

Cours 11:
Saisir les mathématiques du 20^e siècle

LU3MA209
ÉLÉMENTS D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

2020-2021, 2^e période
David Aubin
david.aubin@sorbonne-université.fr

13/01/2022 D. AUBIN - LU3MA209 1

1

PROGRAMME DES DEUX PROCHAINS COURS

1. Mathématiques au 20^e siècle: survol
2. Crise des fondements
3. Guerres mondiales
4. Mathématiques après 1945

13/01/2022 D. AUBIN - 30011 2

2

1. MATHÉMATIQUES AU XX^E SIÈCLE

1. Big Science, big mathematics
2. Paris 1900: les problèmes de Hilbert

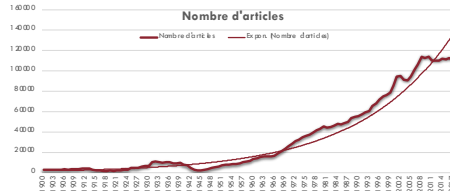
13/01/2022 D. AUBIN - 30011 3

3

« BIG SCIENCE »; BIG MATHEMATICS?

Env. 2000 mathématiciens actifs en 1950 ;
env. 110 000 aujourd'hui.

Croissance exponentielle du nombre d'articles publiés (double tous les 20 ans).



13/01/2022 D. AUBIN - LU3MA209 4

4

LES PROBLÈMES SÉCULAIRES

Théorie des parallèles

- Les géométries euclidiennes et non euclidiennes comme « conventions »
→ la topologie et la géométrie moderne.

Nature des nombres

- Les nombres réels, complexes, construits à partir des naturels.
→ l'algèbre moderne.

L'infini, les fondements de l'analyse

- Théorie des ensembles comme base de l'analyse des transfinis, etc.
→ l'analyse fonctionnelle.

Quelles nouvelles mathématiques ?

2 décembre 2016

D. AUBIN, MATHÉMATIQUES AU 20^E SIÈCLE 5

5

UN REGARD RÉTROSPECTIF

John Charles Fields Legacy Symposium, 7–9 juin 2000

Deux ères différentes:

- 1900–1950 : « spécialisation »
- 1950–2000 : « unification ».

Des tendances globales:

- Du local au global, du linéaire au non-linéaire, du commutatif au non-commutatif...
- L'influence de la physique

Des techniques en commun:

- homologie, K-théorie, groupes de Lie.



Sir Michael Atiyah (1929–2019)

Mathematics in the 20th Century¹

Michael Atiyah

If you talk about the end of one century and the beginning of the next you have two choices, both of them difficult. One is to survey the mathematics over the past hundred years; the other is to predict the mathematics of the next hundred years. I have chosen the more difficult task. Everybody can predict and we will not be around to find out whether we were wrong. But giving an impression of the past is something that everybody can disagree with.

2 décembre 2016

D. AUBIN, MATHÉMATIQUES AU 20^E SIÈCLE 6

6

EXPOSITION UNIVERSELLE DE 1900



2 décembre 2016

D. AUBIN, MATHÉMATIQUES AU 20^E SIÈCLE 7

7

EXPOSITION UNIVERSELLE DE 1900



2 décembre 2016

D. AUBIN, MATHÉMATIQUES AU 20^E SIÈCLE 8

8

EXPOSITION UNIVERSELLE DE 1900

Le Petit Palais
Le Grand Palais
Le Champ de Mars

EXPOSITION UNIVERSELLE DE 1900
PLAN D'ENSEMBLE

Palais de l'électricité à l'Exposition universelle de 1900 à Paris

2 décembre 2016 D. AUBIN, MATHÉMATIQUES AU 20^E SIÈCLE 9

9

2^E CONGRÈS INTERNATIONAL DES MATHÉMATIENS, PARIS, 1900

Henri Poincaré (1854-1912)

David Hilbert (1862-1943)

2 décembre 2016 D. AUBIN, MATHÉMATIQUES AU 20^E SIÈCLE 10

10

POINCARÉ 1900

11 août – Congrès international des mathématiciens : « Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques ».

- Intuition pour la découverte (esprit géométrique) et logique pour la démonstration (esprit analytique).

Congrès international de physique : « Sur les rapports de la physique expérimentale et de la physique mathématique »

- Expérience comme seule source de vérité et physique mathématique comme généralisation.

Congrès de philosophie : « Sur les principes de la mécanique ».

Séance des 5 Académies : « La Géodésie française »

2 décembre 2016 D. AUBIN, MATHÉMATIQUES AU 20^E SIÈCLE 11

11

LES 23 PROBLÈMES DE HILBERT

Présentés le 8 août 1900:

SUR LES
PROBLÈMES FUTURS DES MATHÉMATIQUES,
PAR M. DAVID HILBERT (Göttingen),
TRADUITE PAR M. L. LAUGEL (*).

Qui ne soulèverait volontiers le voile qui nous cache l'avenir afin de jeter un coup d'œil sur les progrès de notre Science et les secrets de son développement ultérieur durant les siècles futurs? Dans ce champ si fécond et si vaste de la Science mathématique, quels seront les buts particuliers que tenteront d'atteindre les guides de la

13/01/2022 D. AUBIN, 2001 12

12

1^{ER} PROBLÈME DE HILBERT

Tout sous-ensemble infini des réels peut être mis en bijection avec l'ensemble des entiers naturels ou avec l'ensemble des réels lui-même.

L'hypothèse du continu de Georg Cantor.

1938: la négation de l'hypothèse du continu est indémontrable dans la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel (Kurt Gödel)

1962: l'hypothèse du continu n'est pas démontrable dans ZFC (Paul Cohen).



Paul J. Cohen
(1934–2007),
médaille Fields
1966

2 décembre 2016

D. AUBIN, MATHÉMATIQUES AU 20^E SIÈCLE 13

13

2^E PROBLÈME DE HILBERT

Peut-on prouver la consistance de l'arithmétique ? En d'autres termes, peut-on démontrer que les axiomes de l'arithmétique ne sont pas contradictoires ?

1931: théorèmes d'incomplétude de Gödel.

1. Dans n'importe quelle théorie récursivement axiomatisable, cohérente et capable de « formaliser l'arithmétique », on peut construire un énoncé arithmétique qui ne peut être ni prouvé ni réfuté dans cette théorie.
2. Si T est une théorie cohérente qui satisfait des hypothèses analogues, la cohérence de T , qui peut s'exprimer dans la théorie T , n'est pas démontrable dans T .



Kurt Gödel
(1906–1978)

2 décembre 2016

D. AUBIN, MATHÉMATIQUES AU 20^E SIÈCLE 14

14

3^E PROBLÈME DE HILBERT

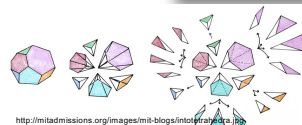
Étant donnés deux polyèdres d'égal volume, peut-on découper le premier polyèdre en des polyèdres et les rassembler pour former le second polyèdre ?

1902: Max Dehn prouve que non

- les invariants de Dehn
 - Si P peut être découpé en P_1 et P_2 alors $D(P) = D(P_1) + D(P_2)$
- exemple du cube ($D=0$) et du tétraèdre ($D \neq 0$).



Max Dehn
(1878–1952)



<http://m1admissions.org/images/m1-blogs/m1-admissions-14-15>

2 décembre 2016

D. AUBIN, MATHÉMATIQUES AU 20^E SIÈCLE 15

15

4^E PROBLÈME DE HILBERT

Définir toutes les géométries dont la plus courte distance entre deux points est un segment de droite.

Le développement de la géométrie différentielle (étude locale de la géométrie intrinsèque des espaces) a permis d'avancer sur cette question sans la résoudre.

2 décembre 2016

D. AUBIN, MATHÉMATIQUES AU 20^E SIÈCLE 16

16


5^E PROBLÈME DE HILBERT

Démontrer que les groupes de Lie sont nécessairement différentiables.

Groupes de Lie: [Sophus Lie (1842-1899)]

- Une structure algébrique G est un groupe de Lie réel ou complexe lorsque :
 - G est une variété différentiable réelle ou complexe ;
 - G , munie de deux fonctions $G \times G \rightarrow G$ (multiplication) et $G \rightarrow G$ (inversion), est un groupe ;
 - les applications de multiplication et d'inversion sont différentiables.

1953: théorème de Gleason.



Andrew Gleason (1921-2008) dans son uniforme de la Marine américaine pendant la 2^e Guerre Mondiale.

2 décembre 2016 D. AUBIN, MATHÉMATIQUES AU 20^E SIÈCLE 17

17

6^E PROBLÈME DE HILBERT

L'axiomatisation, fondée sur le modèle mathématique, de la physique.

???

2 décembre 2016 D. AUBIN, MATHÉMATIQUES AU 20^E SIÈCLE 18

18

7^E PROBLÈME DE HILBERT

Démontrer la transcendance des nombres a^b , avec a algébrique et b irrationnel (par exemple $2^{\sqrt{2}}$).

Théorème de Gelfond-Schneider, 1929–1935

- Prouvé dans le cas où b est algébrique.
- Produit une infinité de nombres transcendants.



Aleksandr Gelfond (1906-1968)



Theodor Schneider (1911-1988)

2 décembre 2016 D. AUBIN, MATHÉMATIQUES AU 20^E SIÈCLE 19

19

8^E PROBLÈME DE HILBERT

Démontrer l'hypothèse de Riemann.


Hypothèse de Riemann:

- Formulée en 1859 par Bernhard Riemann (1826-1866).
- Les zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann ont tous pour partie réelle $1/2$.


$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Non résolue: malgré la conjecture de André Weil résolue par Pierre Deligne.

un des grands problèmes ouverts des mathématiques. [problème Clay: 1 million de dollars].



André Weil (1906-1998)



Pierre Deligne (1944-)

2 décembre 2016 D. AUBIN, MATHÉMATIQUES AU 20^E SIÈCLE 20

20

PROBLÈMES DE HILBERT

9. Nombre de solutions d'une congruence quadratique dans un anneau d'entiers d'un corps algébrique (résolu 1921-1927).
 10. Existe-t-il un algorithme universel permettant de conclure à l'existence de solutions d'une équation diophantienne ? (solution partielle)
 11. Généraliser la classification des formes quadratiques à celles dont les coefficients sont choisis dans des anneaux d'entiers algébriques.(résolu par Siegel).
 12. Généralisation d'un théorème de Kronecker portant sur les corps algébriques (solution partielle).
 13. Existe-t-il des fonctions continues de 3 variables non superposables par des fonctions continues de deux variables ? (Non, par Kolmogorov et Arnold, 1954).
- Etc...

2 décembre 2016

D. AUBIN, MATHÉMATIQUES AU 20^E SIÈCLE 21

21

2. CRISE DES FONDEMENTS

1. La fin des certitudes?
2. Axiomatique et structuralisme

13/01/2022

D. AUBIN, 2001 22

22

CRISE DES FONDEMENTS

Rappel:

- Géométrie non euclidiennes, basées sur la géométrie euclidienne (Beltrami)
- Géométrie euclidienne basées sur l'arithmétique (Dedekind, Hilbert)
- Arithmétique basée sur la théorie des ensembles (Cantor, Zermelo-Fraenkel)
- Théorie des ensembles basées sur la logique (Russell, Whitehead)

Théorèmes d'incomplétude de Gödel...

2 décembre 2016

D. AUBIN, MATHÉMATIQUES AU 20^E SIÈCLE 23

23

NICOLAS BOURBAKI

Groupe de mathématiciens fondé en 1934, tous français à l'origine.

- André Weil, Jean Dieudonné, Claude Chevalley, Henri Cartan, Laurent Schwartz, Jean-Pierre Serre...

Auteur des *Éléments de mathématique*.

Exerce une influence profonde sur les mathématiques depuis les années 1950.

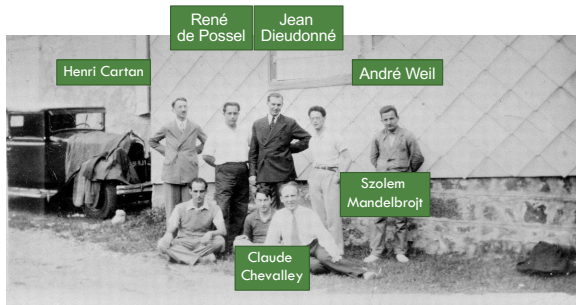
« L'architecture des mathématiques » (1948)

2 décembre 2016

D. AUBIN, MATHÉMATIQUES AU 20^E SIÈCLE 24

24

CONGRÈS DE BESSE-EN-CHANDESSE, JUILLET 1935



2 décembre 2016

D. AUBIN, MATHÉMATIQUES AU 20E SIÈCLE 25

25

MÉTHODE AXIOMATIQUE SELON BOURBAKI

« Aujourd'hui [...] l'essentiel de l'évolution des mathématiques a consisté en une systématisation des relations entre les diverses théories mathématiques et se résume à une tendance qui est généralement connue sous le nom de **méthode axiomatique**.

De même que la méthode expérimentale part de la croyance *a priori* en la permanence des lois naturelles, la méthode axiomatique trouve son point d'appui dans la conviction que, si les mathématiques ne sont pas un enchaînement de syllogismes se déroulant au hasard, elles ne sont pas davantage une collection d'artifices plus ou moins 'astucieux'. Là où l'observateur superficiel ne voit que deux ou plusieurs théories en apparence très distinctes [...], la méthode axiomatique enseigne [...] à trouver les idées communes enfouies sous l'appareil extérieur des détails... »

2 décembre 2016

D. AUBIN, MATHÉMATIQUES AU 20E SIÈCLE 26

26

« STRUCTURES MATHÉMATIQUES » SELON BOURBAKI

« Le trait commun des diverses notions désignées sous ce nom générique, est qu'elles s'appliquent à des ensembles d'éléments dont la nature **n'est pas spécifiée** ; pour définir une structure, on se donne une ou plusieurs relations, où interviennent ces éléments ; on postule ensuite que la ou les relations données satisfont à certaines conditions (qu'on énumère) et qui sont les **axiomes** de la structure envisagée. Faire la théorie axiomatique d'une structure donnée, c'est déduire les conséquences logiques des axiomes de la structure **en s'interdisant toute autre hypothèse** sur les éléments considérés (en particulier, toute hypothèse sur leur 'nature' propre). »

2 décembre 2016

D. AUBIN, MATHÉMATIQUES AU 20E SIÈCLE 27

27

LA DÉRAISONNABLE EFFICACITÉ DES MATHÉMATIQUES ?



Eugene P. Wigner
(1902 - 1995)

Texte du physicien théoricien **Eugene Wigner** (1948).

Chez **Bourbaki**:

« la mathématique apparaît en somme comme un réservoir de **formes** abstraites--les structures mathématiques; et il se trouve - sans que l'on sache bien pourquoi - que certains aspects de la réalité expérimentale viennent se mouler en certaines de ces formes, comme par une sorte de préadaptation. »

Est-ce bien si déraisonnable ? → le point de vue historique !

2 décembre 2016

D. AUBIN, MATHÉMATIQUES AU 20E SIÈCLE 28

28

3. GUERRES MONDIALES

13/01/2022

D. AUBIN, 2011 79

29

PREMIÈRE GUERRE MONDIALE (1914–1918)

Les quatre rôles joués par les mathématiciens :

- Soldats et combattants
- Mobilisation scientifique
- Organisation de la recherche
- Croisade culturelle



2 décembre 2016

30

PREMIÈRE GUERRE MONDIALE

Mobilisation des mathématiciens

- Balistique; Mécanique des fluides (aviation); Repérage par le son.

Travail en collaboration avec les militaires sur des projets précis avec financement important

Importance du calcul

Rôle politique (ex: Paul Painlevé).

Exclusion des mathématiciens allemands des congrès internationaux.



2 décembre 2016

D. AUBIN, MATHÉMATIQUES AU 20E SIÈCLE 31

31

JEAN PIGLOWSKI, 25 ANS EN 1914.

Étudiant de mathématiques à l'ENS de la rue d'Ulm.

Mort le 18 février 1915.



2 décembre 2016

D. AUBIN, MATHÉMATIQUES AU 20E SIÈCLE 32

32

CAMP D'ENTRAÎNEMENT DE MITRAILLEURS

De nombreux mathématiciens y sont affectés

2 décembre 2016 D. AUBIN, MATHÉMATIQUES AU 20E SIÈCLE 33

33

UNE GÉNÉRATION PERDUE?

Année de la promotion	Proportion (%)
1900	~500
1901	~500
1902	~500
1903	~500
1904	~500
1905	~500
1906	~500
1907	~500
1908	~500
1909	~500
1910	~500
1911	~500
1912	~500
1913	~500
1914	~6200
1915	~5200
1916	~3800
1917	~3800
1918	~2200

2 décembre 2016 D. AUBIN, MATHÉMATIQUES AU 20E SIÈCLE 34

34

REPÉRAGE PAR LE SON, AU BOIS DE BOULOGNE

Charles Nordmann (33 ans), le 17 novembre 1914

2 décembre 2016 D. AUBIN, MATHÉMATIQUES AU 20E SIÈCLE 35

35

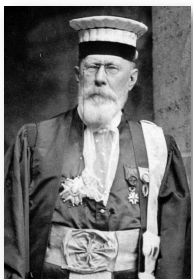
LE REPÉRAGE PAR LE SON

Mise en pratique de la science sur le front.

2 décembre 2016 D. AUBIN, MATHÉMATIQUES AU 20E SIÈCLE 36

36

PAUL APPELL, 59 ANS



« Que faut-il penser ? La Science, la Philosophie, la Religion ne sont-elles donc **des mots vides de sens, faux semblants hypocrites** ?... Ont-ils donc perdu toute leur peine, les hommes de pensée et les hommes d'action qui ont consacré un si long effort à substituer dans le monde le règne de la Justice au règne de la force brutale ? **Il faut répondre : Non, mille fois non !** »

Doyen de la Faculté des Sciences.

Président de l'Académie des Sciences.

Président de la Commission des inventions intéressant la défense nationale.

2 décembre 2016

D. AUBIN, MATHÉMATIQUES AU 20^E SIÈCLE 37

37

PAUL PAINLEVÉ, MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE ET DES INVENTIONS INTÉRESSANT LA DÉFENSE NATIONALE EN 1915.



2 décembre 2016

D. AUBIN, MATHÉMATIQUES AU 20^E SIÈCLE 38

38

ÉMILE BOREL, 43 ANS

Directeur de l'ENS.

Chef de cabinet de Painlevé, Direction des inventions intéressant la défense nationale.

91 20 projets examinés,
781 inventions développées.



2 décembre 2016

D. AUBIN, MATHÉMATIQUES AU 20^E SIÈCLE 39

39

DEUXIÈME GUERRE MONDIALE

Mobilisation encore plus massive et plus systématique.

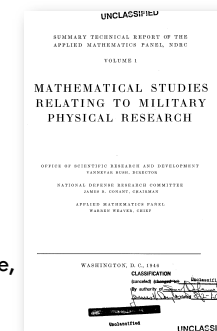
→ the Applied Mathematics Panel

▪ Bombe A; décryptage; radar; organisation de la production et des convois transatlantiques.

Invention de l'ordinateur ENIAC.

Recherche opérationnelle, programmation linéaire, cybernétique.

Calcul, analyse numérique, etc.



2 décembre 2016

D. AUBIN, MATHÉMATIQUES AU 20^E SIÈCLE 40


40

MATHÉMATIQUES APRÈS 1945 | Quelques lignes directrices


13/01/2022 D. AUBIN - LUTRA2009 41

41

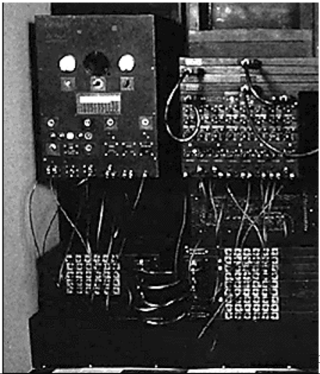
L'ENIAC
(Philadelphie 1946)



Prosper Eckert



John Mauchly



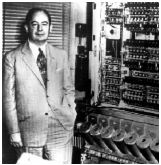
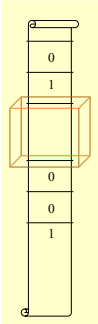
2 décembre DLE 42

42

« FIRST DRAFT OF A REPORT ON EDVAC » (J. VON NEUMANN, 1945)

Electronic Discrete Variable Automatic Computer
programme enregistré

Une machine universelle de Turing (1936)

2 décembre 2016 D. AUBIN, MATHÉMATIQUES AU 20E SIECLE 43

43

LES MATHÉMATIQUES DE LA GUERRE FROIDE, 1945-1989

Émergence des mathématiques appliquées comme champ de recherches autonome

Cybernétique, calcul numérique, recherche opérationnelle, théorie des jeux, théorie du contrôle, théorie de l'information, etc.

Mathématiques abstraites qui s'autonomisent encore plus: les dividendes de la guerre froide ?

PREPARED FOR:
UNITED STATES AIR FORCE PROJECT RAND

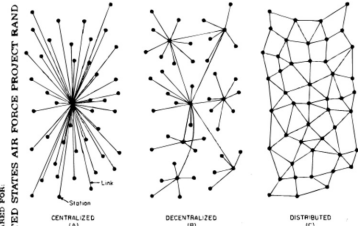


FIG. 1 - Centralized, Decentralized and Distributed Networks

The RAND Corporation
BETHESDA • CALIFORNIA

2 décembre 2016 D. AUBIN, MATHÉMATIQUES AU 20E SIECLE 44

44

LES MATHÉMATIQUES À L'ÈRE NUMÉRIQUE

Dans les mathématiques pures, l'impact de l'ordinateur sur le développement des mathématiques a été très lent à se faire sentir massivement

Le cas Steve Smale

- "If only conformists need apply [to NSF], 1984 is here already. What can Stephen Smale do that a computer can't do a lot faster? And besides, a computer wouldn't talk back." (*Washington Star* (November 9, 1967).



Steve Smale, né en 1930
Médaille Fields en 1966

2 décembre 2016

D. AUBIN, MATHÉMATIQUES AU 20^E SIÈCLE 45

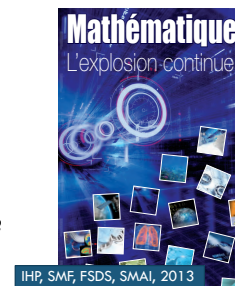
45

MATHÉMATIQUES À L'ÈRE NÉO-LIBÉRALE

Émergence de nouveaux domaines, comme les mathématiques financières, l'analyse de systèmes, les « big data », etc.

L'« explosion des mathématiques » (2002-2013)

Quelle place pour les mathématiques pures ?



IHP, SMF, FSDS, SMAI, 2013

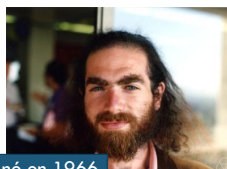
2 décembre 2016

D. AUBIN, MATHÉMATIQUES AU 20^E SIÈCLE 46

46

LES 7 PROBLÈMES DU MILLÉNAIRE

- Hypothèse de Riemann
- Conjecture de Poincaré (résolue par Perelman en 2003)
- Problème P = NP
- Conjecture de Hodge
- Conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer
- Équations de Navier-Stokes
- Équations de Yang-Mills



Gergori Perelman, né en 1966



Clay Mathematics Institute, fondé en 1998 par le l'homme d'affaire Landon T. Clay.

2 décembre 2016

D. AUBIN, MATHÉMATIQUES AU 20^E SIÈCLE 47

47

CONCLUSIONS GÉNÉRALES

L'expérience mathématique comme constante dans des situations diverses.

- Diversité des concepts, des pratiques et des applications
- Une certaine unité des problématiques

Quelques tournants marquants :

- Invention de la preuve chez les Grecs de l'Antiquité.
- Convergence des pratiques à la Renaissance → émergence de l'analyse.
- Profonde rupture au 19^e siècle → mathématiques structurales qui modifient le rapport avec le monde.
- Quel impact du numérique ?

2 décembre 2016

D. AUBIN, MATHÉMATIQUES AU 20^E SIÈCLE 48

48