Cours 10

Les « Révolutions mathématiques » du XIX^e siècle : Géométrie et algèbre

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

IMJ-PRG

LU3MA209
ÉLÉMENTS D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

2023-2024, 2^e période

David Aubin
david.aubin@sorbonne-université.fr

2024 D. AUBIN - LU3MA209 1

1

DEUX ÉVOLUTIONS PARALLÈLES


Les Français peints par eux-mêmes (1840–1842)

Extension du domaine des applications
- « Seconde révolution scientifique » au début du 19^e s.
  = mathématisation des sciences physiques (électricité et magnétisme, chaleur, optique).
- Extension du domaine des applications (physique, « statistique », génie civil et militaire).
- Mathématiques sophistiquées en électromagnétisme, statistique, etc.
  ATTENTION: cet aspect sera très peu traité ici.

Abstraction croissante des mathématiques pures
- La « révolution structurale »: l'objet des mathématiques change.
- Autonomie croissante des mathématiques pures.
- Renouveau profond des questionnements et des techniques: en analyse, géométrie et algèbre.

2024 D. AUBIN - LU3MA209 2

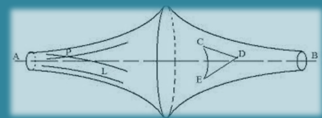
2

PROGRAMME DES DEUX COURS (2^E COURS)

1. Révolutions mathématiques du 19^e siècle
2. Réforme de l'analyse : fondements, rigueur, séries de Fourier, intégration
3. Renouveau de la géométrie : géométries descriptive, projective, non euclidienne
4. Explosion de l'algèbre : équations, abstraction, axiomatisation

2024 D. AUBIN - LU3MA209 3

3



3. RENOUVEAU DE LA GÉOMÉTRIE

1. Précurseurs: la théorie des parallèles.
2. Géométries descriptive et projective
3. Les géométries non euclidienne.
4. Algèbre et axiomatique.
5. Géométrie et expérience.

2024 D. AUBIN - LU3MA209 4

4

DEUX DROITES PARALLÈLES SE CROISENT-ELLES?

5

LA THÉORIE DES PARALLÈLES

Remplacer le 5e postulat par une autre d'expression plus simple.

John **Playfair**: « *Par un point donné, on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite donnée.* »

Adrien-Marie **Legendre**: « *La somme des angles d'un triangle est de 180°.* »

Plus compliqué, le postulat des parallèles peut-il être démontré à partir des quatre premiers ?

Mathématiciens arabes (**Al-Khayyam**, **al-Tusi**, et autres)

John Wallis, G. **Saccheri** : méthodes de preuve par l'absurde.

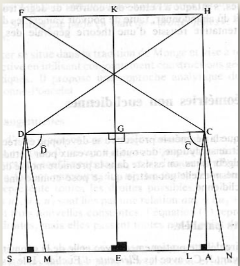
6

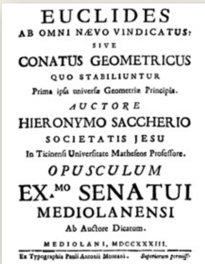
QUADRILATÈRE DE « SACCHERI »

Euclide lavé de toute tache (1733)

Chez al-Haytham et al-Khayyam (IXe siècle).
- Si les angles C et D sont aigus…
- Si les angles C et D sont obtus…

Précurseurs des géométries non-euclidiennes:
- Girolamo **Saccheri** (1667–1733)
- Jean-Henri **Lambert** (1728–1777)
- Adrien-Marie **Legendre** (1752–1833)




EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipsa universæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinensi Universitate Matheseos Professore.
OPUSCULUM
EX.MO SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.
MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
Ex Typographia Pauli Antonii Montani. Superiorum permissu.

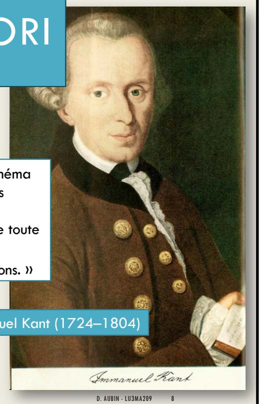
7

GÉOMÉTRIE COMME A PRIORI

Les axiomes de la géométrie euclidienne sont des « jugements synthétiques *a priori*. »

> « L 'espace n 'est pas quelque chose d 'objectif et de réel, (…) mais un schéma subjectif et idéal servant à la coordination de tout ce qui est perçu par nos sens. »
> « La simple forme d'intuition qu'on appelle l'espace est donc le substrat de toute intuition déterminable à propos d'objets particuliers, et, en elle, se trouve évidemment la condition de la possibilité ou de la variabilité de ces intuitions. »

Sur la forme et les principes du monde sensible et intelligible (1770) ; *Critique de la Raison pure* (1781-1787).



Immanuel Kant (1724–1804)

8

NOUVELLES GÉOMÉTRIES

Entre la géométrie euclidienne et la géométrie analytique (Descartes et Fermat)

- Géométrie descriptive (Monge)
- Géométrie projective (Poncelet)

De nouvelles méthodes de recherches propres à la géométrie.

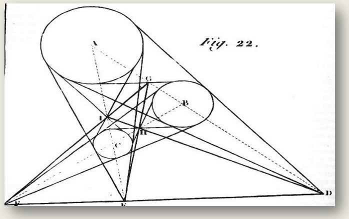
Gaspard Monge (1746-1818)

Jean-Victor Poncelet (1788-1867)

2024 D. AUBIN - LU3MA209 9

9

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE



Dérivant des techniques graphiques des praticiens (Mézières): par ex., *calcul du relief d'une fortification.*

Introduite à l'Ecole normale de l'An III (1794) et à l'Ecole polytechnique.

Une approche **synthétique** des problèmes de géométrie (par opposition à l'approche **analytique** popularisée par Descartes et Fermat).

2024 D. AUBIN - LU3MA209 10

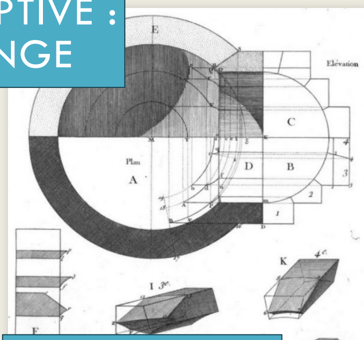
10

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE : DÉFINITION DE MONGE

Gaspard Monge
à l'École normale de l'An III

« La géométrie descriptive a deux objets :

1. *de donner les méthodes pour représenter sur une feuille de papier […] tous les corps de la nature […] ;*
2. *de déduire toutes les vérités qui résultent et des formes [de ces corps] et de leurs positions respectives. »*



Simonin, *Traité élementaire de la coupe des pierres* (1792)

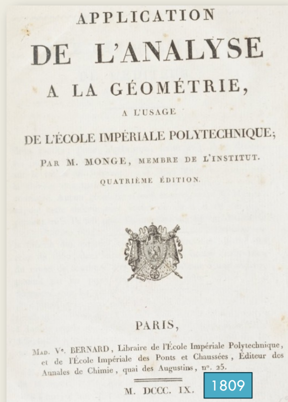
https://books.google.fr/books?id=tDMVAAAAQAAJ

2024 D. AUBIN - LU3MA209 11

11

DUALITÉ ANALYSE ET GÉOMÉTRIE

Monge : La géométrie et l'algèbre « *ont des rapports les plus intimes. Il n'y a aucune construction de* ***géométrie descriptive*** *qui ne puisse être traduite en* ***analyse****; et lorsque les questions ne comportent que trois inconnues, chaque opération analytique peut être regardée comme l'écriture d'un spectacle en géométrie. Il serait à désirer que ces deux sciences fussent cultivées ensemble: la géométrie descriptive porterait […]* ***l'évidence*** *et l'analyse […] la* ***généralité****.* »



APPLICATION
DE L'ANALYSE
A LA GÉOMÉTRIE,
A L'USAGE
DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE;
PAR M. MONGE, MEMBRE DE L'INSTITUT.
QUATRIÈME ÉDITION.

PARIS,
Mme Ve BERNARD, Libraire de l'École Impériale Polytechnique, et de l'École Impériale des Ponts et Chaussées, Éditeur des Annales de Chimie, quai des Augustins, n° 25.
M. DCCC. IX.

1809

http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6565456c/f13.highres

2024 D. AUBIN - LU3MA209 12

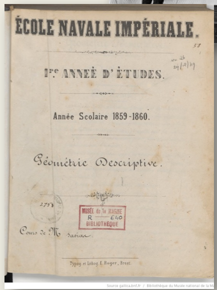
12

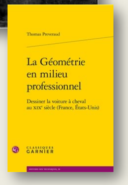
INFLUENCE DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

« La géométrie descriptive […], par la nature de ses opérations, qui ont pour but d'établir une **correspondance complète** entre des figures effectivement tracées sur un plan et des corps fictifs dans l'espace, familiarisa avec les formes des corps, les fit concevoir idéalement, avec exactitude et promptitude, et doubla de la sorte nos moyens d'investigation dans la science de l'étendue. […]

« Elle fournit un moyen de solution *a priori* dans des questions où la géométrie de Descartes […] se trouvait arrêtée par les bornes que rencontrait l'algèbre elle-même. »

Michel Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (1837).



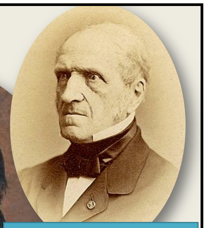


13

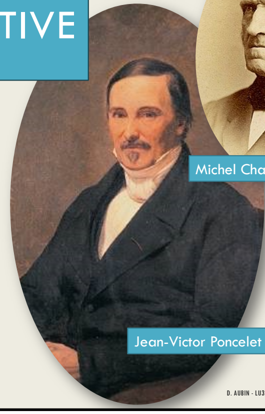
GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

« Qu'on prenne une figure quelconque dans l'espace, et l'une des propriétés connues; qu'on applique à cette figure une transformation, et qu'on suive les diverses modifications (…) qu'éprouve le théorème qui exprime cette propriété, on aura une nouvelle figure, et une nouvelle propriété de cette figure, qui correspondra à celle de la première. Ces moyens (…) sont de véritables instruments, que ne possédait point l'ancienne géométrie, et qui font le caractère fort distinctif de la géométrie moderne. »

Michel Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (1837).



Michel Chasles (1793-1880)

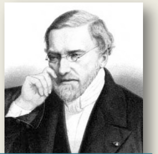


Jean-Victor Poncelet (1788-1867)

14

PRINCIPE DE DUALITÉ

Joseph-Diez Gergonne (1771–1859)



Jean-Victor Poncelet (1788-1867)

Inspiration chez Pappus ou Desargues.

« Théorie des polaires réciproques » (1818) : Une « géométrie romantique […] à quatre dimensions » ?

Une controverse avec Gergonne (une des premières dans une revue mathématique)

Traité des propriétés projectives des figures (1822) :

> « On sent toutefois l'importance qu'il y aurait à pouvoir reconnaître, à l'avance, si telle ou telle relation examinée est ou n'est pas projective de sa nature ; car il en résulterait qu'ayant démontré cette relation pour une figure particulière, on pourrait de suite l'étendre à toutes les projections possibles de cette figure. » [Poncelet 1822, p. 5]

15

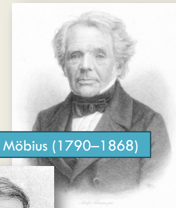
STRUCTURALISME

Coordonnées homogènes introduites par Möbius (1827)

Géométrie synthétique par Steiner (1832)

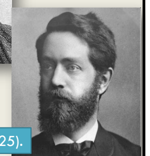
- la **figure** cesse d'être l'objet principal de la géométrie, qui devient l'étude de relations (projectives) entre figures

Programme d'Erlangen de Klein (plus bas)



August Ferdinand Möbius (1790–1868)

Jacob Steiner (1796–1863)



Félix Klein (1849-1925).

16

NOUVELLE EXPÉRIENCE DE L'ESPACE

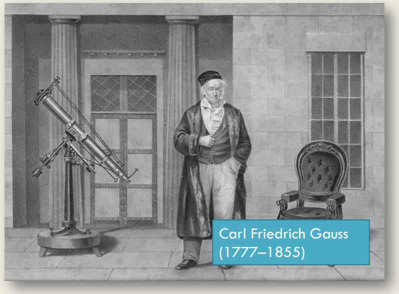
1801: calcul de l'orbite de Cérès (méthode des moindres carrés, publiée en 1809).

1807: directeur de l'observatoire de Göttingen.

1820: triangulation du Hanovre.

Septembre 1823: mesure du triangle Brocken, Hohehagen, and Inselsberg (BHI)

1827: géométrie intrinsèque des surfaces



Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

2024 D. AUBIN - LU3MA209 17

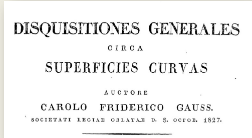
17

L'EXCÈS DES ANGLES

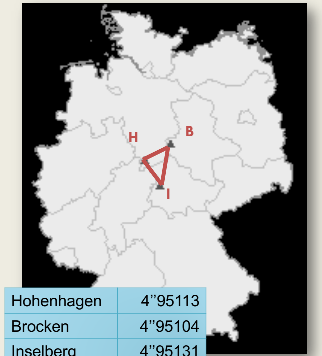
Précision est plus grande que la correction due à la courbure terrestre.

$$\alpha+\beta+\gamma-\pi=[\mathrm{F}(\Delta)/R^2]-\varepsilon$$

Article de 1827 :



DISQUISITIONES GENERALES
CIRCA
SUPERFICIES CURVAS
AUCTORE
CAROLO FRIDERICO GAUSS.
SOCIETATI REGIAE OBLATAE D. 8. OCTOB. 1827.

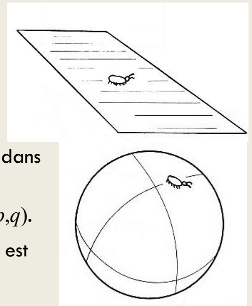


Hohenhagen	4"95113
Brocken	4"95104
Inselberg	4"95131
Total	14"85348

2024 D. AUBIN - LU3MA209 18

18

GÉOMÉTRIE INTRINSÈQUE DES SURFACES



Le point de vue du scarabée : fait abstraction de l'espace dans laquelle la surface est plongée.

Coordonnées (x,y,z) en fonction de coordonnées internes (p,q).

La distance euclidienne entre (x,y,z) et $(x+dx, y+dy, z+dz)$ est $ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2$.

Elle s'écrit intrinsèquement $ds^2 = \mathrm{E}dp^2+2\mathrm{F}dpdq+\mathrm{G}dq^2$.

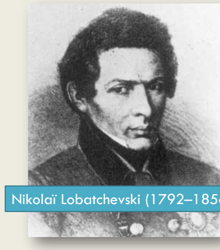
Propriétés géométriques de la surface ne dépendent que de E, F, G; par ex.: la notion de **courbure**. (*theorema egregium*)

2024 D. AUBIN - LU3MA209 19

19

LES GÉOMÉTRIE NON-EUCLIDIENNES

János Bolyai (1802–1860)

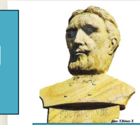


Nikolaï Lobatchevski (1792–1856)

2024 D. AUBIN - LU3MA209 20

20

LA SCIENCE DE L'ESPACE ABSOLU


János Bolyai (1802–1860)

János Bolyai, officier de l'armée autrichienne.

Annexe au traité de son père Farkas Bolyai (1775–1856), publié en 1832.

« Tu ne dois pas essayer cette approche des parallèles. Je connais cette voie jusqu'à sa fin. J'y ai passé des nuits sans fond, qui ont éteint toute lumière et toute joie dans ma vie. » (Farkas Bolyai à son fils János en 1820)

« Depuis presque 40 ans, j'ai réfléchi de temps en temps, à heures perdues […] aux principes de la géométrie […] Ma conviction qu'on ne peut établir la géométrie à priori est plus forte. En même temps; il faudra encore du temps avant que je puisse publier mes recherches très extensives sur le sujet; peut-être cela n'arrivera-t-il pas de mon vivant, car je crains les cris des Béotiens. »
— Gauss à Friedrich Wilhelm Bessel (27 janvier 1829)

2024 D. AUBIN - LU3MA209 21

21

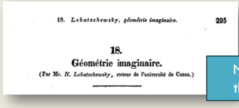
GÉOMÉTRIE IMAGINAIRE

Lobatchevski, doyen, puis recteur de l'université de Kazan (1820–1845)

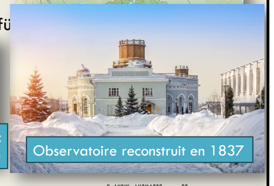
23 février 1826: « Sur les principes de la géométrie »

1829–1830: 1re publication en russe

1837 : publication en français dans le Journal de CrelleJournal fü angewandte Mathematik




Nouveaux principes de géométrie avec théorie complète des parallèles (1837)

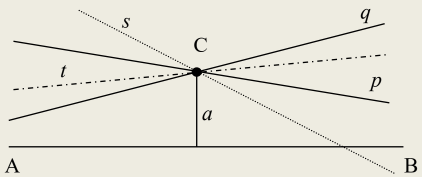

Observatoire reconstruit en 1837

2024 D. AUBIN - LU3MA209 22

22

NÉGATION DU 5E POSTULAT

« Par une droite AB et un point C donnés, toutes les droites passant par C peuvent être partagées en deux classes par rapport à AB: celle des droites qui coupent AB et celle des droites qui ne coupent pas AB. »




Nikolaï Lobatchevski (1792–1856)

2024 D. AUBIN - LU3MA209 23

23

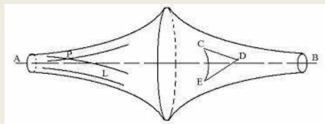
LA PSEUDOPHÈRE

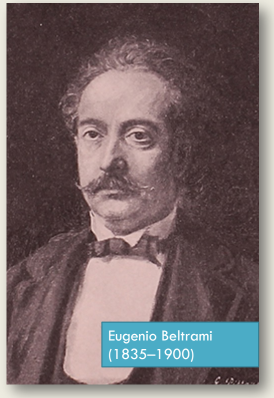
Imaginée par Eugenio Beltrami (1835-1899) en 1868.

Surface à courbure négative constante.

Première "représentation" de la géométrie hyperbolique de Bolyai et Lobatchevski.

Prouve la cohérence des géométrie non-euclidiennes.

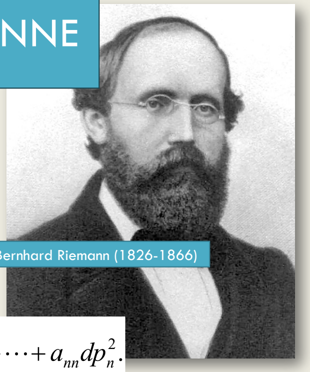



Eugenio Beltrami (1835–1900)

2024 D. AUBIN - LU3MA209 24

24

GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE



Bernhard Riemann (1826-1866)

Formation à Göttingen et à Berlin

Doctorat en 1851 : les surface de Riemann.

Son *Habilitationschrift* de 1854 :

- Intégrale de Riemann
- Reformulation de la géométrie, la géométrie différentielle
- Espace à *n* dimensions ; notion de variété

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}dp_i dp_j = a_{11}dp_1^2 + a_{12}dp_1dp_2 + \cdots + a_{nn}dp_n^2.$$

25

TROIS GÉOMÉTRIES

GÉOMÉTRIE	TERMINOLOGIE DE KLEIN	QUADRILATÈRE DE SACCHIERI	NOMBRE DE PARALLÈLES	MODÈLE
EUCLIDE	PARABOLIQUE	ANGLES DROITS	UNE SEULE	PLAN
GAUSS, BOLYAI, LOBTCHEVSKI	HYPERBOLIQUE	ANGLES AIGUS	UNE INFINITÉ	PSEUDOSPHÈRE
RIEMANN	ELLIPTIQUE	ANGLES OBTUS	AUCUNE	SPHÈRE

26

LE « PROGRAMME D'ERLANGEN »

Études à Göttingen avec Rudolph Clebsch (1833–1872) : physique et géométrie.

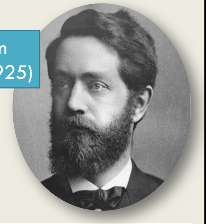
Rencontre Sophus Lie (1842-1899)

Brochure distribuée lors de sa leçon inaugurale à l'université d'Erlangen.

Félix Klein (1849-1925).

27

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE



Félix Klein (1849-1925)

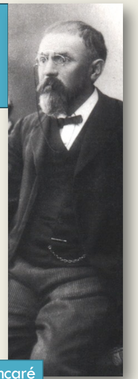
Changer le point de vue : s'intéresser aux **groupes de transformation** de l'espace plutôt qu'aux figures.

Toute géométrie peut être conçue comme **un espace et un groupe de transformation** qui agit sur cet espace [Euclide: plan et groupe des isométries].

GROUPE	POSITION	DIRECTION	ORIENTATION	DISTANCE	ANGLE	PARALLÉLISME	COLLINÉARITÉ
Identité							
Translations							
Déplacements							
Isométries							
Similitudes							
Gr. affine							
Gr. Projectif							

28

QU'EST-CE QUE LA GÉOMÉTRIE ?



Réunification des géométrie

- Hiérarchie et classification
- Grande importance donnée à l'espace projectif

« l'étude des groupes d'opérations auxquelles on peut soumettre un corps sans le déformer » (Henri Poincaré)

« Dépassée en tant que science autonome et vivante, la géométrie classique s'est ainsi transfigurée en un langage universel de la mathématique contemporaine, d'une souplesse et d'une commodité incomparables. »
(N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Algèbre*, 1959).

Henri Poincaré (1854–1912)

29

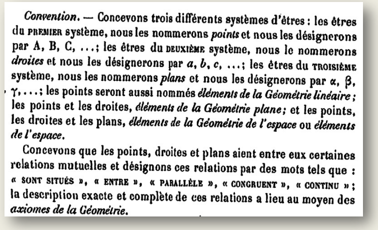
LA NOUVELLE AXIOMATISATION

« On devrait pouvoir dire, au lieu de "*points, lignes et plans*", "*tables, chaises et verres de bières*" ».
À Berlin vers 1891 (propos rapportés par Blumenthal en 1935)

Embauché à Göttingen par F. Klein (qui est en train de travailler à sa grande *Encyclopédie des sciences mathématiques*, 23 tomes).

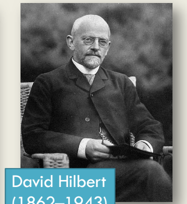
Grundlagen der Geometrie (1899).

- Rejet de l'intuition, de la visualisation et de l'expérience (*Anschauung*).



Convention. — Concevons trois différents systèmes d'êtres : les êtres du PREMIER système, nous les nommerons *points* et nous les désignerons par A, B, C, ...; les êtres du DEUXIÈME système, nous le nommerons *droites* et nous les désignerons par *a*, *b*, *c*, ...; les êtres du TROISIÈME système, nous les nommerons *plans* et nous les désignerons par α, β, γ, ...; les points seront aussi nommés *éléments de la Géométrie linéaire*; les points et les droites, *éléments de la Géométrie plane*; et les points, les droites et les plans, *éléments de la Géométrie de l'espace* ou *éléments de l'espace*.

Concevons que les points, droites et plans aient entre eux certaines relations mutuelles et désignons ces relations par des mots tels que : « SONT SITUÉS », « ENTRE », « PARALLÈLE », « CONGRUENT », « CONTINU »; la description exacte et complète de ces relations a lieu au moyen des *axiomes de la Géométrie*.



David Hilbert (1862–1943)

30

GÉOMÉTRIE ET EXPÉRIENCE

« La géométrie ne peut être mise du côté de l'arithmétique, qui est de nature *a priori*, mais plutôt du côté de la **mécanique** » (Gauss 1817).

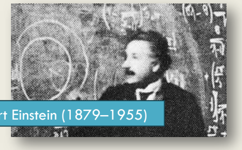
« L'inanité des efforts tentés depuis Euclide (…) m'a conduit à soupçonner que la vérité à établir n'était pas impliquée dans les notions antérieures et que pour la démontrer il fallait (…) recourir à l'**expérience** » (Lobatchevski 1835).

« [Notre travail] nous conduit dans le domaine d'une autre science, dans le domaine de la **physique** » (Riemann 1854).

« Les mathématiques révèlent les **espaces possibles**; la physique décide lequel parmi eux correspond à l'**espace physique** » (Hans Reichenbach 1927).

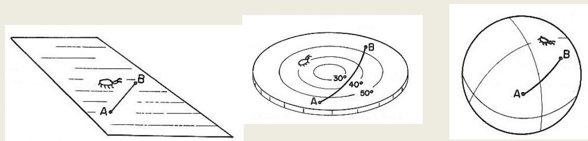
31

LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE



Albert Einstein (1879–1955)

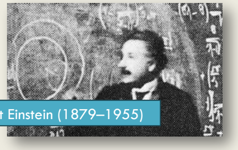
Principe d'équivalence = tous les référentiels, même accélérés, sont équivalents du point de vue des lois de la physique.
Conséquence = l'outil mathématique pour description de l'espace est la géométrie de Riemann ; une nouvelle théorie de la gravitation (1917).



32

LE RÉEL ET LA RAISON

Albert Einstein, La Géométrie et l'expérience (1921)



Albert Einstein (1879–1955)

« Comment se fait-il que la mathématique, qui est un produit de la pensée humaine et indépendante de toute expérience, s'adapte d'une si admirable manière aux objets de la réalité? (…)

« À cette question il faut, à mon avis, répondre de la façon suivante: **pour autant que les propositions de la mathématique se rapportent à la réalité, elles ne sont pas certaines, et pour autant qu'elles sont certaines, elles ne se rapportent pas à la réalité.** (…)

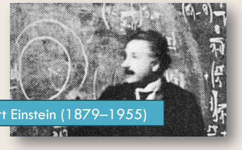
« Examinons de ce point de vue un axiome de géométrie (…): par deux points de l'espace on peut toujours tracer une droite, et l'on n'en peut tracer qu'une seule. Comment cet axiome doit-il être interprété dans le sens ancien et comment dans le sens moderne ».

2024 D. AUBIN - LU3MA209 33

33

QU'EST-CE QU'UN AXIOME ?

Albert Einstein, La Géométrie et l'expérience (1921)



Albert Einstein (1879–1955)

« **Interprétation ancienne**: Chacun sait ce qu'est une droite et ce qu'est un point. Que cette connaissance provienne de la faculté de l'esprit humain ou de l'expérience, de la coopération des deux ou d'ailleurs, le mathématicien n'est pas obligé d'en décider; il abandonne cette question au philosophe. (…)

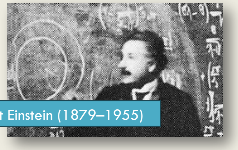
« **Interprétation moderne [axiomatique]**: La géométrie traite d'objets qui sont désignés par les termes de *points, droite,* etc. Une connaissance quelconque ou intuition de ces objets n'est pas supposée; la seule chose qu'on suppose est la validité des axiomes (…) qui doivent être conçus comme purement formels [et] dépourvus de tout contenu intuitif. (…) Ces axiomes sont des **constructions libres de l'esprit humain**.

2024 D. AUBIN - LU3MA209 34

34

LA GÉOMÉTRIE DE L'UNIVERS

Albert Einstein, La Géométrie et l'expérience (1921)



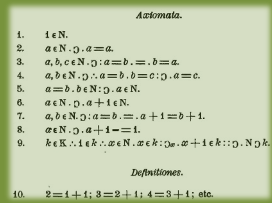
Albert Einstein (1879–1955)

« (…) Mais il est d'autre part certain que la mathématique en général et la géométrie en particulier doivent leur existence à notre besoin de savoir quelque chose sur le comportement des objets réels. Le terme de géométrie, qui signifie ***mesure du terrain***, le prouve déjà. (…) Pour pouvoir fournir des énoncés [se rapportant au réel], la géométrie devrait être dépouillée de son caractère logique et formel, de telle sorte qu'on puisse coordonner aux concepts schématiques vides de la géométrie axiomatique des objets de la réalité accessible à l'expérience (…): *Des corps solides se comportent* (…) *comme des corps à trois dimensions de la géométrie euclidienne.*

« (…) Nous appellerons la géométrie ainsi complétée la **géométrie pratique**. (…) La question de savoir si la géométrie pratique est euclidienne ou non a un sens précis et la réponse ne peut être fournie que par **l'expérience**. »

2024 D. AUBIN - LU3MA209 35

35



Axiomata.

1. $1 \in N.$
2. $a \in N . \supset . a = a.$
3. $a, b, c \in N . \supset : a = b . = . b = a.$
4. $a, b \in N . \supset \therefore a = b . b = c : \supset . a = c.$
5. $a = b . b \in N : \supset . a \in N.$
6. $a \in N . \supset . a + 1 \in N.$
7. $a, b \in N . \supset : a = b . = . a + 1 = b + 1.$
8. $a \in N . \supset . a + 1 -= 1.$
9. $k \in K \therefore 1 \in k \therefore x \in N . x \in k : \supset_x . x + 1 \in k :: \supset . N \supset k.$

Definitiones.

10. $2 = 1 + 1;\ 3 = 2 + 1;\ 4 = 3 + 1;$ etc.

4. L'EXPLOSION DE L'ALGÈBRE

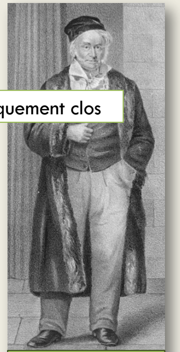
1. Résolution des équations algébriques.
2. Le calcul sur de nouveaux objets.
   a) Groupes et Théorie de Galois
   b) Un cas: les imaginaires
   c) Nouveaux objets, retour sur la géométrie
3. L'axiomatisation.

2024 D. AUBIN - LU3MA209 36

36

THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE

L'ensemble des complexes **C** est algébriquement clos


Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

Albert de Girard (1629) : toute équation du degré n possède n racines.

René Descartes (1637): « *tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement **imaginaires**.* »

Tentatives de démonstration par Leibniz, Jean Bernouilli, d'Alembert, Euler, Lagrange, etc.

Critique de Gauss (1799): « *L'hypothèse de base de la démonstration, l'axiome, est que toute équation possède effectivement n racines possibles ou impossibles. Si on entend par possibles: réelles, et par impossibles, complexes, cet axiome est inadmissible puisque c'est justement ce qu'il s'agit de démontrer. Mais si on entend par possibles les quantités réelles et complexes et par impossibles tout ce qui manque pour qu'on ait exactement n racines, cet axiome est acceptable. Impossible signifie alors quantité qui n'existe pas dans tout le domaine des grandeurs.* »

2024 D. AUBIN - LU3MA209 37

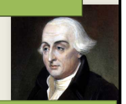
37

ÉCLIPSE, ET RENOUVEAU DE L'ALGÈBRE

Vers 1770: Vandermonde, Gauss, Laplace, et surtout **Lagrange**:

« Je me propose d'examiner les différentes méthodes que l'on a trouvées jusqu'à présent pour la résolution algébrique des équations, de les réduire à des principes généraux et de faire voir a priori pourquoi ces méthodes réussissent pour le troisième et le quatrième degré et sont en défaut pour les degrés ultérieurs. »

- Apparition de la notion de déterminant → algèbre linéaire
- Utilisation des substitutions → théorie des groupes
- Équations auxiliaires


Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796)

« La grande notoriété n'est assurée en Mathématiques qu'aux noms associés à une méthode, à un théorème, à une notation. Peu importe d'ailleurs que l'attribution soit fondée ou non, et le nom de Vandermonde serait ignoré de l'immense majorité des mathématiciens si on ne lui avait attribué ce déterminant que vous connaissez bien, et qui n'est pas de lui ! » (Lebesgue)

2024 D. AUBIN - LU3MA209 38

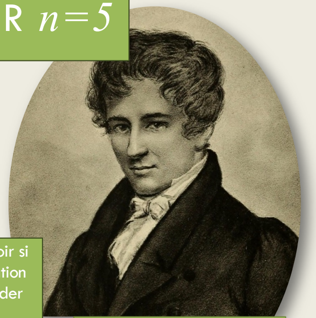
38

PAS DE SOLUTION POUR $n=5$

Impossibilité de résoudre par radicaux les équations générales de degré égal ou supérieur à 5;

- prouvée en 1823
- publiée en 1826 dans le Journal de Crelle.

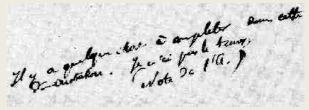
« On se proposait de résoudre les équations sans savoir si cela était possible. (…) Au lieu de demander une relation dont on ne sait pas si elle existe ou non, il faut demander si une telle relation est en en effet possible. »

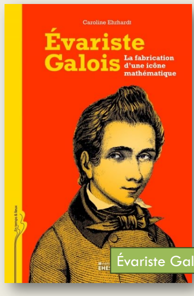

Niels Henrik Abel (1802-1829)

2024 D. AUBIN - LU3MA209 39

39

MYTHES ET RÉALITÉS





Évariste Galois (1811-1832)

Quelles sont les équations solubles par radicaux?

Introduction de la notion de **groupe** (au moins le terme).

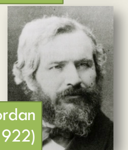
« *Sauter à pieds joints sur ces calculs ; grouper les opérations, les classer suivant leurs difficultés et non suivant leurs formes ; telle est, suivant moi, la mission des géomètres futurs.* »

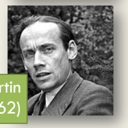
2024 D. AUBIN - LU3MA209 40

40

THÉORIE DE GALOIS


Joseph Liouville (1809–1882)


Camille Jordan (1838–1922)


Emil Artin (1898–1962)

Introduite par Galois en 1830-1832

- ignorée jusqu'à ce qu'elle soit reprise par Liouville en 1843, mais dont la véritable ampleur n'apparaîtra qu'avec les travaux de Camille Jordan (vers 1870) jusqu'à Emil Artin (1930).

2 principes:

- décomposition du groupe des substitutions de l'équation en sous-groupes emboîtés,
- adjonction successives de grandeurs au domaine de résolvabilité.

2024 D. AUBIN - LU3MA209 41

41

THÉORIE DE GALOIS : UN EXEMPLE TRIVIAL

Soit l'équation $x^4-3=0$; irréductible dans le corps des rationnels.

$$r = \sqrt[4]{3}$$

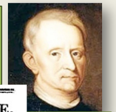
Ses quatre racines sont: r, ir, $-r$ et $-ir$.

Le corps de décomposition de l'équation est le corps des rationnels **Q** auquel on adjoint les deux quantités i et r.

2024 D. AUBIN - LU3MA209 42

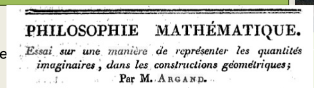
42

REPRÉSENTATION DES COMPLEXES


Jean-Robert Argand (1768-1822)

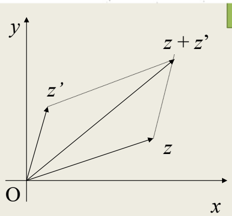
John Wallis, *Traité d'algèbre* (1685) :

- *« aller en dehors de la ligne où si elles étaient réelle[s] seraient mesurées. »*


PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.
Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires, dans les constructions géométriques; Par M. ARGAND.

Robert Argand (1806) :

- *« un genre de grandeur auquel peut s'allier l'idée de direction, de manière que, étant adoptées deux directions opposées, l'une pour les valeurs positives, l'autre pour les valeurs négatives, il en existât une troisième. »*
- Donc les imaginaires *« sont des quantités tout aussi réelles que l'unité primitive. »*



2024 D. AUBIN - LU3MA209 43

43

RÉTICENCES DES MATHÉMATICIENS

La troisième dimension résiste.

Abandon de la « pureté » algébrique, indépendante de la géométrie.

Fondée sur des conventions, et non des intuitions, l'algèbre ne peut être définie à partir d'une image géométrique.

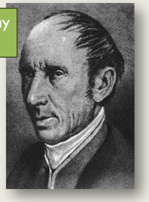
Adoption progressive (v. 1847–1849) de la représentation géométrique des imaginaires à cause de l'interprétation qu'elle fournit de l'analyse complexe.

« je ne vois dans cette notation qu'un masque géométrique appliqué sur des formes analytiques dont l'usage immédiat me semble plus simple et plus expéditif. »
— François-Joseph Servois
(1767 ou 1768-1847) en 1813.

2024 D. AUBIN - LU3MA209 44

44

L'ANALYSE COMPLEXE



Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Position formaliste de Cauchy:

- un nombre imaginaire est une « *expression symbolique* » $(a,b) = a + ib$ soumise à des « *règles fixes* » selon des « *conventions établies.* »
- $\sqrt{-1}$ n'est qu'« *un outil, un instrument de calcul.* »

Lettre de Gauss à Bessel (1811):

- « de même qu'on peut se représenter tout le domaine des quantités réelles au moyen d'une ligne droite indéfinie, de même on peut se représenter le domaine complet de toutes les quantités, les réelles et les imaginaires, au moyen d'un plan indéfini; où chaque point déterminé par son abscisse a et son ordonnée b, représente en même temps la quantité $a+bi$. Le passage continu d'une valeur de x à une autre $a+bi$ se fait par conséquent suivant une ligne, et peut donc s'effectuer d'une infinité de manières. »

Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846)

45

VERS UNE NOUVELLE ALGÈBRE

William R. Hamilton (1805-1866)

Théorie arithmétique des nombres complexes.

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),$$
$$(a,b)\times(c,d)=(ac-bd,ad+bc).$$

Recherches d'extension à l'aide de triplets, etc.

1843 : les quaternions.

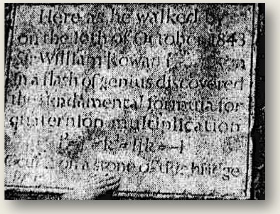
46

LES QUATERNIONS (1843)

Des quadruplets $(a,b,c,d) = a+bi+cj+dk$.

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$
$$ij = -ji = k,$$
$$jk = -kj = i,$$
$$ki = -ik = j.$$

Les quaternions forment un corps non commutatif, dont le corps **C** des complexes est un sous-corps.



Plaque à Brougham Bridge (Ireland): *« En ce lieu, alors qu'il marchait, le 10 octobre 1843, Sir William Rowan Hamilton découvrit dans un éclair de génie la formule fondamental de la multipli-cation des quaternions. »*

47

L'ÉCOLE ALGÉBRIQUE ANGLAISE

L'influence de l'université Cambridge

- 1819: fondation de l'« Analytical Society » (John Hershell, Charles Babbage, William Whewell) → Cambridge Philosophical Society

En 1833, George Peacock (Analytical Society)

- Distinction entre « algèbre arithmétique » et « algèbre symbolique » (science « pure » des symboles).

Augustus de Morgan, son disciple.

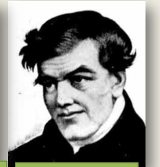
$$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$$

Arthur Cayley et les octaves.

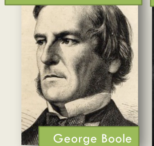
La logique mathématique et les lois de la pensée de George Boole (1847).

« Les mathématiques traitent des opérations considérées en elles-mêmes, indépendamment des matières diverses auxquelles elles peuvent être appliquées »

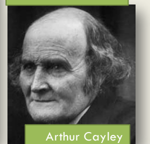
Augustus de Morgan (1806–1871)



George Peacock (1791–1858)



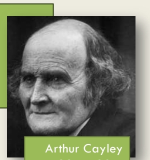
George Boole (1815–1864)



Arthur Cayley (1821–1895)

48

NOUVEAUX OBJETS EN ALGÈBRE


Arthur Cayley (1821–1895)

les matrices (v. 1858)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}.$$

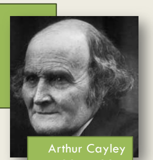
Provient de l'usage des déterminants dans la résolution de systèmes d'équations linéaires.

Arthur Cayley: *A Memoir on the Theory of Matrices* (1858). Étude des propriétés de la multiplication des matrices (associativité, distributivité, commutativité).

Seront utilisés par Heisenberg (1924) dans la formulation de la mécanique quantique.

49

NOUVEAUX OBJETS EN ALGÈBRE


Arthur Cayley (1821–1895)

Groupes abstraits : les tableaux de Cayley (1854)

	1	a	b	c	d	e
1	1	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e	1
b	b	c	d	e	1	a
c	c	d	e	1	a	b
d	d	e	1	a	b	c
e	e	1	a	b	c	d

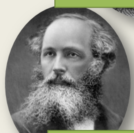
	1	a	b	c	d	e
1	1	a	b	c	d	e
a	a	b	1	e	c	d
b	b	1	a	d	e	c
c	c	d	e	1	a	b
d	d	e	c	a	1	a
e	e	c	d	a	b	1

« Un ensemble de symboles 1, a, b, … tous distincts, et tels que le produit de deux d 'entre eux (dans n'importe quel ordre), ou le produit de l'un d'entre eux par lui-même appartienne à l 'ensemble est un **groupe.** »

50

ESPACES VECTORIELS À N DIMENSIONS


Hermann Günther Grassmann (1809–1877)


James Clerk Maxwell (1831–1869)

Quaternions, octaves, matrices, et **vecteurs**…

Hermann Günther Grassmann, lettre à Cauchy (18 avril 1847) à propos de son *Die lineale Ausdehnungslehre*:

> *« J'y ai déposé les principes d'un calcul véritablement géométrique à l'aide duquel on pourrait calculer des points, des lignes, des aires et des angles presque comme des nombres sans avoir besoin de réfugier à des coordonnées ou à d'autres suppositions arbitraires. »*

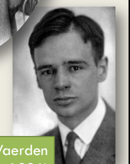
Produit extérieur et produit intérieur.

L'électromagnétisme de James Clerk Maxwell exprimée d'abord avec les quaternions, puis le calcul vectoriel.

51

NOUVEAUX VISAGES DE L'ALGÈBRE


Emmy Noether (1882–1935)


Bartel van der Waerden (1903–1996)

L'œuvre d'Emmy Noether:
- théorie des invariants algébrique ; théorie des anneaux ; algèbres non commutatives.

Vaste synthèse par Bartel van der Waerden : *Moderne Algebra* (1930).

De nouveaux objets:
- Groupes, Corps, Anneaux, Modules, Espaces vectoriels…

Les ***relations*** deviennent le sujet privilégié des algébristes.

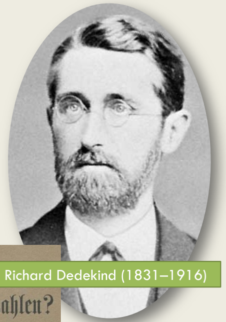
Les *structures algébriques* : des **axiomes sans contenu intuitif**.

52

NOUVEAUX FONDEMENTS

Dedekind, *Continuité et nombres réels* (1876).

- « des fondements purement arithmétiques, et tout à fait rigoureux, aux principes de l'analyse infinitésimale. »
- Idée de « coupure » [dès 1856, pour un cours à Zurich].



Richard Dedekind (1831–1916)

« Si l'on sépare toutes les grandeurs d'un domaine constitué de façon continue en deux classes telles que toute grandeur de la première classe est plus petite que toute grandeur de la seconde classe, alors il existe ou bien dans la première classe une grandeur qui est la plus grande, ou bien dans la seconde classe une grandeur qui est la plus petite. »

Ce que sont et ce que doivent être les nombres (1888)

2024 D. AUBIN - LU3MA209 53

53

LES INFINIS DE CANTOR

1874 : il existe un infini non dénombrable

- Une preuve différente de l'argument de la diagonalité (1891)

1877 : Il existe une bijection entre $\mathbb{R}^n$ et l'intervalle [0, 1]

« Je le vois mais je ne le crois pas » (Cantor dans une lettre à Dedekind)

Georg Cantor (1845–1918)

1878 : $\mathbb{Q}$ est dénombrable $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \ldots$

1879-1884 : la théorie des ensembles

- 1883 : les ensembles bien ordonnés et les nombres transfinis (terme introduit en 1895)

« Si deux ensembles bien définis M et N se laissent coordonner l'un à l'autre, élément par élément, de façon univoque et complète, je me sers de l'expression qu'ils sont d'égale **puissance** »

2024 D. AUBIN - LU3MA209 54

54

OPPOSITION À CANTOR

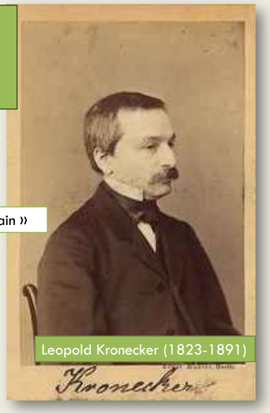
Leopold Kronecker, éditeur du journal de Crelle à Berlin, s'oppose aux idées de Cantor

- Une philosophie « finitiste » qui n'accepte pas la considération d'ensembles actuellement infinis.

« Dieu a fait les nombres entiers, tout le reste est l'œuvre de l'être humain »

« Nul ne doit nous exclure du Paradis que Cantor a créé » (Hilbert)

« J'ai la conviction qu'un jour, nous réussirons à "arithmétiser" le contenu complet des disciplines mathématiques, c'est-à-dire de les fonder exclusivement sur la notion de nombre prise dans son sens strict en nous débarrassant des modifications et des extensions à cette notion, la plupart inspirée par les applications à la géométrie et à la mécanique. » (Kronecker en 1886)



Leopold Kronecker (1823-1891)

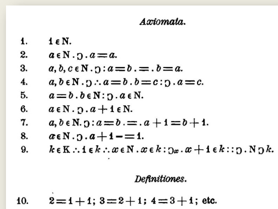
2024 D. AUBIN - LU3MA209 55

55

AXIOMATISATION DE L'ARITHMÉTIQUE

Axiomes de Peano publiés en 1889.

Nouvelles notations : ∃, ∀, ∈, ∪, ∩, etc.



Axiomata.

1. $1 \epsilon N.$
2. $a \epsilon N . \supset . a = a.$
3. $a, b, c \epsilon N . \supset : a = b . = . b = a.$
4. $a, b \epsilon N . \supset \therefore a = b . b = c : \supset . a = c.$
5. $a = b . b \epsilon N : \supset . a \epsilon N.$
6. $a \epsilon N . \supset . a + 1 \epsilon N.$
7. $a, b \epsilon N . \supset : a = b . = . a + 1 = b + 1.$
8. $a \epsilon N . \supset . a + 1 -= 1.$
9. $k \epsilon K \therefore 1 \epsilon k \therefore x \epsilon N . x \epsilon k : \supset_x . x + 1 \epsilon k :: \supset . N \supset k.$

Definitiones.

10. $2 = 1 + 1;\ 3 = 2 + 1;\ 4 = 3 + 1;$ etc.

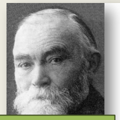
Guiseppe Peano (1858-1932)

Les principes de l'arithmétique, nouvelle méthode d'exposition (Arithmetices principia, nova methodo exposita), Turin, Bocca, 1889

2024 D. AUBIN - LU3MA209 56

56

LE LOGICISME

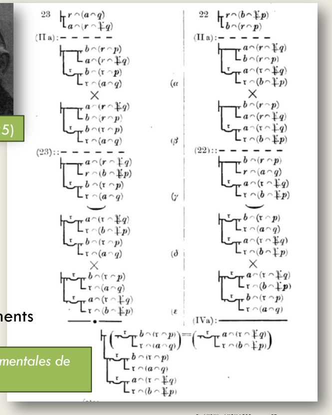


Gottlob Frege (1848–1925)

1879 – *Begriffschrift*, le Calcul des prédicats : une formalisation du langage mathématique

1884 – Les *Fondements de l'arithmétique* : aucun fondement intuitif, aucun axiome non logique

1893 – *Les Lois fondamentales de l'arithmétique* : application du symbolisme des prédicats aux fondements



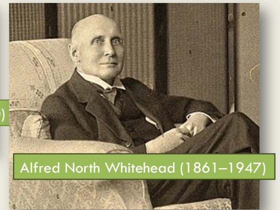
Extrait des *Lois fondamentales de l'arithmétique*

2024 D. AUBIN - LU3MA209 57

57

PARADOXE ?

Bertrand Russell (1872-1970)



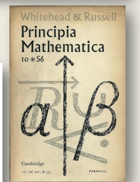
Alfred North Whitehead (1861–1947)

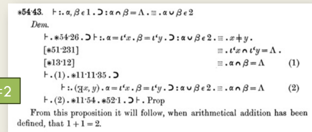
Lettre de Russell à Frege (1902) :
si $y = \{x | x \notin x\}$ alors $y \in y$ et $y \notin y$.

« Pour un écrivain scientifique, il est peu d'infortunes pires que de voir l'une des fondations de son travail s'effondrer alors que celui-ci s'achève. » (Frege)

Principia Mathematica (1910–1913)

- *Théorie des types*





$*54 \cdot 43.\ \vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash . *54 \cdot 26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$

$[*51 \cdot 231] \quad \equiv . \iota`x \cap \iota`y = \Lambda .$

$[*13 \cdot 12] \quad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \quad (1)$

$\vdash . (1) . *11 \cdot 11 \cdot 35 . \supset$

$\vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \quad (2)$

$\vdash . (2) . *11 \cdot 54 . *52 \cdot 1 . \supset \vdash . \text{Prop}$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

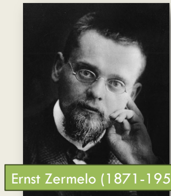
La célèbre preuve que 1+1=2

2024 D. AUBIN - LU3MA209 58

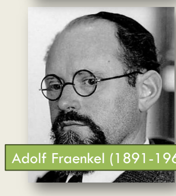
58

ZERMELO-FRAENKEL

1. Extensionalité : $(x \in M \Leftrightarrow x \in N) \Rightarrow M = N$
2. Existence des ensembles élémentaires : $\emptyset$, $\{x\}$, etc.
3. Séparation : Il existe un sous-ensemble N de M vérifiant toute propriété P.
4. Ensemble des parties : $\wp(M) = \{U | U \subset M\}$
5. Réunion : ensemble de tous les éléments des éléments d'un ensemble M: $\bigcup M$
6. Choix : $\forall X, \emptyset \notin X \Rightarrow \exists f : X \to \bigcup A, \forall A \in X (f(A) \in A)$
7. Infini : $\exists M, x \in M \Rightarrow \{a\} \in M$



Ernst Zermelo (1871-1953)



Adolf Fraenkel (1891-1965)

2024 D. AUBIN - LU3MA209 59

59