LM300
« Histoire des Mathématiques »
niveau L3

Printemps 2013–2014

L'ENSEIGNANT : David Aubin

– Examen partiel –

5 mars 2013, de 16h00 à 18h00, salle 13-14 101.

Enoncé des questions

Toute documentation interdite, à l'exception des notes manuscrites.

L'examen comporte trois parties ; vous devez répondre à toutes les questions de chacune des trois parties.
L'examen sera corrigé sur un total de 20 points [avec 3 points en bonus].

Exercices au sujet de la vie et de l'œuvre mathématique de Héron d'Alexandrie

Partie 1 : [5 points]
Situer Héron d'Alexandrie dans l'histoire des mathématiques anciennes.

Dans cette partie, il vous est demandé de faire appel à ce que vous aurez appris sur l'histoire des mathématiques anciennes pour situer la vie et l'œuvre de Héron d'Alexandrie dans son contexte :

1) [1 pt] On connaît peu de chose de la vie d'Héron, sauf qu'il est originaire d'Alexandrie.
    - Que pouvez-vous dire au sujet de la place de cette ville dans l'histoire des mathématiques grecques anciennes ?
    - Citer au moins un nom de mathématicien ayant exercé dans cette ville.

2) [1 pt] Héron ne citant aucun mathématicien postérieur à Archimède, il a longtemps été considéré comme ayant vécu peu après ce dernier : sauriez-vous déterminer cette période ?

3) [1 pt] En fait, on sait aujourd'hui que Héron a vécu au 1er siècle après Jésus-Christ (notamment à cause d'une éclipse qu'il aurait observé en 62 après J.-C.). Quel autre mathématicien et astronome célèbre est donc à peu près contemporain de Héron ?

4) [1 pt] Héron est l'auteur de plusieurs textes connus, comme les *Pneumatiques* (qui décrit des machines à vapeurs), les *Automates*, les *Mécaniques*, les *Dioptres* (sur un instrument optique de mesure) ou encore deux traités d'artillerie appelés *Belopoieca* et *Cheiroballistra*. Indiquez brièvement comment, de manière générale, le texte des ouvrages mathématiques des Grecs de l'Antiquité sont parvenus jusqu'à nous ?

5) [1 pt] Reportez-vous à l'extrait des *Pneumatiques* reproduit en annexe 1. Que pouvez-vous dire à son sujet ? (indiquez par exemple la langue dans lequel il semble être écrit, caractéristiques et rôle des diagrammes, etc.).

Partie 2 : La formule de Héron [8+2 points]

Vous vous rappellerez peut-être que formule de Héron permet de calculer l'aire d'un triangle lorque l'on connaît la longueur de ses côtés. Si on note a, b et c la longueur de chacun de ces côté, et le demi-périmètre par $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, alors on a que l'aire du triangle peut s'exprimer ainsi :

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

On trouvera en annexe 2 la démonstration de Héron.

1) [2 pts] Indiquez comment on peut facilement démontrer la formule de Héron à l'aide du théorème d'Al-Kashi. Rappelons que :
   a. le théorème d'Al-Kashi s'énonce $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, où γ est l'angle opposé au côté de longueur c,
   b. et la formule connue pour l'aire du triangle $A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

[**ATTENTION**, cette première question est indépendante des suivantes. Si vous n'arrivez pas à la résoudre, passez immédiatement aux questions suivantes.]

2) [1 pt] Commentez la structure de la preuve donnée par Héron.
   a. Identifiez dans cette preuve, s'ils s'y trouvent, les paragraphes numérotés correspondant aux parties suivantes : énoncé, exposition, détermination, construction, démonstration, conclusion.
   b. Quelle partie du texte de Héron est, par contre, complètement absente des démonstrations euclidiennes ? Comment expliquez-vous cela ?

3) [1 pt] La première chose démontrée par Héron est que l'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit entre le périmètre et le rayon du cercle inscrit dans le triangle. Démontrez cela, soit par vos propres moyens, soit en suivant le raisonnement de Héron.

4) [2 pts] Expliquez pourquoi il est dit (paragraphe 6) que GC est la moitié du périmètre. [ATTENTION, cette partie n'est pas évidente ; si vous n'y arrivez pas, sauter cette question. Les points attribués ici sont en bonus]

5) [1 pt] Au paragraphe 7, Héron dit que G, H, B et L sont sur le même cercle. Expliquez pourquoi et trouvez sur la figure un diamètre du cercle en question.

6) [2 pts] Au paragraphe 9, la notation « AB : CD :: EF : GH » signifie « AB est à CD comme EF est à GH ».
   a. Comment s'appelle cette relation mathématique chez Euclide ? Comment l'exprimer en termes modernes ?
   b. Commentez les diverses étapes de la démonstration du paragraphe 9.
      Vous devez parvenir à expliquer que :

$$\frac{CG^2}{GC\times BC} = \frac{GE\times EB}{HE^2}$$

7) [1 pt] Une fois ce résultat obtenu, expliquer comment on peut déduire la formule de Héron donnée plus haut et pourquoi la démonstration est terminée.

Partie 3 : La duplication du cube selon Héron d'Alexandrie [total : 5+1 pts]

Vous trouverez en annexe 3 le texte d'une proposition et sa construction, telle qu'on peut les trouver dans *Belopeica* de Héron d'Alexandrie. Utilisez-le pour répondre aux questions suivantes :

1) [1 pt] Expliquez, en termes mathématiques modernes, comment on peut résoudre le problème de la duplication du cube à l'aide des moyennes proportionnelles.
2) [1 pt] En géométrie grecque (euclidienne), qu'entend-on par un problème résoluble « à la règle et au compas » ?
3) [1 pt] Héron dit dans un autre texte (les *Métriques*) que ce problème est solide ; que veut-il dire par là ? Cette démonstration permet-elle de l'établir ?
4) [2 pts] Faites un commentaire détaillé de la démonstrations de Héron.
   [1 pt bonus] Soulignez bien pourquoi cette problème n'est pas résolu « à la règle et au compas ».

ANNEXE 1 : Les *Pneumatiques*.

Source : Extrait d'un manuscrit de Héron d'Alexandie, les *Pneumatiques*, conservé au British Museum (Harley MS 5605, ff 3-50) :

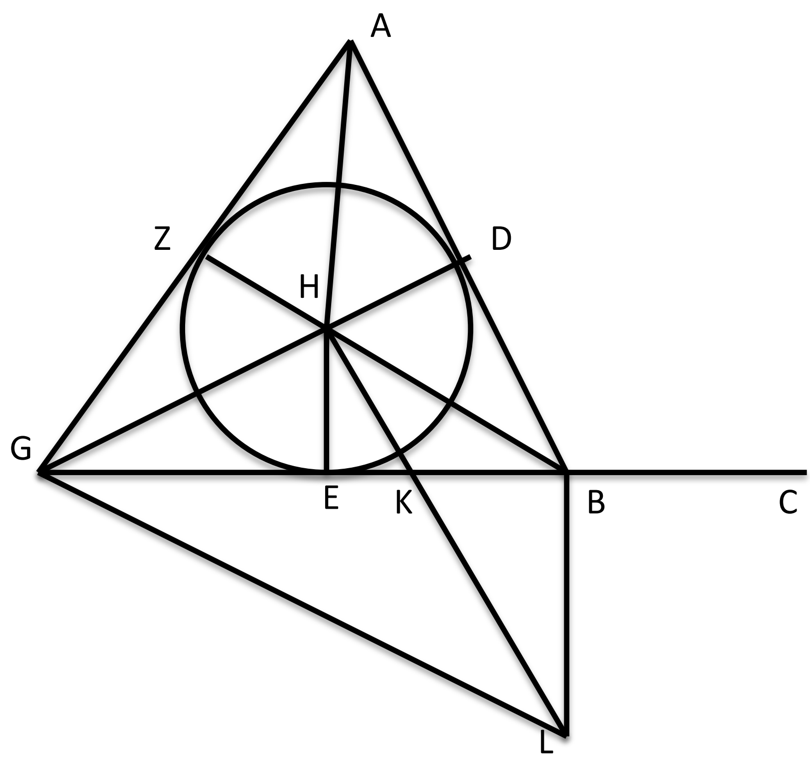

λόμεθα ῥεῖν. πάλιν ὁμοίως καταλαμβανόμεθα, καὶ τοῦτο ποιοῦ-
μεν, ἄχρις ἂν πᾶν κενωθῇ. ἔξεστι δὲ τῷ αὐτῷ τρόπῳ ἐν τοῦ αὐτοῦ,
καὶ οἶνον καὶ θερμὸν καὶ ψυχρὸν καὶ ἄλλο τι, ὃ ἐὰν προαιρώμεθα
ἀναλαμβάνειν τε καὶ προΐεσθαι ὁπόσον ἂν καὶ ὅτε ἂν προαιρώ-
μεθα. πλειόνων γενομένων τῶν διαφραγμάτων καὶ τῶν στομίων, διότι
εἰς ἑκάστην χώραν ὁ ἀὴρ παρεισπίπτει, καὶ πάλιν ἐξελαύνεται.

ANNEXE 2 : Les *Dioptres*.

Source : A. J. H. Vincent, « Extraits des manuscrits relatifs à la géométrie pratique des Grecs 1° Traité de la Dioptre par Héron d'Alexandrie […] », in *Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque impériales et autres bibliothèques*, tome 19 (1858), p.157 et suivantes ; extrait p. 287-289. On a numéroté les paragraphes.

« [1] *Etant donnés les côtés d'un triangle, en trouver l'aire.*

[2] On peut, il est vrai, en menant une perpendiculaire [d'un sommet au côté opposé] et mesurant sa longueur, trouver l'aire du triangle. Mais on propose de mesurer l'aire sans connaître la hauteur.



[3] Soit ABG le triangle proposé; et soit donné chacun de ses côtés : on demande d'en trouver l'aire.

[4] Inscrivons dans le triangle donné le cercle DEZ dont le centre est H, et menons HA, HB, HG, HD, HE, HZ.

[5] Le produit BG × HE sera le double du triangle BHG; AB × HD sera le double du triangle AHB; et enfin AG × HZ sera le double du triangle AHG. Donc le produit du périmètre du triangle ABG par le rayon HE du cercle DEZ est double du triangle ABG.

[6] Prolongeons GB et prenons BC = AD; GC sera la moitié du périmètre. Donc le produit GC × HE (ou la racine carrée du produit $GC^2 \times HE^2$) sera l'aire du triangle.

[7] Menons HKL perpendiculaire à HG, puis BL perpendiculaire à BG, et joignons GL. Puisque chacun des deux angles GHL, GBL, est droit, les points G, H, B, L, sont tous quatre sur une

même circonférence de cercle; et les angles GHB, GLB, forment une somme égale à deux droits.

[8] Donc, en raison de ce que les droites HA, HB, HG, divisent en deux parties égales les trois angles formés autour du point H [par les rayons du cercle inscrit], l'angle AHD est égal à l'angle GLB; et le triangle HAD semblable au triangle GLB.

[9] On a donc GB : BL :: AD : DH, ou :: BC : HE; *alternando*, GB : BC :: BL : HE, ou :: BK : KE; et *componendo*, GC : BC :: EB : EK. De sorte que l'on aura encore GC^2 : GC × BC :: GE × EB : GE × EK ou HE^2.

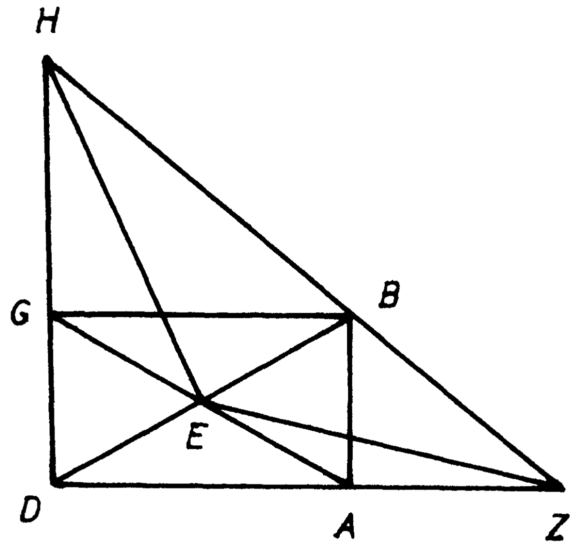
[10] D'où il suit que le produit GC × BC × GE x EB est égal à $GC^2 \times HE^2$, dont la racine carrée mesure l'aire du triangle. Or les quatre droites qui forment ce produit sont connues : en effet, GC est la moitié du périmètre; BC est l'excès de ce demi-périmètre sur le côté BG; GE, l'excès du même périmètre sur le côté AB; et enfin EB est l'excès sur le côté AC. Donc, en résumé, l'aire du triangle est donnée.

[11] Prenons un exemple : Soit AB= 13, BG= 14, GA= 15. Ajoutons les côtés : on a 42, dont la moitié est 21. Retranchons 13, il reste 8; puis 14, il reste 7; puis 15, il reste 6. Multipliant entre eux ces quatre nombres 21, 8, 7, 6, on a 7.056, dont la racine carrée est 84. Donc l'aire du triangle est 84. »

ANNEXE 3 : *Belopoieca*.

<u>Source</u> : Héron d'Alexandrie, *Belopoeica*. Adaptation française du texte publié in Wilbur Richrad Knorr, *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry*, Birkhäuser, Boston, 1989, p. 13.

> « Comment l'on doit trouver, pour deux droites données, deux moyennes proportionnelles, nous le dirons dans ce qui suit.
>
> Soient AB, BG deux droites données perpendiculaires, dont on doit trouver les deux moyennes proportionnelles. Complétons le le parallelogramme ABGD. Joignons les droites AG, BD et prolongeons les droites DG, DA.



> Et plaçons une règle au point B, qui coupe les droites qu'on aura prolongées. Faisons tourner la règle autour du point B jusqu'à ce que les droites joignant le point E [= le point d'intersection des diagonales du rectangle ABGD] aux sections soient égales l'un à l'autre. [Sur le schéma, nous dirons que] la règle se trouve à la place de la droite ZBH et que les deux droites égales sont EZ, EH.
>
> Je dis que des droite AB, BG, les moyenes prooportionnelles sont AZ, GH ; la première étant AB, la seconde sera AZ, la troisième GH, et la quatrième BG. »