

Cours 11

*Saisir les mathématiques
du XX^e siècle*



LU3MA209
ÉLÉMENTS D'HISTOIRE DES
MATHÉMATIQUES

2023-2024, 2^e période
David Aubin
david.aubin@sorbonne-universite.fr

2024 D. AUBIN - LU3MA209 1

1

PROGRAMME DES DEUX PROCHAINS COURS

1. Mathématiques au 20^e siècle: survol
2. Crise des fondements
3. Guerres mondiales
4. Mathématiques après 1945

2024 D. AUBIN - LU3MA209 2

2

1. MATHÉMATIQUES AU XX^E SIÈCLE

1. Big Science, big mathematics
2. Paris 1900: les problèmes de Hilbert

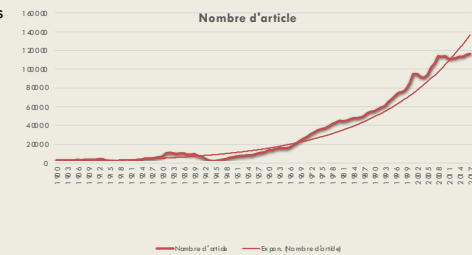
2024 D. AUBIN - LU3MA209 3

3

« BIG SCIENCE »; BIG MATHEMATICS ?

Env. 2000 mathématiciens actifs en 1950 ;
env. 110 000 aujourd'hui.

Croissance exponentielle du nombre d'articles publiés (double tous les 20 ans).



2024 D. AUBIN - LU3MA209 4

4

LES PROBLÈMES SÉCULAIRES

Théorie des parallèles

- Les géométries euclidiennes et non euclidiennes comme « conventions »
→ la topologie et la géométrie moderne.

Nature des nombres

- Les nombres réels, complexes, construits à partir des naturels.
→ l'algèbre moderne.

L'infini, les fondements de l'analyse

- Théorie des ensembles comme base de l'analyse des transfinis, etc.
→ l'analyse fonctionnelle.

Quelles nouvelles mathématiques ?

2024 D. AUBIN - LU3MA209 5

5

UN REGARD RÉTROSPECTIF

John Charles Fields Legacy Symposium, 7–9 juin 2000

Deux ères différentes:


- 1900–1950 : « spécialisation »
- 1950–2000 : « unification ».

Des tendances globales:

- Du local au global, du linéaire au non-linéaire, du commutatif au non-commutatif...
- L'influence de la physique

Des techniques en commun:

- homologie, K-théorie, groupes de Lie.



Sir Michael Atiyah (1929–2019)

Mathematics in the 20th Century¹

Michael Atiyah

If you talk about the end of one century and the beginning of the next you have two choices, both of them difficult. One is to survey the mathematics over the past hundred years; the other is to predict the mathematics of the next hundred years. I have chosen the more difficult task. Everybody can predict and we will not be around to find out whether we were wrong. But giving an impression of the past is something that everybody can disagree with.

2024 D. AUBIN - LU3MA209 6

6

EXPOSITION UNIVERSELLE DE 1900

Paris, ville Lumière,
vitrine de la modernité





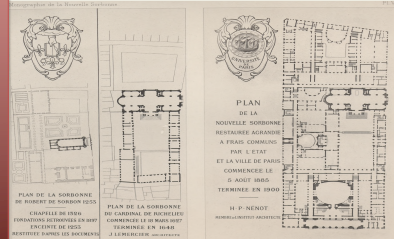
2024 D. AUBIN - LU3MA209 7

7

LA NOUVELLE SORBONNE 1895-1900

Tour d'astronomie (photo : François Trazzi)

En 1900 : trois amphithéâtres de 40, 60 et 120 places sous la tour d'astronomie.




« Il n'y a pas d'instituteur de village qui n'enseigne aujourd'hui dans une salle plus digne, plus saine, plus commode que l'amphithéâtre de mathématiques de la Sorbonne. Bas, obscur, humide, sale, cet amphithéâtre, où vingt personnes à peine peuvent s'asseoir sur des bancs étroits [...]. Mais, quel supplice pour l'auditoire, quand, au milieu de la démonstration la plus délicate à suivre, tout à coup le bruit de quelque voiture, les cris de la rue, les querelles des passants viennent dominer la voix du professeur ». (Agrandissement de la Sorbonne, 1847).

2024 D. AUBIN - LU3MA209 8

8

2^E CONGRÈS INTERNATIONAL DES MATHÉMATIENS, PARIS, 1900



Henri Poincaré (1854-1912)



David Hilbert (1862-1943)



Affiche du 1^{er} Congrès à Zurich en 1897

D. AUBIN - LU3MA209 9

9

POINCARÉ 1900

11 août – Congrès international des mathématiciens : « Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques ».

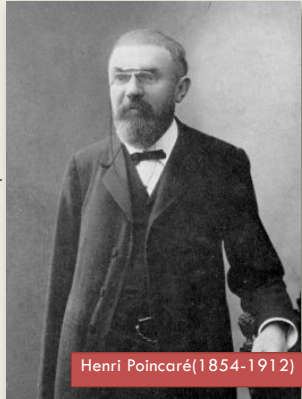
- Intuition pour la découverte (esprit géométrique) et logique pour la démonstration (esprit analytique).

Août – Congrès international de physique : « Sur les rapports de la physique expérimentale et de la physique mathématique »

- Expérience comme seule source de vérité et physique mathématique comme généralisation.

Août – Congrès de philosophie : « Sur les principes de la mécanique ».

Décembre – Séance des 5 Académies : « La Géodésie française »




Henri Poincaré (1854-1912)

D. AUBIN - LU3MA209 10

10

LES 23 PROBLÈMES DE HILBERT

Les dix premiers sont présentés oralement le 8 août 1900:



David Hilbert (1862-1943)

SUR LES

PROBLÈMES FUTURS DES MATHÉMATIQUES,

PAR M. DAVID HILBERT (Göttingen),

TRADUITE PAR M. L. LAUGEL (1).

Qui ne soulèverait volontiers le voile qui nous cache l'avenir afin de jeter un coup d'œil sur les progrès de notre Science et les secrets de son développement ultérieur durant les siècles futurs? Dans ce champ si fécond et si vaste de la Science mathématique, quels seront les buts particuliers que tenteront d'atteindre les guides de la

D. AUBIN - LU3MA209 11

11

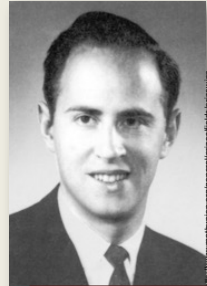
1^{ER} PROBLÈME DE HILBERT

Tout sous-ensemble infini des réels peut être mis en bijection avec l'ensemble des entiers naturels ou avec l'ensemble des réels lui-même.

L'hypothèse du continu de Georg Cantor.

1938 : la négation de l'hypothèse du continu est indémontrable dans la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel (Kurt Gödel)

1962 : l'hypothèse du continu n'est pas démontrable dans ZFC (Paul Cohen).



Paul J. Cohen (1934–2007), médaille Fields 1966

D. AUBIN - LU3MA209 12

12

2^E PROBLÈME DE HILBERT

Peut-on prouver la consistance de l'arithmétique ? En d'autres termes, peut-on démontrer que les axiomes de l'arithmétique ne sont pas contradictoires ?

1931: théorèmes d'incomplétude de Gödel.

1. Dans n'importe quelle théorie récursivement axiomatisable, cohérente et capable de « formaliser l'arithmétique », on peut construire un énoncé arithmétique qui ne peut être ni prouvé ni réfuté dans cette théorie.
2. Si T est une théorie cohérente qui satisfait des hypothèses analogues, la cohérence de T , qui peut s'exprimer dans la théorie T , n'est pas démontrable dans T .



Kurt Gödel (1906–1978)

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/42/Kurt_Godel.jpg

2024

D. AUBIN - LU3MA209 13

13

3^E PROBLÈME DE HILBERT

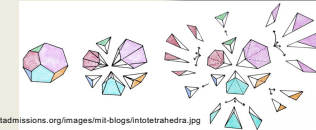
Étant donnés deux polyèdres d'égal volume, peut-on découper le premier polyèdre en des polyèdres et les rassembler pour former le second polyèdre ?

1902: Max Dehn prouve que non

- les invariants de Dehn
- Si P peut être découpé en P_1 et P_2 alors $D(P) = D(P_1) + D(P_2)$
- exemple du cube ($D=0$) et du tétraèdre ($D \neq 0$).



Max Dehn (1878–1952)



<http://mitadmissions.org/images/mit-blogs/intotetrahedra.jpg>

2024

D. AUBIN - LU3MA209 14

14

4^E PROBLÈME DE HILBERT

Définir toutes les géométries dont la plus courte distance entre deux points est un segment de droite.

Le développement de la géométrie différentielle (étude locale de la géométrie intrinsèque des espaces) a permis d'avancer sur cette question sans la résoudre.

2024

D. AUBIN - LU3MA209 15

15

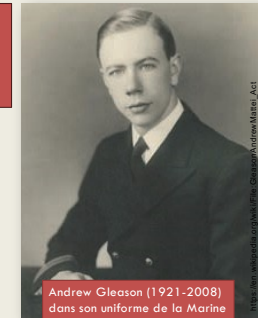
5^E PROBLÈME DE HILBERT

Démontrer que les groupes de Lie sont nécessairement différentiables.

Groupes de Lie: [Sophus Lie (1842-1899)]

- Une structure algébrique G est un groupe de Lie réel ou complexe lorsque :
 - G est une variété différentiable réelle ou complexe ;
 - G , munie de deux fonctions $G \times G \rightarrow G$ (multiplication) et $G \rightarrow G$ (inversion), est un groupe ;
 - les applications de multiplication et d'inversion sont différentiables.

1953 : théorème de Gleason.



Andrew Gleason (1921-2008) dans son uniforme de la Marine américaine pendant la 2^e Guerre Mondiale.

<https://www.flickr.com/photos/17804870@N00/10400000000/>

2024

D. AUBIN - LU3MA209 16

16

6^E PROBLÈME DE HILBERT

L'axiomatisation, fondée sur le modèle mathématique, de la physique.


???

2024 D. AUBIN - LU3MA209 17


17

7^E PROBLÈME DE HILBERT

Démontrer la transcendance des nombres a^b , avec a algébrique et b irrationnel (par exemple $2^{\sqrt{2}}$).



Aleksandr Gelfond
(1906-1968)



Theodor Schneider
(1911-1988)

Théorème de Gelfond-Schneider, 1929-1935

- Prouvé dans le cas où b est algébrique.
- Produit une infinité de nombres transcendants.

2024 D. AUBIN - LU3MA209 18

18

8^E PROBLÈME DE HILBERT

Démontrer l'hypothèse de Riemann.

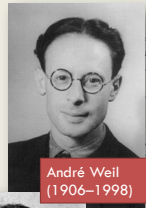
Hypothèse de Riemann :

- Formulée en 1859 par Bernhard Riemann (1826-1866).
- Les zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann ont tous pour partie réelle $1/2$.


$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Non résolue : malgré la conjecture de André Weil résolue par Pierre Deligne.

Un des grands problèmes ouverts des mathématiques. [problème Clay: 1 million de dollars].



André Weil
(1906-1998)



Pierre Deligne
(1944-)

2024 D. AUBIN - LU3MA209 19

19

PROBLÈMES DE HILBERT

9. Nombre de solutions d'une congruence quadratique dans un anneau d'entiers d'un corps algébrique (résolu 1921-1927).
10. Existe-t-il un algorithme universel permettant de conclure à l'existence de solutions d'une équation diophantienne ? (solution partielle)
11. Généraliser la classification des formes quadratiques à celles dont les coefficients sont choisis dans des anneaux d'entiers algébriques. (résolu par Siegel).
12. Généralisation d'un théorème de Kronecker portant sur les corps algébriques (solution partielle).
13. Existe-t-il des fonctions continues de 3 variables non superposables par des fonctions continues de deux variables ? (Non, par Kolmogorov et Arnold, 1954).

Etc...

2024 D. AUBIN - LU3MA209 20

20

2. CRISE DES FONDEMENTS

1. La fin des certitudes?
2. Axiomatique et structuralisme

2024 D. AUBIN - LU3MA209 21

21

CRISE DES FONDEMENTS

Rappel:

- Géométrie non euclidiennes, basées sur la géométrie euclidienne (Beltrami)
- Géométrie euclidienne basées sur l'arithmétique (Dedekind, Hilbert)
- Arithmétique basée sur la théorie des ensembles (Cantor, Zermelo-Fraenkel)
- Théorie des ensembles basée sur la logique (Russell, Whithead)

Théorèmes d'incomplétude de Gödel...



Kurt Gödel (1906–1978)

2024 D. AUBIN - LU3MA209 22

22

NICOLAS BOURBAKI


Groupe de mathématiciens fondé en 1934, tous français à l'origine.

- André Weil, Jean Dieudonné, Claude Chevalley, Henri Cartan, Laurent Schwartz, Jean-Pierre Serre...

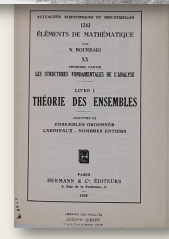
Auteur des *Éléments de mathématique*.

Exerce une influence profonde sur les mathématiques depuis les années 1950.

« L'architecture des mathématiques » (1948)



Congrès de Besse-en-Chandesse, juillet 1935



2024 D. AUBIN - LU3MA209 23

23

CONGRÈS DE BESSE-EN-CHANDESSE, JUILLET 1935



2024 D. AUBIN - LU3MA209 24

24

MÉTHODE AXIOMATIQUE SELON BOURBAKI



« Aujourd'hui [...] l'essentiel de l'évolution des mathématiques a consisté en une systématisation des relations entre les diverses théories mathématiques et se résume à une tendance qui est généralement connue sous le nom de **méthode axiomatique**.

De même que la méthode expérimentale part de la croyance *a priori* en la permanence des lois naturelles, la méthode axiomatique trouve son point d'appui dans la conviction que, si les mathématiques ne sont pas un enchaînement de syllogismes se déroulant au hasard, elles ne sont pas davantage une collection d'artifices plus ou moins "astucieux". Là où l'observateur superficiel ne voit que deux ou plusieurs théories en apparence très distinctes [...], la méthode axiomatique enseigne [...] à trouver les idées communes enfouies sous l'appareil extérieur des détails... »

2024

D. AUBIN - LU3MA209 25

25

« STRUCTURES MATHÉMATIQUES » SELON BOURBAKI

« Le trait commun des diverses notions désignées sous ce nom générique, est qu'elles s'appliquent à des ensembles d'éléments dont la nature **n'est pas spécifiée** ; pour définir une structure, on se donne une ou plusieurs relations, où interviennent ces éléments ; on postule ensuite que la ou les relations données satisfont à certaines conditions (qu'on énumère) et qui sont les **axiomes** de la structure envisagée. Faire la théorie axiomatique d'une structure donnée, c'est déduire les conséquences logiques des axiomes de la structure **en s'interdisant toute autre hypothèse** sur les éléments considérés (en particulier, toute hypothèse sur leur 'nature' propre). »

2024

D. AUBIN - LU3MA209 26

26

LA DÉRAISONNABLE EFFICACITÉ DES MATHÉMATIQUES ?



Eugene P. Wigner
(1902 – 1995)

Texte du physicien théoricien **Eugene Wigner** (1948).

Chez **Bourbaki** :

« la mathématique apparaît en somme comme un réservoir de **formes abstraites**--les structures mathématiques; et il se trouve - sans que l'on sache bien pourquoi - que certains aspects de la réalité expérimentale viennent se mouler en certaines de ces formes, comme par une sorte de préadaptation. »

Est-ce bien si déraisonnable ? → le point de vue historique !

2024

D. AUBIN - LU3MA209 27

27

3. GUERRES MONDIALES

2024

D. AUBIN - LU3MA209 28

28

PREMIÈRE GUERRE MONDIALE (1914–1918)

Les quatre rôles joués par les mathématiciens :

- Soldats et combattants
- Mobilisation scientifique
- Organisation de la recherche
- Croisade culturelle



2024

D. AUBIN - LU3MA209 29

29

PREMIÈRE GUERRE MONDIALE

Mobilisation des mathématiciens

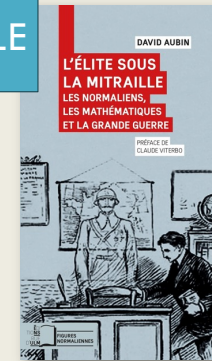
- Balistique; Mécanique des fluides (aviation); Repérage par le son.

Travail en collaboration avec les militaires sur des projets précis avec financement important

Importance du calcul

Rôle politique (ex: Paul Painlevé).

Exclusion des mathématiciens allemands des congrès internationaux.



2024

D. AUBIN - LU3MA209 30

30

JEAN PIGLOWSKI, 25 ANS EN 1914

Étudiant de mathématiques à l'ENS de la rue d'Ulm.

Mort le 18 février 1915.



2024

D. AUBIN - LU3MA209 31

31

CAMP D'ENTRAÎNEMENT DE MITRAILLEURS

De nombreux mathématiciens y sont affectés



2024

D. AUBIN - LU3MA209 32

32

UNE GÉNÉRATION PERDUE ?

Proportion des élèves de l'ENS qui sont disparus par année de promotion

Monument aux morts de l'ENS

2024 D. AUBIN - LU3MA209 33

33

REPÉRAGE PAR LE SON, AU BOIS DE BOULOGNE

Charles Nordmann (33 ans), le 17 novembre 1914

2024 D. AUBIN - LU3MA209 34

34

LE REPÉRAGE PAR LE SON

Mise en pratique de la science sur le front.

Un appareil de repérage par le son.

2024 D. AUBIN - LU3MA209 35

35

SAUVER LA SCIENCE ?

Paul Appell (1855–1930)

- Doyen de la Faculté des Sciences.
- Président de l'Académie des Sciences.
- Président de la Commission des inventions intéressant la défense nationale.

« Que faut-il penser ? La Science, la Philosophie, la Religion ne sont-elles donc que des mots vides de sens, faux semblants hypocrites ?... Ont-ils donc perdu toute leur peine, les hommes de pensée et les hommes d'action qui ont consacré un si long effort à substituer dans le monde le règne de la Justice au règne de la force brutale ? Il faut répondre : Non, mille fois non ! »

2024 D. AUBIN - LU3MA209 36

36

SCIENCES ET GOUVERNEMENT




Paul Painlevé, Ministre de l'Instruction publique et des inventions intéressant la défense nationale, et son cabinet en 1915.

2024 D. AUBIN - LU3MA209 37

37

DIRECTION DES INVENTIONS

La théorie moderne des fonctions
 Directeur de l'ENS.
 Chef de cabinet de Painlevé, Direction des inventions intéressant la défense nationale.
 9120 projets examinés,
 781 inventions développées.
 La théorie des jeux et les statistiques



Émile Borel (1871-1956)

2024 D. AUBIN - LU3MA209 38

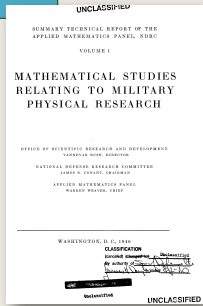
38

DEUXIÈME GUERRE MONDIALE

Mobilisation encore plus massive et plus systématique
 → the Applied Mathematics Panel aux USA

- Bombe A; décryptage; radar; organisation de la production et des convois transatlantiques.

Invention de l'ordinateur ENIAC.
 Recherche opérationnelle, programmation linéaire, cybernétique.
 Calcul, analyse numérique, etc.



2024 D. AUBIN - LU3MA209 39

39

MATHÉMATIQUES APRÈS 1945

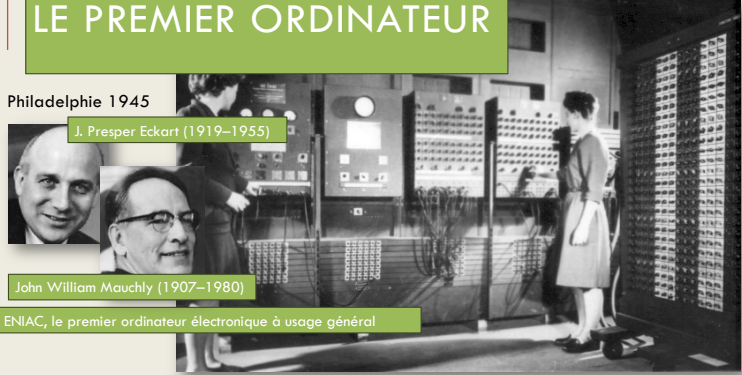
Quelques lignes directrices


2024 D. AUBIN - LU3MA209 40

40


LE PREMIER ORDINATEUR

Philadelphie 1945





J. Presper Eckart (1919-1955)



John William Mauchly (1907-1980)

ENIAC, le premier ordinateur électronique à usage général

2024 D. AUBIN - LU3MA209 41

41

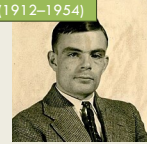
MACHINE DE TURING

La machine de Turing (1936)

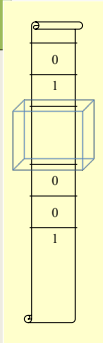
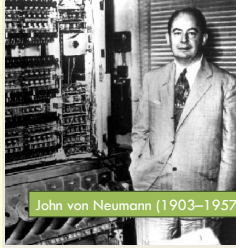
- Proposée dans le cadre de problèmes de logique du type: quels nombres sont calculables ?

Von Neumann (1945) : *First Draft of a Report on EDVAC* [Electronic Discrete Variable Automatic Computer].

- L'ordinateur est une machine universelle de Turing : instructions, données et résultats stockées sur le même ruban.



Alan Turing (1912-1954)

John von Neumann (1903-1957)

2024 D. AUBIN - LU3MA209 42

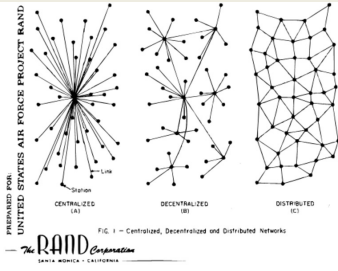
42

LES MATHÉMATIQUES DE LA GUERRE FROIDE, 1945-1989

Émergence des **mathématiques appliquées** comme champ de recherches autonome

Cybernétique, calcul numérique, recherche opérationnelle, théorie des jeux, théorie du contrôle, théorie de l'information, etc.

Mathématiques abstraites qui s'autonomisent encore plus : les dividendes de la guerre froide ?



2024 D. AUBIN - LU3MA209 43

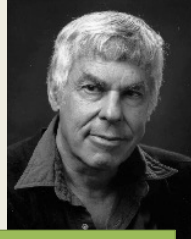
43

MATHÉMATIQUES À L'ÈRE NUMÉRIQUE

Dans les **mathématiques pures**, l'impact de l'ordinateur sur le développement des mathématiques a été très lent à se faire sentir massivement

Le cas Steve Smale

"If only conformists need apply [to NSF], 1984 is here already. What can Stephen Smale do that a computer can't do a lot faster? And besides, a computer wouldn't talk back." (*Washington Star* (November 9, 1967))



Steve Smale, né en 1930
Médaille Fields en 1966

2024 D. AUBIN - LU3MA209 44

44

MATHÉMATIQUES À L'ÈRE NÉO-LIBÉRALE

Émergence de nouveaux domaines, comme les mathématiques financières, l'analyse de systèmes, les « big data », l'« intelligence artificielle », etc.
L'« explosion des mathématiques » (2002 –2013)
Quelle place pour les mathématiques pures ?



IHP, SMF, FSDS, SMAI, 2013

2024

D. AUBIN - LU3MA209 45

45

LES 7 PROBLÈMES DU MILLÉNAIRE

- Hypothèse de Riemann
- Conjecture de Poincaré (résolue par Perelman en 2003)
- Problème P = NP
- Conjecture de Hodge
- Conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer
- Équations de Navier-Stokes
- Équations de Yang-Mills



Gergori Perelman, né en 1966

Clay Mathematics Institute, fondé en 1998 par le l'homme d'affaire Landon T. Clay.



2024

D. AUBIN - LU3MA209 46

46

CONCLUSIONS GÉNÉRALES

L'**expérience mathématique** comme constante dans des situations diverses.

- Diversité des concepts, des pratiques et des applications
- Une certaine unité des problématiques

Quelques tournants marquants :

- Invention de la preuve chez les Grecs de l'Antiquité.
- Convergence des pratiques à la Renaissance → émergence de l'analyse.
- Profonde rupture au 19^e siècle
→ mathématiques structurales qui modifient le rapport avec le monde.
- Quel impact du numérique ?

2024

D. AUBIN - LU3MA209 47

47