LM300
« Histoire des Mathématiques »
niveau L3

Printemps 2013–2014

L'ENSEIGNANT : David Aubin

– Examen partiel –

5 mars 2013, de 16h00 à 18h00, salle 13-14 101.

Corrigé

Exercices au sujet de la vie et de l'œuvre mathématique de Héron d'Alexandrie

Partie 1 : [5 points]
Situer Héron d'Alexandrie dans l'histoire des mathématiques anciennes.

Dans cette partie, il vous est demandé de faire appel à ce que vous aurez appris sur l'histoire des mathématiques anciennes pour situer la vie et l'œuvre de Héron d'Alexandrie dans son contexte :

1) [1 pt] On connaît peu de chose de la vie d'Héron, sauf qu'il est originaire d'Alexandrie.
   - Que pouvez-vous dire au sujet de la place de cette ville dans l'histoire des mathématiques grecques anciennes ?
   - Citer au moins un nom de mathématicien ayant exercé dans cette ville.

Fondée au 4^{e} siècle avant Jésus-Christ en Egypte par Alexandre le Grand, Alexandrie est la capitale de la dynastie des Ptolémées, issu de généraux d'Alexandre et dont le dernier représentant sera la célèbre Cléopâtre. Cette ville grecque en terre égyptienne est conçue dès l'origine comme devant refléter la supériorité de la civilisation grecque. La bibliothèque et le Musée y sont établis par Ptolémée pour y favoriser la diffusion des connaissances. Comme à Athènes, les mathématiques y occupent une place significative.

On connaît plusieurs mathématiciens y ayant exercé : outre Héron, déjà mentionné, Euclide et Eratosthène sont les plus célèbres (3^{e} siècle avant Jésus-Christ). Aux 1^{er} et 2^{e} siècles après Jésus-Christ, le plus célèbre astronome de l'Antiquité, aussi appelé Ptolémée, y écrirar *l'Almageste*. Au 4^{e} siècle, avant de sombrer dans un long déclin intellectuel, Alexandrie accueillera Théon et sa fille Hypathie.

2) [1 pt] Héron ne citant aucun mathématicien postérieur à Archimède, il a longtemps été considéré comme ayant vécu peu après ce dernier : sauriez-vous déterminer cette période ?

Comme pour presque tous les mathématiciens de l'Antiquité, les dates d'Archimède ne sont pas connues avec précision. On sait cependant qu'il est mort pendant le siège de Syracuse par les Romains vers 212 av. J.-C. On estime habituellement qu'il serait né vers 287. Il a lui-même séjourné à Alexandrie, mais on pense qu'il n'a pas eu l'occasion de rencontrer Euclide.

3) [1 pt] En fait, on sait aujourd'hui que Héron a vécu au 1^{er} siècle après Jésus-Christ (notamment à cause d'une éclipse qu'il aurait observé en 62 après J.-C.). Quel autre mathématicien et astronome célèbre est donc à peu près contemporain de Héron ?

Claude Ptolémée (environ 90 à 170).

4) [1 pt] Héron est l'auteur de plusieurs textes connus, comme les *Pneumatiques* (qui décrit des machines à vapeurs), les *Automates*, les *Mécaniques*, les *Dioptres* (sur un instrument optique de mesure) ou encore deux traités d'artillerie appelés *Belopoieca* et *Cheiroballistra*. Indiquez brièvement comment, de manière générale, le texte des ouvrages mathématiques des Grecs de l'Antiquité sont parvenus jusqu'à nous ?

Les textes des mathématiciens de l'Antiquité, lorsqu'ils sont complets (ou qu'on peut présumer qu'ils le sont), sont parvenus jusqu'à nous d'abord par l'intermédiaire de multiples copistes. Certains copistes ont pu jouer un rôle plus important que d'autres en établissant des éditions qui ont fait autorité par la suite. C'est le cas de Théon pour Euclide, par exemple.

Les premiers traités étaient écrits sur payrus, qui est un matériau fragile, qui n'a pu survivre que par petits fragments. Le papier et le parchemin apparaissent au cours du Moyen-Âge. Certaines copies faites à partir du 9^e ou 10^e siècle, en grec ou arabe, ont donc pu être préservées. A la Renaissance, les humanistes européens ont cherché à reconstituer le textes de plusieurs traités de mathématiques, mais leurs sources n'étaient pas toujours fiables. Au cours des 19^e et 20^e siècles, des historiens et philologistes ont établis, à partir de l'ensemble des sources aujourd'hui disponible, ce qu'ils pensent être le texte le plus proche de l'original possible, mais des incertitudes demeurent.

Notons aussi que certains textes ont pu être reconstitués à partir de fragments cités et et commentés par d'autres auteurs… lorsque le texte de ces auteurs ont aussi été recopiés, bien entendu.

5) [1 pt] Reportez-vous à l'extrait des *Pneumatiques* reproduit en annexe 1. Que pouvez-vous dire à son sujet ? (indiquez par exemple la langue dans lequel il semble être écrit, caractéristiques et rôle des diagrammes, etc.).

Plusieurs choses peuvent être dites à propos de cet extrait. Notons simplement qu'il s'agit bien d'un texte écrit en grec. C'est certainement une rédaction tardive, car tout est en minuscule, qu'il y a des accents et que les mots sont bien séparés. On ne remarque pas de commentaires marginaux.
Les figures sont dessinées avec soin dans le texte même. Même si elles semblent représenter des objets concrets (des bouteilles remplies d'eau, de vapeur, de billes ?) , elles comportent des éléments identifiés par des lettres comme dans les traité de géométrie.

Partie 2 : La formule de Héron [8+2 points]

Vous vous rappellerez peut-être que formule de Héron permet de calculer l'aire d'un triangle lorque l'on connaît la longueur de ses côtés. Si on note a, b et c la longueur de chacun de ces côté, et le demi-périmètre par $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$, alors on a que l'aire du triangle peut s'exprimer ainsi :

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

On trouvera en annexe 2 la démonstration de Héron.

1) [2 pts] Indiquez comment on peut facilement démontrer la formule de Héron à l'aide du théorème d'Al-Kashi. Rappelons que :
    a. le théorème d'Al-Kashi s'énonce $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, où γ est l'angle opposé au côté de longueur c,
    b. et la formule connue pour l'aire du triangle $A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

Il suffira de combiner ces deux expressions et de réarranger les termes :

$$A = \frac{1}{2}ab\sqrt{1-\cos^2\gamma}$$

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 - \frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)^2}$$

Pour prouver la formule de Héron, il suffit donc de montrer que les deux expressions suivantes sont égales :

$$16\,[s(s-a)(s-b)(s-c)] = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

et

$$4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2 = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4.$$

Pour prouver que ces deux expressions sont bien égales, il suffit de remarquer que, si développe le produit ci-haut :
- les coefficients des termes de degré 4 sont les bons (-1).
- les coefficients des termes quadratiques sont aussi corrects (2 dans tous les cas).
- les coefficients de termes impliquant une puissance impaire de a, b ou c s'annulent tous : par exemple, on aura : $-a^3b - a^3b + (-a^3)(-b) + a^3b$=0 ; …

2) [1 pt] Commentez la structure de la preuve donnée par Héron.
    a. Identifiez dans cette preuve, s'ils s'y trouvent, les paragraphes numérotés correspondant aux parties suivantes : énoncé, exposition, détermination, construction, démonstration, conclusion.

b. Quelle partie du texte de Héron est, par contre, complètement absente des démonstrations euclidiennes ? Comment expliquez-vous cela ?

a)
Enoncé : §1
Exposition et détermination : §3.
Construction : §4
Démonstration : §§5, 6, 7, 8, 9 et 10. (on peut noter que la démonstration implique un certain nombre de constructions intermédiaires, dans les §6 et 7 en particulier.
Conclusion : dernière phrase du §10.

b)
Ce qui est complètement absent d'Euclide est le paragraphe 11, l'exemple numérique. On peut supposer que cet exemple apparaît ici car Héron s'intéresse beaucoup plus qu'Euclide à la géométrie pratique et à la mécanique.

3) [1 pt] La première chose démontrée par Héron est que l'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit entre le périmètre et le rayon du cercle inscrit dans le triangle. Démontrez cela, soit par vos propres moyens, soit en suivant le raisonnement de Héron.

Sur la figure, on peut voir que l'aire du triangle AGB est égale à la somme de l'aire des trois triangles AHB, GHB et AHG. Pour chacun d'entre haut, la formule $\frac{1}{2}$ base × hauteur donnera que l'aire est égale au segment du triangle initial (par ex. AB) multiplié par le rayon du cercle qui est égal à la hauteur. (Pour se convaincre que le rayon du cercle est bien la hauteur, il suffit de remarquer que l'angle entre le rayon d'un cercle et sa tangente en ce point est droit.) On a donc le résultat demandé, puisque l'aire du triangle ABG est égale à $\frac{1}{2}$ (AB+BG+AG) que multiplie le rayon du cercle inscrit.

4) [2 pts] Expliquez pourquoi il est dit (paragraphe 6) que GC est la moitié du périmètre. [ATTENTION, cette partie n'est pas évidente ; si vous n'y arrivez pas, sauter cette question. Les points attribués ici sont en bonus]

C'est le cas car on peut prouver que : AD=AZ ; GZ=GE ; et BD=BE. Si on a ce résultat, la conclusion est évidente puisque le demi-périmètre sera égal à GZ+BZ+AD, mais comme AD=BC alors la conclusion s'impose.

Prouvons donc que AD=AZ (les autres cas sont similaires). Notons d'abord que AH est bissectrice de l'angle ZAD, car le segment AH est à égale distance des côtés (H est centre du cercle). Ceci implique que les angles ZAH et HAD sont égaux, d'où l'on peut conclure que les triangles rectangles ZAH et HAD sont égaux (mêmes angles et un côté, l'hypothénuse en commun). Donc AD est bien égal à AZ.

5) [1 pt] Au paragraphe 7, Héron dit que G, H, B et L sont sur le même cercle. Expliquez pourquoi et trouvez sur la figure un diamètre du cercle en question.

Cela se démontre en se servant du théorème qui dit qu'un triangle rectangle peut être inscrit dans un carcle ayant pour diamètre l'hypothénuse du rectangle. Dans notre cas, les triangles GHL et GBL sont rectangles par construction et partagent une même hypothénuse GL ; les points G, H, G, et L sont donc sur le même cercle.

6) [2 pts] Au paragraphe 9, la notation « AB : CD :: EF : GH » signifie « AB est à CD comme EF est à GH ».
    a. Comment s'appelle cette relation mathématique chez Euclide ? Comment l'exprimer en termes modernes ?
    b. Commentez les diverses étapes de la démonstration du paragraphe 9.
    Vous devez parvenir à expliquer que :

$$\frac{CG^2}{GC \times BC} = \frac{GE \times EB}{HE^2}$$

a) cette relation est une identité de raisons qu'Euclide appelle une proportion. On l'exprime aujourd'hui par des rapports (ou des fractions).
b) Pour prouver les étapes du paragrephe, il est plus simple de transfromer tout cela en des rapports exprimés sous formes de fractions :

$$\frac{GB}{BL} = \frac{AD}{DH} = \frac{BC}{HE}$$

car les triangles GBL et ADH sont semblables, et que AD=BC (par construction) et DH=HE (rayon du cercle inscrit).

En intervertissant le numérateur BC et le dénominateur BL, on peut donc réécrire l'égalité sous la forme :

$$\frac{GB}{BC} = \frac{BL}{HE} = \frac{BK}{KE}$$

Le dernière égalité provient d'une application du théorème de Thalès, puisque les triangles EHK et BHL sont semblables.

Puisque GC=GB+BC et que EB=BK+EK, on a bien :

$$\frac{GC}{BC} = \frac{EB}{EK}.$$

(C'est une conséquence triaviale du fait que si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.)

De là on tire évidemment (en multipliant de chaque côté par 1, GC/GC à gauche et GE/GE à droite) la dernière relation :

$$\frac{GC^2}{GC \times BC} = \frac{GE \times BE}{GE \times EK} = \frac{GE \times BE}{HE^2}.$$

L'égalité $GE \times EK = HE^2$ provient de la propriété bien connue des triangles rectangles (pour trouver la moyenne proportionelle).

7) [1 pt] Une fois ce résultat obtenu, expliquer comment on peut déduire la formule de Héron donnée plus haut et pourquoi la démonstration est terminée.

Le résultat est maintenant presque trivial, puisque on a bien que :

$$GC^2HE^2 = GC\times BC\times GE\times BE.$$

Mais $GC\times HE$ est bien égal à l'aire du triangle, tel que montré précédemment et GC equivaut au demi-périmètre s et BC, GE et BE aux expressions notées $(s-a)$, $(s-b)$ et $(s-c)$ plus haut.

Partie 3 : La duplication du cube selon Héron d'Alexandrie [total : 5+1 pts]

Vous trouverez en annexe 3 le texte d'une proposition et sa construction, telle qu'on peut les trouver dans *Belopeica* de Héron d'Alexandrie. Utilisez-le pour répondre aux questions suivantes :

1) [1 pt] Expliquez, en termes mathématiques modernes, comment on peut résoudre le problème de la duplication du cube à l'aide des moyennes proportionnelles.

Le problème de la duplication du cube consiste à trouver le côté d'un cube dont le volume serait deux fois celui d'un cube donné. Supposons que le côté du cube donné est a, alors on déduit directement que le côté b du cube dont le volume serait $2a^3$ est $b = a\sqrt[3]{2}$.

En d'autres termes, il existe b et c tels que :

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{2a},$$

puisque dans ce cas :

$$\frac{1}{2} = \frac{a}{2a} = \frac{a}{b}\times\frac{b}{c}\times\frac{c}{2a} = \left(\frac{a}{b}\right)^3.$$

2) [1 pt] En géométrie grecque (euclidienne), qu'entend-on par un problème résoluble « à la règle et au compas » ?

Cette expression signifie que le problème entre parmi ceux qui peuvent être résolu dans le cadre posé par Euclide dans les *Eléments*. En particulier, il ne doit dépendre que des demandes 1, 2 et 3 qui définissent les opérations de construction qu'on peut exécuter. Ces demandes définissent abstraitement les opérations qu'on peut effectuer à l'aide d'une règle (non graduée) et d'un compas.

3) [1 pt] Héron dit dans un autre texte (les *Métriques*) que ce problème est solide ; que veut-il dire par là ? Cette démonstration permet-elle de l'établir ?

En disant que le problème est solide, Héron veut dire qu'il peut être résolu à l'aide des sections coniques. La démonstration qu'il donne est cependant mécanique (ou grammique, selon la terminonologie de Proclus) : elle ne permet donc pas d'établir que le problème est bien solide.

NB. Que ce problème soit soilde peut aussi se comprendre à l'aide des travaux de Descartes, en remarquant qu'il s'agit de résoudre une équation du troisième degré : $x^3 = 2$, qui est irréductible dans le corps des rationnels.

4) [2 pts] Faites un commentaire détaillé de la démonstrations de Héron.
   [1 pt bonus] Soulignez bien pourquoi cette problème n'est pas résolu « à la règle et au compas ».

La preuve de Héron repose sur la possibilité de placer une règle en B de telle sorte que les segments EH et EZ soient égaux. On s'aperçoit facilement que cette construction n'est pas possible si on ne sert que de la règle et du compas. Il faut alors montrer que :

$$\frac{AB}{AZ} = \frac{AZ}{GH} = \frac{GH}{BG}.$$

La première partie de cette démonstration consistera à établir que :

$$\frac{AB}{AZ} = \frac{GH}{BG},$$

ce qui découle immadiatement du fait que les triangles HGB et BAZ sont semblables.

Il faut ensuite montrer que :

$$\frac{AB}{AZ} = \frac{AZ}{GH}.$$

Pour établir cela, posons K le milieu du segment AD. On peut alors voir que :

$$KZ^2 = DZ \times AZ + AK^2,$$

simplement en remarquant qu'il s'agit d'une indentité remarquable. En effet, en posant $b = AZ$ et $d = AD$, l'identité ci-dessous devient :

$$\left(b + \frac{\square}{2}\right)^2 = (b + d)b + \left(\frac{d}{2}\right)^2.$$

A partir de là, on peut ajouter EK^2 de chaque côté et appliquer le théorème de Pythagore. On aura donc :

$$EZ^2 = EK^2 + KZ^2 = DZ \times AZ + AK^2 + EK^2 = DZ \times AZ + AE^2.$$

De manière similaire, on pourra prouver que :

$$EH^2 = DH \times GH + EG^2.$$

Mais, comme $EZ = EH$ et $AE = EG$, alors nous aurons établi que :

$$DZ \times AZ = DH \times GH.$$

En d'autres termes, nous aurons établi que :

$$\frac{AZ}{GH} = \frac{DH}{DZ} = \frac{AB}{AZ},$$

puisque les triangles ABZ et DHZ son semblables. C'est ce qu'il fallait démontrer.

ANNEXE 1 : Les *Pneumatiques*.

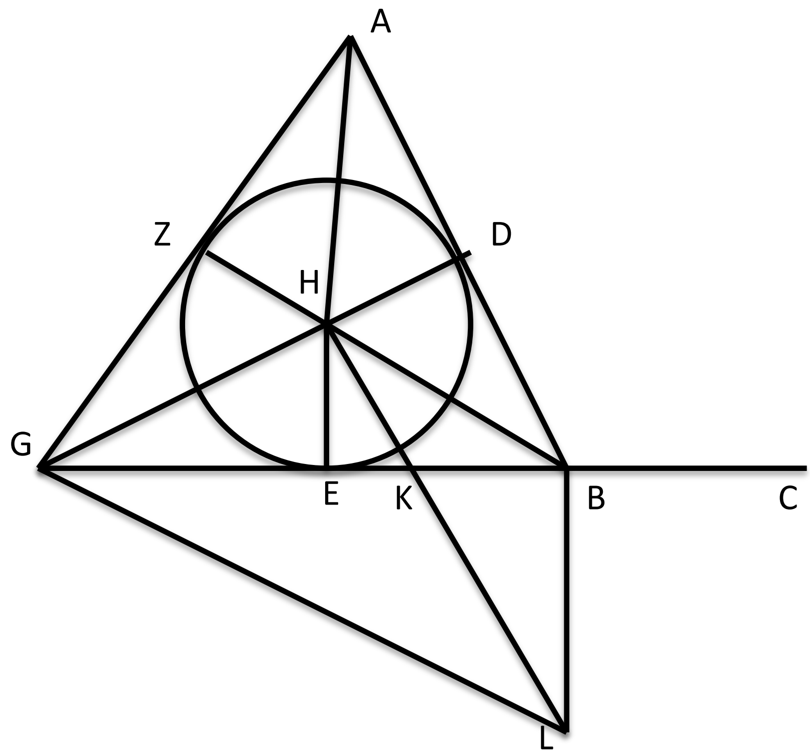
Source : Extrait d'un manuscrit de Héron d'Alexandie, les *Pneumatiques*, conservé au British Museum (Harley MS 5605, ff 3-50) :

ANNEXE 2 : Les *Dioptres*.

Source : A. J. H. Vincent, « Extraits des manuscrits relatifs à la géométrie pratique des Grecs 1° Traité de la Dioptre par Héron d'Alexandrie […] », in *Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque impériales et autres bibliothèques*, tome 19 (1858), p.157 et suivantes ; extrait p. 287-289. On a numéroté les paragraphes.

« [1] *Etant donnés les côtés d'un triangle, en trouver l'aire.*

[2] On peut, il est vrai, en menant une perpendiculaire [d'un sommet au côté opposé] et mesurant sa longueur, trouver l'aire du triangle. Mais on propose de mesurer l'aire sans connaître la hauteur.



[3] Soit ABG le triangle proposé; et soit donné chacun de ses côtés : on demande d'en trouver l'aire.

[4] Inscrivons dans le triangle donné le cercle DEZ dont le centre est H, et menons HA, HB, HG, HD, HE, HZ.

[5] Le produit BG × HE sera le double du triangle BHG; AB × HD sera le double du triangle AHB; et enfin AG × HZ sera le double du triangle AHG. Donc le produit du périmètre du triangle ABG par le rayon HE du cercle DEZ est double du triangle ABG.

[6] Prolongeons GB et prenons BC = AD; GC sera la moitié du périmètre. Donc le produit GC × HE (ou la racine carrée du produit $GC^2 \times HE^2$) sera l'aire du triangle.

[7] Menons HKL perpendiculaire à HG, puis BL perpendiculaire à BG, et joignons GL. Puisque chacun des deux angles GHL, GBL, est droit, les points G, H, B, L, sont tous quatre sur une

même circonférence de cercle; et les angles GHB, GLB, forment une somme égale à deux droits.

[8] Donc, en raison de ce que les droites HA, HB, HG, divisent en deux parties égales les trois angles formés autour du point H [par les rayons du cercle inscrit], l'angle AHD est égal à l'angle GLB; et le triangle HAD semblable au triangle GLB.

[9] On a donc GB : BL :: AD : DH, ou :: BC : HE; *alternando*, GB : BC :: BL : HE, ou :: BK : KE; et *componendo*, GC : BC :: EB : EK. De sorte que l'on aura encore GC^2 : GC × BC :: GE × EB : GE × EK ou HE^2.

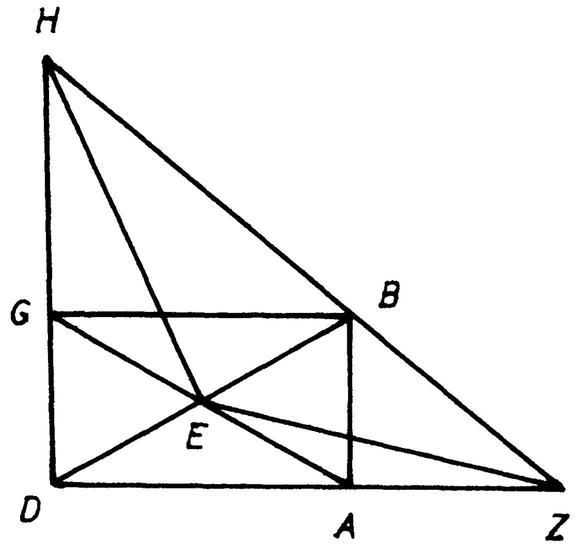
[10] D'où il suit que le produit GC × BC × GE x EB est égal à $GC^2 \times HE^2$, dont la racine carrée mesure l'aire du triangle. Or les quatre droites qui forment ce produit sont connues : en effet, GC est la moitié du périmètre; BC est l'excès de ce demi-périmètre sur le côté BG; GE, l'excès du même périmètre sur le côté AB; et enfin EB est l'excès sur le côté AC. Donc, en résumé, l'aire du triangle est donnée.

[11] Prenons un exemple : Soit AB= 13, BG= 14, GA= 15. Ajoutons les côtés : on a 42, dont la moitié est 21. Retranchons 13, il reste 8; puis 14, il reste 7; puis 15, il reste 6. Multipliant entre eux ces quatre nombres 21, 8, 7, 6, on a 7.056, dont la racine carrée est 84. Donc l'aire du triangle est 84. »

ANNEXE 3 : *Belopoieca*.

<u>Source</u> : Héron d'Alexandrie, *Belopoeica*. Adaptation française du texte publié in Wilbur Richrad Knorr, *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry*, Birkhäuser, Boston, 1989, p. 13.

> « Comment l'on doit trouver, pour deux droites données, deux moyennes proportionnelles, nous le dirons dans ce qui suit.
>
> Soient AB, BG deux droites données perpendiculaires, dont on doit trouver les deux moyennes proportionnelles. Complétons le le parallelogramme ABGD. Joignons les droites AG, BD et prolongeons les droites DG, DA.



> Et plaçons une règle au point B, qui coupe les droites qu'on aura prolongées. Faisons tourner la règle autour du point B jusqu'à ce que les droites joignant le point E [= le point d'intersection des diagonales du rectangle ABGD] aux sections soient égales l'un à l'autre. [Sur le schéma, nous dirons que] la règle se trouve à la place de la droite ZBH et que les deux droites égales sont EZ, EH.
>
> Je dis que des droite AB, BG, les moyennes proportionnelles sont AZ, GH ; la première étant AB, la seconde sera AZ, la troisième GH, et la quatrième BG. »