)\times(c,d)=(ac-bd,ad+bc).$$

Recherches d'extension à l'aide de triplets, etc.

1843: les quaternions.

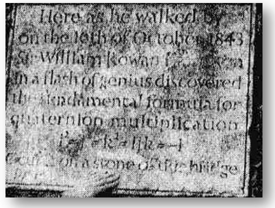
43

## LES QUATERNIONS (1843)

Des quadruplets $(a,b,c,d)=a+bi+cj+dk$.

$$i^2=j^2=k^2=-1,$$
$$ij=-ji=k,$$
$$jk=-kj=i,$$
$$ki=-ik=j.$$

Les quaternions forment un corps non commutatif, dont le corps **C** des complexes est un sous-corps.

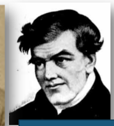



**Plaque à Brougham Bridge (Ireland):** « *En ce lieu, alors qu'il marchait, le 10 octobre 1843, Sir William Rowan Hamilton découvrit dans un éclair de génie la formule fondamental de la multipli-cation des quaternions.* »

44

## L'ÉCOLE ALGÉBRIQUE ANGLAISE

Augustus de Morgan (1806–1871)



George Peacock (1791–1858)

L'influence de l'université Cambridge

- 1819: fondation de l'« Analytical Society » (John Hershell, Charles Babbage, William Whewell) → Cambridge Philosophical Society

En 1833, George Peacock (Analytical Soc.)

- Distinction entre « algèbre arithmétique » et « algèbre symbolique » (science « pure » des symboles).

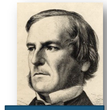
Augustus de Morgan, son disciple.

$$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$$

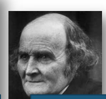
Arthur Cayley et les octaves.

La logique mathématique et les lois de la pensée de George Boole.

- « *Les mathématiques traitent des opérations considérées en elles-mêmes, indépendamment des matières diverses auxquelles elles peuvent être appliquées* » (1847).



George Boole (1815–1864)



Arthur Cayley (1821–1895)

45

## NOUVEAUX OBJETS EN ALGÈBRE: LES MATRICES (V. 1858)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}.$$

Provient de l'usage des déterminants dans la résolution de systèmes d'équations linéaires.

Arthur Cayley: *A Memoir on the Theory of Matrices* (1858). Étude des propriétés de la multiplication des matrices (associativité, distributivité, commutativité).

Seront utilisés par Heisenberg (1924) dans la formulation de la mécanique quantique.

46

## GROUPES ABSTRAITS LES TABLEAUX DE CAYLEY (1854)

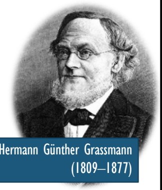
| | 1 | a | b | c | d | e |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | a | b | c | d | e |
| a | a | b | c | d | e | 1 |
| b | b | c | d | e | 1 | a |
| c | c | d | e | 1 | a | b |
| d | d | e | 1 | a | b | c |
| e | e | 1 | a | b | c | d |

| | 1 | a | b | c | d | e |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | a | b | c | d | e |
| a | a | b | 1 | e | c | d |
| b | b | 1 | a | d | e | c |
| c | c | d | e | 1 | a | b |
| d | d | e | c | a | 1 | a |
| e | e | c | d | a | b | 1 |

« Un ensemble de symboles 1, a, b, … tous distincts, et tels que le produit de deux d 'entre eux (dans n'importe quel ordre), ou le produit de l'un d'entre eux par lui-même appartienne à l 'ensemble est un **groupe**. »

47

## ESPACES VECTORIELS À $N$ DIMENSIONS

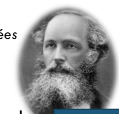


Hermann Günther Grassmann (1809–1877)

Quaternions, octaves, matrices, et **vecteurs**…

Hermann Günther Grassmann, lettre à Cauchy (18 avril 1847) à propos de son *Die lineale Ausdehnungslehre*:

- *« J'y ai déposé les principes d'un calcul véritablement géométrique à l'aide duquel on pourrait calculer des points, des lignes, des aires et des angles presque comme des nombres sans avoir besoin de réfugier à des coordonnées ou à d'autres suppositions arbitraires. »*



James Clerk Maxwell (1831–1869)

Produit extérieur et produit intérieur.

L'électromagnétisme de James Clerk Maxwell exprimée d'abord avec les quaternions, puis le calcul vectoriel.

48

# NOUVEAUX VISAGES DE L'ALGÈBRE (DÉBUT DU 20^E S.)

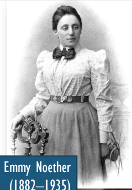
L'œuvre d'Emmy Noether.

Vaste synthèse: Bartel van der Waerden, *Moderne Algebra* (1930).

Nouveaux objets:
- Groupes, Corps, Anneaux, Modules, Espaces vectoriels…

Les ***relations*** deviennent le sujet privilégié des algébristes.

Les *structures algébriques:* des **axiomes sans contenu intuitif**.

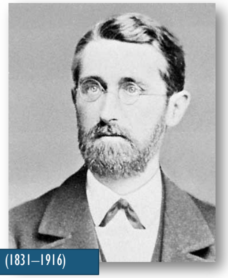

Emmy Noether (1882–1935)


Bartel van der Waerden (1903–1996)

49

# LA CONSTRUCTION DES NOMBRES RÉELS (1876)

Dedekind, *Continuité et nombres réels.*
- « des fondements purement arithmétiques, et tout à fait rigoureux, aux principes de l'analyse infinitésimale. »
- Idée de « coupure ».
- « Si l 'on sépare toutes les grandeurs d'un domaine constitué de façon continue en deux classes telles que toute grandeur de la première classe est plus petite que toute grandeur de la seconde classe, alors il existe ou bien dans la première classe une grandeur qui est la plus grande, ou bien dans la seconde classe une grandeur qui est la plus petite. »

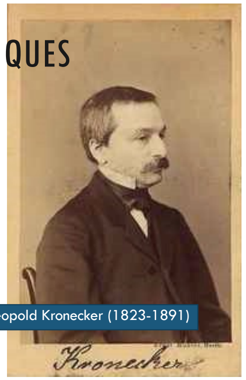

Richard Dedekind (1831–1916)

50

# ARITHMÉTISATION DES MATHÉMATIQUES

Leopold Kronecker (1886):
- « J'ai la conviction qu'un jour, nous réussirons à « arithmétiser » le contenu complet des disciplines mathématiques, c'est-à-dire de les fonder exclusivement sur la notion de nombre prise dans son sens strict en nous débarrassant des modifications et des extensions à cette notion, la plupart inspirée par les applications à la géométrie et à la mécanique. »

Cela est réalisé avec Dedekind, Hilbert et Cantor.



Leopold Kronecker (1823-1891)

51

# GEORG CANTOR (1845-1918)

Théorie des ensembles

Dénombrabilité des nombres rationnels

Arithmétisation de l'infini.

52

## Q EST DÉNOMBRABLE

« Si deux ensembles bien définis M et N se laissent coordonner l'un à l'autre, élément par élément, de façon univoque et complète, je me sers de l'expression qu'ils sont d'égale puissance » (Cantor 1872).

$$\frac{0}{1},\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{1},\frac{1}{3},\frac{3}{1},\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},\frac{4}{1},\ldots$$

53

## L'INTERVALLE, ET DONC **R** , N 'EST PAS DÉNOMBRABLE

« Je le vois mais je ne le crois pas » (Dedekind).

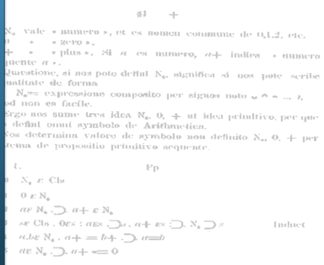
$$0,a_1a_2a_3a_4a_5\ldots a_n\ldots$$
$$0,b_1b_2b_3b_4b_5\ldots b_n\ldots$$
$$0,c_1c_2c_3c_4c_5\ldots c_n\ldots$$

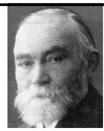
$$0,a_1b_2c_3d_4e_5\ldots\ldots$$

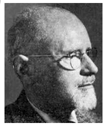
- Hypothèse du continu: les sous-ensembles infinis de $\mathbf{R}^n$ ont la puissance de **N**, soit celle de **R**.
- Indécidable! (P. J. Cohen 1963).

54

## AXIOMATISATION DE L'ARITHMÉTIQUE







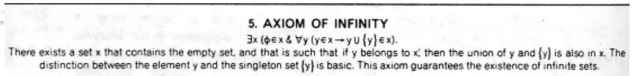
Gottlob Frege (1848-1925)

Guiseppe Peano (1858-1932

Ernst Zermelo (1871-1953)

Adolf Fraenkel (1891-1965)

Paradoxe de la théorie des ensembles



5. AXIOM OF INFINITY

∃x (ϕ∈x & ∀y (y∈x→y∪{y}∈x).

There exists a set x that contains the empty set, and that is such that if y belongs to x, then the union of y and {y} is also in x. The distinction between the element y and the singleton set {y} is basic. This axiom guarantees the existence of infinite sets.

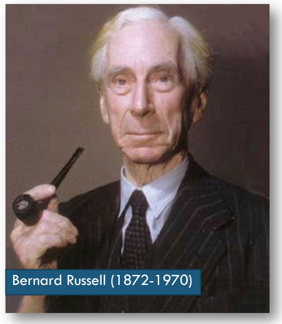
55

## UN PARADOXE TROUBLANT

Un ensemble peut se contenir lui-même.

Soit **A** l'ensemble des ensembles qui ne se contiennent pas.

**A** est-il ou non dans **A**?



Bernard Russell (1872-1970)

56