3H011
« Éléments d'Histoire des Mathématiques »
niveau L3

Automne 2017–2019

L'ENSEIGNANT : David Aubin

– *Examen final* –

9 janvier 2018, de 8h30 à 10h30, salle 24-34 107.

Enoncé des questions

Toute documentation interdite, à l'exception des notes manuscrites ou copie des notes de cours.

L'examen comporte deux parties ; vous devez répondre à toutes les questions de chacune des deux parties. L'examen sera corrigé sur un total de 20 points.

Partie 1 : La règle de L'Hôpital. [10 pts]

1) Vous trouverez en **annexe 1** l'énoncé et la preuve d'un théorème, un exemple d'application de celui-ci et la figure s'y rapportant. Ce théorème est énoncé par Guillaume de l'Hôpital dans son traité : *L'Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (Paris, 1696), p. 145-146. En vous référant à ce texte et aux connaissances acquises dans le cours, répondez aux questions suivantes :

    a. [2 pts] Considérez d'abord l'exemple donné et exprimez le problème en utilisant des notations modernes.
    b. [2 pts] Donnez un énoncé moderne de la règle de L'Hôpital et servez-vous en pour résoudre le problème.

2) Étudiez ensuite la preuve fournie par le marquis de L'Hôpital et expliquez les étapes suivantes :

    a. [2 pts] comment arrive-t-il à l'expression $PM = \dfrac{AB \times PN}{PO}$?
    b. [1 pt] comment arrive-t-il à l'expression de *bd* ?
    c. [1 pts] pourquoi écrit-il que cette expression de *bd* ne diffère pas de celle de *BD* ?
    d. [2 pts] comment interprétez-vous les deux phrases suivantes : « Or il est visible que la coupée […] l'on aura la valeur cherchée de l'appliquée *BD* ou *bd* » ?

Partie 2 : Le 5^{e} postulat d'Euclide et la sommes des angles du triangle. [10 pts]

3) Considérez le texte de Jules Hoüel en **annexe 2**, publié en 1867. Il s'agit d'une note consacrée au 5^{e} postulat d'Euclide (qu'il appelle *postulatum* ou axiome 11 dans la numérotation qu'il a proposée plus haut dans son texte).

   a. [4 pts] Commentez d'abord la démonstration du théorème I donné à la seconde page de l'extrait : « La somme des angles d'un triangle rectiligne ne peut pas surpasser deux droits ». Dans ce commentaire, vous aborderez notamment les points suivants : rigueur de la démonstration, dépendance du 5^{e} postulat, conséquences du théorème, etc.

   b. [6 pts] Discutez ensuite de l'opinion de Jules Hoüel à propos des géométries non euclidiennes et replacez-la dans son contexte historique.

Annexes

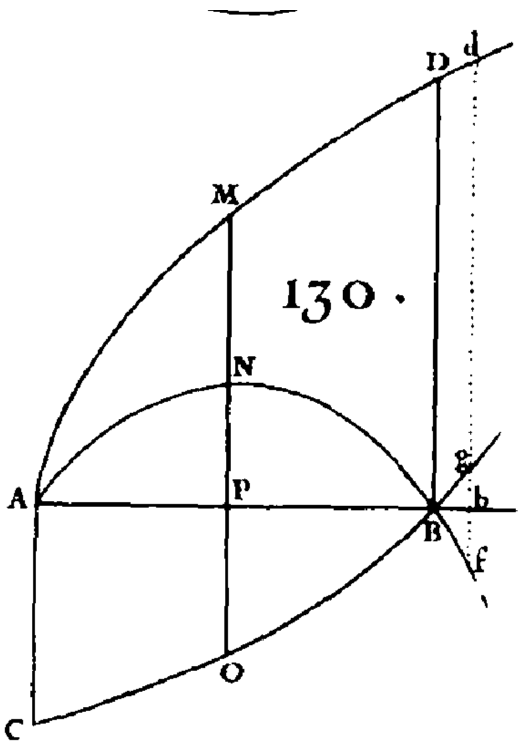
Annexe 1. Le texte et la figure ci-dessous sont tirés de Guillaume de l'Hôpital, *L'Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (Paris, 1696), p. 145-146. [**Commentaire** : à toute fin utile, on peut considérer que l'*appliquée* correspond à ce que nous appelons l'ordonnée et que la *coupée* correspond à ce que nous appelons l'abscisse].

163. SOIT *une ligne courbe* AMD (AP = x, PM = y, AB = a) *telle que la valeur de l'appliquée* y *ſoit exprimée par une fraction, dont le numérateur & le dénominateur deviennent chacun zero lorſque* x = a, *c'eſt-à-dire lorſque le point* P *tombe ſur le point donné* B. *On demande quelle doit être alors la valeur de l'appliquée* BD.

Soient entenduës deux lignes courbes *ANB*, *COB*, qui ayent pour axe commun la ligne *AB*, & qui ſoient telles que l'appliquée *PN* exprime le numérateur, & l'appliquée *PO* le dénominateur de la fraction générale qui convient à toutes les *PM* : de ſorte que $PM = \frac{AB \times PN}{PO}$. Il eſt clair que ces deux courbes ſe rencontreront au point *B*; puiſque par la ſuppoſition *PN* & *PO* deviennent chacune zero lorſque le point *P* tombe en *B*. Cela poſé, ſi l'on imagine une appliquée *bd* infiniment proche de *BD*, & qui rencontre les lignes courbes *ANB*, *COB* aux points *f*, *g*; l'on aura $bd = \frac{AB \times bf}{bg}$, laquelle * ne différe pas de *BD*. Il n'eſt donc queſtion que de trouver le rapport de *bg* à *bf*. Or il eſt viſible que la coupée *AP* devenant *AB*, les appliquées *PN*, *PO* deviennent nulles; & que *AP* devenant *Ab*, elles deviennent *bf*, *bg*. D'où il ſuit que ces appliquées, elles-mêmes *bf*, *bg*, ſont la différence des appliquées en *B* & *b* par rapport aux courbes *ANB*, *COB*; & partant que ſi l'on prend la différence du numérateur, & qu'on la diviſe par la différence du dénominateur, aprés avoir fait $x = a = Ab$ ou AB, l'on aura la valeur cherchée de l'appliquée bd ou BD. Ce qu'il falloit trouver.

EXEMPLE I.

164. SOIT $y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$. Il eſt clair que lorſque $x = a$, le numérateur & le dénominateur de la fraction deviennent égaux chacun à zero. C'eſt-pourquoy l'on prendra la différence $\frac{a^3dx - 2x^3dx}{\sqrt{2a^3x - x^4}} - \frac{aadx}{3\sqrt[3]{axx}}$ du numérateur, & on la diviſera par la différence $-\frac{3adx}{4\sqrt[4]{a^3x}}$ du dénominateur, aprés avoir fait $x = a$, c'eſt-à-dire qu'on diviſera $-\frac{4}{3}adx$ par $-\frac{3}{4}dx$; ce qui donne $\frac{16}{9}a$ pour la valeur cherchée de BD.



Annexe 1. Le texte et la figure ci-dessous sont tirés d'un livre de Jules Houël, *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire, ou commentaire sur les XXXII premières propositions d'Euclide* (Paris : Gauthier-Villars, 1871), p. 72-73.

Note VI.

Sur l'axiôme 11 (dit *postulatum*) d'Euclide.

Des recherches déjà anciennes, mais qui ont passé inaperçues jusqu'à ces derniers temps, ont mis hors de doute que la démonstration de l'axiôme 11 d'Euclide (notre axiôme IV) ne peut pas se déduire des axiômes précédents. Ces recherches ont été faites vers l'année 1829, par deux géomètres, Lobatschewsky et J. Bolyai (*), qui par des méthodes différentes et indépendamment l'un de l'autre, sont parvenus presqu'en même temps à retrouver les résultats que Gauss possédait déjà depuis près de quarante ans. Malheureusement ce grand mathématicien n'a jamais publié ses travaux sur ce sujet, et sans la publication récente de sa correspondance avec Schumacher, nous ignorerions encore l'existence des nouvelles théories qu'il a appuyées de son imposante autorité.

Je n'entrerai pas ici dans l'exposition complète de ces théories, que l'on trouvera développées avec détails dans la brochure de Lobatschewsky dont j'ai donné une traduction (**). Je me contenterai d'en faire connaître les points principaux, et d'indiquer sommairement ce que la *géométrie abstraite*, fondée sur la négation de l'axiôme 11, a de commun avec la *géométrie euclidienne* ou *expérimentale*, et en quoi elle s'en écarte.

La théorie des parallèles ne fait qu'un avec la proposition 32 d'Euclide sur la somme des angles d'un triangle rectiligne. Aussi plusieurs géomètres, au lieu d'essayer la démonstration directe de l'axiôme 11, ont fait porter leurs efforts sur la détermination de la somme des angles d'un triangle.

On peut d'abord établir, comme Legendre l'a fait (***), quelques propositions complémentaires des 28 premières propositions d'Euclide, et indépendantes comme elles de l'axiôme 11.

(*) Fils de W. Bolyai, dont nous avons cité les ouvrages, p. 60.

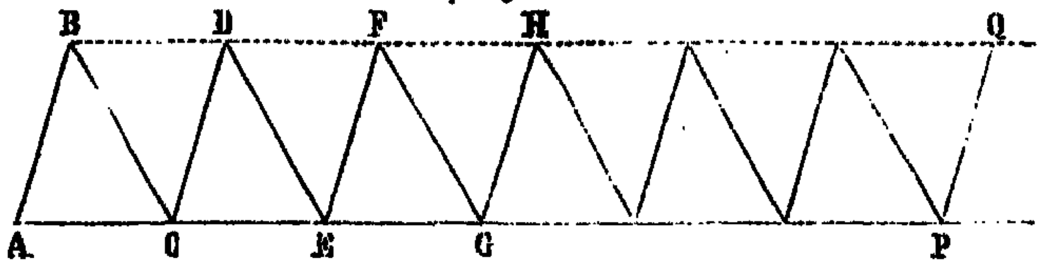
(**) *Etudes géométriques sur la théorie des parallèles*, par N. I. Lobatschewsky, suivi d'un extrait de la *Correspondance de Gauss et de Schumacher*. Paris, Gauthier-Villars, 1866.

(***) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. XII, p. 369.— *Eléments de géométrie*, 3e à 8e édition.— *Voyez* encore Lobatschewsky, *Etudes sur les parallèles*, nos 19 et 20.

I. *La somme des trois angles d'un triangle rectiligne ne peut pas surpasser deux angles droits.*

Désignons, pour abréger, par $\int ABC$ (*fig.* 44) la somme des trois angles du triangle ABC, et soit, s'il est possible, $\int ABC > 2$ dr. Sur

Fig. 44.



AC prolongé portons les longueurs $CE = EG = \ldots = AC$, et sur ces bases construisons les triangles DCE, FEG, ..., tous égaux à ABC.

L'angle BCD, supplément de la somme des angles ACB et $DCE = BAC$, sera, d'après l'hypothèse admise, $< ABC$. Donc [*Eucl.*, I, 24] $BD < AC$.

On voit d'ailleurs [*Eucl.*, I, 4] que tous les triangles BCD, DEF,... sont égaux entre eux. Donc $BD = DF = FH = \ldots$.

Soit maintenant δ la différence $AC - BD$. Si l'on construit n triangles consécutifs égaux à ABC, la différence entre la droite totale $AP = n.AC$ et la somme des droites $BD + DF + \ldots = n.BD$ sera $n\delta$; et, en prenant n assez grand, on pourra faire en sorte que $n\delta$ surpasse la longueur finie $AB + PQ = 2AB$.

Mais on aurait alors $AP - (BDF \ldots Q) > AB + PQ$, d'où il résulterait que le côté AP du polygone ABD ... QPA serait plus grand que la somme de tous les autres, ce qui est contraire aux corollaires de la proposition 20 du premier livre d'Euclide. [§ 24, p. 57].

Il est donc impossible qu'il existe un triangle rectiligne dont les angles aient une somme plus grande que deux angles droits.

[...]

Si donc on construit la surface qui est la limite d'une sphère passant par un point donné, et dont le rayon croît jusqu'à l'infini, les triangles tracés sur cette surface auront la somme de leurs angles égale à deux angles droits, et par conséquent toutes les conséquences qui découlent de l'axiôme 11 en géométrie plane sont vraies, dans l'hypothèse contraire, pour ces triangles tracés sur la *sphère-limite*. En particulier, on peut appliquer à ces triangles les formules de la trigonométrie rectiligne ordinaire, et en déduire ensuite les formules de la trigonométrie sphérique, qui se trouvent ainsi établies indépendamment de la théorie des parallèles (*).

Mais cette sphère-limite coïncide-t-elle avec un plan? Tout ce qu'on peut dire, c'est qu'elle n'en diffère pas sensiblement dans l'étendue accessible à nos mesures, les triangles rectilignes que nous connaissons ayant une somme d'angles que nous ne pouvons pas distinguer de 2 angles droits (**). Rien ne nous démontre cependant qu'il en soit de même pour des triangles rectilignes plus grands, et que la somme des angles de ces triangles ne finisse pas par être sensiblement moindre que 2 droits.

Il n'y a, en effet, aucune incompatibilité entre les premiers axiômes (nos axiômes I, II et III) et la supposition que la somme

droite, pouvaient toujours être placés sur une sphère, l'axiôme 11 serait démontré.

(*) Lagrange avait reconnu l'indépendance entre les formules de la trigonométrie sphérique et l'axiôme 11, et il croyait pouvoir tirer de là une démonstration de cet axiôme. Il considérait d'ailleurs toutes les autres tentatives de démonstration comme insuffisantes. C'est ainsi qu'il s'exprimait dans ses conversations avec M. Biot. (*Communiqué par M. Lefort.*)

(**) D'après les calculs de Lobatschewsky, les observations astronomiques indiquent que, pour un triangle dont les côtés seraient à peu près égaux à la distance de la Terre au Soleil, la somme des angles ne diffère pas de 2 dr. de 3 dix-millièmes de seconde.

des angles d'un triangle soit moindre que 2 angles droits. J. Bolyai et Lobatschewsky ont tiré les conséquences de cette supposition, sans jamais se trouver en contradiction avec la logique, mais seulement avec l'expérience, telle que nous la permettent nos moyens limités.

Si la somme des angles d'un triangle rectiligne est moindre que 2 droits, on peut alors mener, par un point donné, une infinité de droites différentes, qui ne rencontrent pas une droite donnée. Celle de ces droites qui s'approche le plus de la droite donnée est dite *parallèle* à cette droite. Deux droites parallèles sont asymptotes l'une de l'autre.

Il n'y a plus, dans cette hypothèse, de figures planes semblables. On ne peut plus partager par les procédés élémentaires une droite en trois parties égales, ni circonscrire un cercle à un triangle rectiligne quelconque. La somme des angles d'un triangle varie entre 2 angles droits et zéro, et peut diminuer indéfiniment, lorsqu'on fait croître les côtés à l'infini. L'angle d'un polygone régulier n'est plus constant, et diminue indéfiniment, lorsqu'on fait croître le côté du polygone jusqu'à l'infini.

Au contraire, la somme des angles d'un triangle rectiligne infiniment petit tend vers 2 angles droits, comme celle des angles d'un triangle sphérique infiniment petit.

Les formules de la trigonométrie rectiligne relatives à l'hypothèse où l'on rejette l'axiôme 11 présentent une grande analogie avec celles de la trigonométrie sphérique; elles s'en déduiraient en attribuant aux côtés du triangle sphérique des valeurs imaginaires.

Lobatschewsky a fait voir (*) que l'on pourrait construire sur cette hypothèse un système complet de géométrie, à laquelle il a donné le nom de *Géométrie imaginaire*, nom qu'il serait plus convenable de remplacer par celui de *Géométrie abstraite*. Les expressions des éléments différentiels des lignes courbes, des surfaces et des volumes sont les mêmes que dans la *Géométrie réelle* ou *expérimentale*.

En résumé, l'expérience ne nous ayant montré aucun triangle rectiligne, si grand qu'il soit, dont la somme des angles soit moindre que deux angles droits, la géométrie d'Euclide est certainement vraie, au moins dans les limites de nos observations. Aussi suffira-t-elle toujours dans la pratique, et l'étude de la *Géométrie abstraite* n'offrira jamais d'intérêt qu'au point de vue philosophique, où elle acquiert, au contraire, une importance capitale.