

**Les ENSEIGNANTS : David Aubin et François L .**

**– Examen partiel –**

11 mars 2015, de 16h00 à 18h00, salle 13-14 101.

**Enoncé des questions**

***Toute documentation interdite, à l'exception des notes manuscrites.***

**L'examen comporte trois parties ; vous devez répondre à toutes les questions de chacune des trois parties.**

**L'examen sera corrigé sur un total de 20 points.**

**Partie 1 : Deux propositions d'Euclide et un corollaire [9 points]**

Dans cette partie, il vous est demandé de commenter les preuves de deux propositions tirées des *Eléments* d'Euclide.

- 1) [1 pt] Dans un premier temps, rappelez, en quelques mots, l'importance de ce traité d'Euclide dans l'histoire des mathématiques. Expliquez comment nous est parvenue la connaissance sur cette œuvre.

Vous trouverez en **annexe 1**, l'énoncé et la preuve de la proposition 14 (la dernière) du livre 2, dans la traduction de François Peyrard. Reportez-vous y pour répondre aux deux prochaines questions.

- 2) [1 pt] Identifiez les différentes parties de la preuve euclidienne.
- 3) [2 pts] Rédigez un commentaire bref, clair et précis de cette proposition. Dans ce commentaire, veillez à bien faire apparaître les éléments suivants :
  -  nonc  et utilisation de la proposition 45, livre 1 (vue en td) ;
  - utilisation de la proposition 3 (non vue en td) ; quel est son énoncé probable selon vous ?
  - utilisation de la proposition 5 du livre 2 (non vue en td) ; énoncé probable sous forme géométrique ou d'une identité remarquable ?
  -  nonc  et utilisation de la proposition 47 du livre 1 (vue en td).

Reportez-vous maintenant à l'**annexe 2** qui contient l'énoncé et la preuve de la proposition 8 du livre 6.

- 4) [2 pts] Plutôt que de rédiger un commentaire détaillé de la preuve euclidienne, écrivez une démonstration claire et succincte de cette proposition en utilisant un langage moderne. Vous pouvez bien entendu vous inspirer de la preuve donnée par Euclide

Dans l'**annexe 3**, tiré de la traduction française d'Euclide par D. Henrion en 1632, vous trouverez un corollaire qui suit immédiatement la preuve donnée par Euclide.

- 5) [1 pt] Qu'est-ce qu'un corollaire ? Quel est le statut de ce corollaire dans les *Eléments* ? Pensez-vous qu'il a été écrit par Euclide lui-même ? Et sinon, par qui ?
- 6) [2 pt] Donnez la définition d'une moyenne proportionnelle. Exprimez en langage mathématique moderne l'énoncé du corollaire et esquissez en une preuve.

## Partie 2 : Tartaglia [total : 7 pts]

Vous trouverez en **annexes 4 et 5** deux extraits de la traduction française de *L'Arithmétique* de Niccolò Tartaglia (éd. 1613), ainsi qu'une transcription en caractères modernes du premier extrait.

- 7) [1 pt] Quelle découverte célèbre est en partie attribuée à Tartaglia ? Que savez-vous du statut de mathématicien de Tartaglia ? A qui s'adresse cet ouvrage en premier lieu ?
- 8) [1 pt] Expliquez en langage moderne la procédure de Tartaglia présenté en **annexe 4**.
- 9) [2 pts] Reconstituez la preuve qui y est esquissée à partir des proposition d'Euclide ci-dessus (partie 1 de l'examen).
- 10) [2 pts] Utilisez l'extrait de l'**annexe 5** pour formuler une méthode arithmétique permettant d'extraire la racine carré d'un entier qui est un carré parfait.
- 11) [1 pt] Commentez les liens entre géométrie et arithmétique exprimés dans cette œuvre au regard de l'histoire des mathématiques depuis l'Antiquité.

## Partie 3 : Descartes [total : 4 pts]

Vous trouverez enfin en **annexe 6** un texte de Descartes tiré de la *Géométrie* (1637). Commentez ce texte en répondant aux questions suivantes :

- 12) [1 pt] Esquissez de façon moderne (et à la lumière des propositions précédentes) la preuve que le segment GI est la racine carrée du segment GH.
- 13) [1 pt] Pourquoi Descartes doit-il définir une unité ?
- 14) [2 pt] Quelle est la place de cet ouvrage de Descartes dans l'histoire des mathématiques ? Quelle différence conceptuelle voyez-vous entre l'exemple donné par Descartes et la procédure géométrique de Tartaglia ? [Indice : c'est la géométrie analytique qui permet de penser les nombres qu'aujourd'hui on appelle réels].

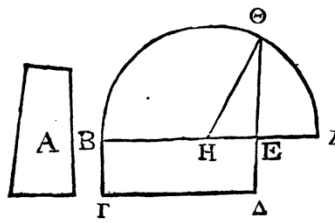
PROPOSITION XIV.

Construire un carré égal à une figure rectiligne donnée.

Soit A la figure rectiligne donnée ; il faut construire un carré égal à cette figure rectiligne.

Construisons un parallélogramme rectangle BΔ égal à la figure rectiligne donnée A (45. 1). Si BE était égal à EΔ, on aurait fait ce qui était proposé ; car le carré BΔ aurait été construit égal à la figure rectiligne A. Si cela n'est point, l'un des côtés BE, EΔ est plus grand que l'autre. Que BE soit le plus grand, prolongeons-le vers Z, et faisons EZ égal à EΔ (3. 1) ; coupons BZ en deux parties égales au point H ; du centre H et d'un intervalle égal à l'une des droites HB, HZ, décrivons la demi-circonférence BΘZ (dem. 3) ; prolongeons ΔE vers Θ, et joignons HΘ.

Puisque BZ est partagé en deux parties égales au point H, et en deux parties



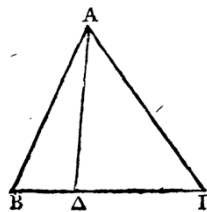
inégaies au point E ; le rectangle compris sous BE, EZ avec le carré de HE, est égal au carré de HZ (5. 2). Mais HZ est égal à HΘ ; donc le rectangle compris sous BE, EZ avec le carré de HE est égal au carré de HΘ. Mais les carrés des droites ΘE, EH sont égaux au carré de HΘ (47. 1) ; donc le rectangle compris sous BE, EZ avec le carré de HE, est égal aux carrés de droites ΘE, EH. Retraichons le carré commun de HE ; le rectangle restant compris sous BE, EZ sera égal au carré de EΘ. Mais le rectangle compris sous BE, EZ est le rectangle compris sous LE, EΔ, puisque la droite EZ est égale à la droite EΔ ; donc le parallélogramme BΔ est égal au carré de EΘ. Mais BΔ est égal à la figure rectiligne A ; donc la figure rectiligne A est égale au carré de EΘ.

Donc le carré décrit avec EΘ a été construit égal à la figure rectiligne donnée A ; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION VIII.

Si dans un triangle rectangle on mène une perpendiculaire de l'angle droit sur la base, les triangles adjacents à la perpendiculaire sont semblables au triangle entier et semblables entr'eux.

Soit le triangle rectangle  $AB\Gamma$ , ayant l'angle droit  $B\Lambda\Gamma$  ; du point  $A$  menons sur la base  $B\Gamma$  la perpendiculaire  $A\Delta$  ; je dis que les triangles  $AB\Delta$ ,  $A\Delta\Gamma$  sont semblables au triangle entier  $AB\Gamma$  et semblables entr'eux.



Car puisque l'angle  $B\Lambda\Gamma$  est égal à l'angle  $A\Delta B$ , étant droits l'un et l'autre, et que l'angle en  $B$  est commun aux deux triangles  $AB\Gamma$ ,  $AB\Delta$ , l'angle restant  $\Lambda\Gamma B$  est égal à l'angle restant  $B\Lambda A$  (32. 1) ; donc les deux triangles  $AB\Gamma$ ,  $AB\Delta$  sont équiangles. Donc le côté  $B\Gamma$  qui soutend l'angle droit du triangle  $AB\Gamma$ , est au côté  $BA$  qui soutend l'angle droit du triangle  $AB\Delta$ , comme le côté  $AB$  qui soutend l'angle en  $\Gamma$  du triangle  $AB\Gamma$ , est au côté  $B\Delta$  qui soutend un angle égal à l'angle  $\Gamma$ , c'est-à-dire l'angle  $B\Lambda A$  du triangle  $AB\Delta$ , et comme le côté  $A\Gamma$  est au côté  $A\Delta$  qui soutend l'angle  $B$ , commun aux deux triangles ; donc les triangles  $AB\Gamma$ ,  $AB\Delta$  sont équiangles, et ils ont les côtés autour des angles égaux proportionnels (4. 6) ; donc le triangle  $AB\Gamma$  est semblable au triangle  $AB\Delta$  (déf. 1. 6). Nous démontrerons semblablement que le triangle  $A\Delta\Gamma$  est

semblable au triangle  $AB\Gamma$  ; donc chacun des triangles  $AB\Delta$ ,  $A\Delta\Gamma$  est semblable au triangle entier  $AB\Gamma$ .

Je dis aussi que les triangles  $AB\Delta$ ,  $A\Delta\Gamma$  sont semblables entr'eux.

Car puisque l'angle droit  $B\Lambda A$  est égal à l'angle droit  $A\Delta\Gamma$ , et qu'on a démontré que l'angle  $B\Lambda A$  est égal à l'angle en  $\Gamma$ , l'angle restant en  $B$  est égal à l'angle restant  $\Delta\Lambda\Gamma$  (32. 1) ; donc les deux triangles  $AB\Delta$ ,  $A\Delta\Gamma$  sont équiangles. Donc le côté  $B\Delta$  du triangle  $AB\Delta$ , qui soutend l'angle  $B\Lambda A$ , est au côté  $\Delta A$  du triangle  $A\Delta\Gamma$ , qui soutend l'angle  $\Gamma$ , égal à l'angle  $B\Lambda A$ , comme le côté  $A\Delta$  du triangle  $AB\Delta$ , qui soutend l'angle en  $B$ , est au côté  $\Delta\Gamma$ , qui soutend l'angle  $\Delta\Lambda\Gamma$  du triangle  $A\Delta\Gamma$ , égal à l'angle en  $B$  ; et comme le côté  $BA$ , qui soutend l'angle droit  $A\Delta B$ , est au côté  $A\Gamma$  qui soutend l'angle droit  $A\Delta\Gamma$  (4. 6) ; donc le triangle  $AB\Delta$  est semblable au triangle  $A\Delta\Gamma$  (déf. 1. 6). Donc, etc.

**COROLLAIRE.**

De ceuy est manifeste, que la perpendiculaire tirée de l'angle droit d'un triangle rectangle à la base, est moyenne proportionnelle entre les deux segments de la base : & chacun des costez, comprenant l'angle droit, estre aussi moyen proportionnel entre toute la base, & le segment qui le touche.

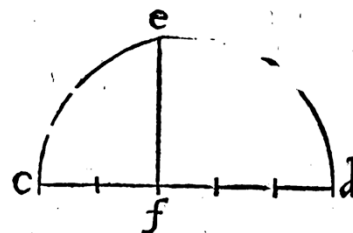
Car il a esté démontré, que comme  $BD$  est à  $DA$ , ainsi  $DA$  est à  $DC$  : & partant  $DA$  est moyenne prop. entre  $BD$  &  $DC$  : item que comme  $CB$  est à  $BA$ , ainsi  $BA$  à  $BD$  : & par ainsi  $BA$  est moyenne prop. entre  $CB$  &  $BD$  : finalement que comme  $BC$  est à  $CA$ , ainsi  $CA$  à  $CD$  : & partant  $CA$  est moyenne proportionnelle entre  $BC$  &  $CD$ .

Source : *L'Arithmétique de Nicolas Tartaglia brescian, grand mathématicien, et prince des praticiens*, traduit par Guillaume Gosselin (Paris : Adrian Perier, 1613).

tres quelconques : or posons que ce soient 6 pieds superficiels : nous trouuerons deux nombres qui multipliez l'un par l'autre, ont fait 6, & tels seront 2 & 3, qui multipliez l'un par l'autre ont fait 6, ainsi nous tirerons vne ligne, qui ait autant de pieds, que il y a en la somme de ces deux nombres, c'est à scauoir qui ait 5 pieds, laquelle soit  $C$  ———  $D$ , sur laquelle nous descrirons la moitié d'un cercle, qui fera  $C, E, D$ , puis du point, qui est celuy point, qui distingue les 2 pieds d'avec les 3 pieds, lesquels sont en la ligne  $C$  ———  $D$ , nous tirerons la ligne  $F, E$ , perpendiculairement sur la ligne  $C, D$ , & dirons que la ligne  $F, E$ , fera le costé exacte des 6 pieds superficiels, ce qui est démontré par la dernière du secōd, & l'ensuit encor par l'huictième du sixième, que la ligne  $F, E$ , est le costé exacte de 6, ce que nous cherchions, ainsi qu'on peut voir,

*Comment on peut donner exactement par voye Geometrique le costé Quarré d'un nombre, tant Quarré, que non Quarré.*

Nous soit proposé de trouuer par voye Geometrique le costé Quarré de 6, par 6 nous entendons 6 quelconques mesures, comme pieds, pas, ou au-



Transcription fidèle de la page précédente en caractères modernes :

*Comment on peut donner exactement par voye Geometrique le costé Quarré d'un nombre, tant Quarré, que non Quarré.*

Nous soit proposé de trouuer par voye Geometrique le costé Quarré de 6, par 6 nous entendons 6 quelconques mesures, comme pieds, ou autres quelconques ; or posons que ce soient 6 pieds superficiels : nous trouuerons deux nombres qui multipliez l'un par l'autre, ont fait 6, & tels seront 2 & 3, qui multipliez l'un par l'autre ont fait 6, ainsi nous tirerons vne ligne, qui ait autant de pieds, que

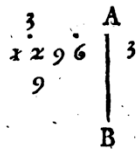
il y a en la somme de ces deux nombres, c'est à sçavoir qui ait 5 pieds, sur laquelle nous descrirons la moitié d'un cercle, qui sera C, E, D, puis du point, qui est celuy point, qui distingue les 2 pieds d'avec les 3 pieds, lesquels font en la ligne C—D, nous tirerons la ligne F,E, perpendiculairement sur la ligne C,D 1 dirōs que la ligne F, E, sera le costé exacte des 6 pieds superficiels, ce qui est démontré par la dernière du secōd, & s'ensuit encor par l'huictième du sixème, que la ligne F,E, est le costé exacte de 6, ce que nous cherchions, ainsi q'ouon peut voir.

ANNEXE 6 : L'Arithmétique de Nicolas Tartaglia, extrait 2.

*Comment on peut tirer le costé Quarré d'un nombre plus grand que 100.*

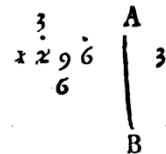
*Chap. III.*

**T**R O V V O N S le costé Quarré de 1296, premièrement nous escrirons vn poinct dessus la première figure vers la main dextre, à sçavoir dessus 6, puis nous en mettrōs encor vn autre dessus la troisième figure, à sçavoir dessus 2, & ainsi consequemment dessus les figures des lieux impers, & autant qu'il y aura de poincts, autant y aura il de figures au costé de ce Quarré: cōme en nostre Quarré 1296, il n'y aura que deux figures, à raison qu'il ne peut recevoir que deux poincts. Apres avoir fait cecy, nous tirerons vne ligne cōme celle-cy, A—B,



Puis nous trouverons le plus grand Quarré, qui soit contenu en 12, qui est le nombre appartenant au dernier poinct, & nous trouverons qu'iceluy Quarré sera 9, car 16 n'y peuvent pas estre cōtenus, nous escrirons le costé de ce Quarré 9, qui est 3, derrière nostre ligne A, B, pour la première figure de nostre costé, puis nous osterons ce Quarré 9 de 12, & escrirons le reste, qui sera 3 dessus 2, apres avoir

effacé 12: Cecy estant fait, qui ne sera plus reiteré nous doublerons tout ce qui est derrière nostre ligne A, B, cōme maintenant nous doublerons 3, & ferons 6, lequel double nous escrirons dessous celle figure de nostre Quarré, qui n'a point de poinct sur soy marqué, & qui est prochain au poinct, que nous auons desia acheué, nous mettrōs donques ce double qui est 6, dessous 9, qui est la figure de nostre Quarré, qui n'a point sur soy de poinct, & est prochain au poinct, que nous auons acheué, c'est à sçavoir au poinct, qui est sur 2, en ceste sorte.



Ce double ainsi mis nous servira de diuiseur, ainsi nous diuiserons le nōbre superieur de nostre Quarré par ce double, à sçavoir 39 par 6, en disant, 6 en 39 combien sont ils contenus de fois? & nous trouverons qu'ils y seront cōtenus 6 fois, nous escrirons ce quotient, qui est 6, en deux endroits, premièrement apres le double qui a seruy de diuiseur, à sçavoir apres 6, & secondement apres toutes les figures de nostre costé, qui n'est qu'une, c'est à sçavoir 3, derrière la ligne A, B, en ceste sorte.



Ce quotient, qui est 6, lequel nous auons escrit derriere la ligne A, B, apres nostre premiere figure, fera la derniere figure de nostre costé, a cause qu'il n'y a que deux poincts.

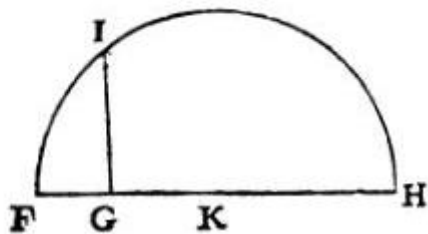
Cecy estant ainsi fait, nous multiplierons la derniere figure de nostre costé, qui est 6, par tout ce que nous auons escrit au diuiseur, à sçauoir par 66, en disant, 6 multiplians 6, font 36, que nous osons de 39, & restent 3, lequel reste nous escrirons dessus 9, apres auoir effacé 39, puis encor 6 multiplias le dernier nombre du diuiseur, qui est 6, font 36, que nous osons de 36, & ne reste rien, nous effacerons donques 36, qui est le nombre superieur, & semblablement tout ce qui est en nostre diuiseur, à sçauoir 66, & dirons, pour autant qu'il ne reste rien, que le nombre donné, 1296, estoit vn nombre vrayement Quarré, duquel le costé Quarré est 36: la preuue sera, que si nous multiplions 36 par 36, c'est à dire par soy-mesme, nous ferons 1296.

3 6 costé	
3 6 costé	
2 1 6	<i>Nombres produis, ou</i>
1 0 8	<i>superficiels,</i>
1 2 9 6	<i>Sommes de ces nom-</i>
	<i>bres superficiels, ou</i>
	<i>Quarré de ce nom-</i>
	<i>bre 36.</i>

ANNEXE 5 : La Géométrie de Descartes.

Source : René Descartes, *La Géométrie* (Leyde, 1637) :

l'Extra-  
ction de la  
racine  
quarrée.



Ou s'il faut tirer la racine quarrée de GH, ie luy adiouste en ligne droite FG, qui est l'vnité, & diuisant FH en deux parties esgales au point K, du centre K ie tire le cercle F I H, puis esleuant du point G vne ligne droite iusques à I, à angles droits sur FH, c'est GI la racine cherchée. Je ne dis rien icy de la racine cubique, ny des autres, à cause que i'en parleray plus commodement cy après.