LM300
« Histoire des Mathématiques »
niveau L3

Printemps 2014–2015

Les ENSEIGNANTS : David Aubin et François Lê.

– Examen partiel –

11 mars 2015, de 16h00 à 18h00, salle 13-14 101.

Enoncé des questions

Toute documentation interdite, à l'exception des notes manuscrites.

L'examen comporte trois parties ; vous devez répondre à toutes les questions de chacune des trois parties.
L'examen sera corrigé sur un total de 20 points.

Partie 1 : Deux propositions d'Euclide et un corollaire [9 points]

Dans cette partie, il vous est demandé de commenter les preuves de deux propositions tirées des *Eléments* d'Euclide.

1) [1 pt] Dans un premier temps, rappelez, en quelques mots, l'importance de ce traité d'Euclide dans l'histoire des mathématiques. Expliquez comment nous est parvenue la connaissance sur cette œuvre.

Les *Eléments* d'Euclide sont bien sûr l'une des œuvres majeures de l'histoire des mathématiques, sinon la plus importante. Il s'agit du premier traité complet dont nous ayons gardé le texte dans son entierté. Composés autour de 300 avant Jésus-Christ à Alexandrie, en Egypte, par un auteur, Euclide, dont on ne sait à peu près rien, si ce n'est qu'il a écrit plusieurs autres ouvrages de mathématiques (*Donnés*, *Optique*, *Phénomènes*, *Coniques*, etc.), les *Eléments* reprennent sans doute le contenu des traités écrits par les mathématiciens de l'école de Platon quelques décennies auparavant. Mais puisque c'est le traité d'Euclide et non ces derniers qui a été conservé, on soupçonne que l'organisation du matériel est originale à Euclide. Cette organisation est particulièrement rigoureuse et adopte une approche axiomatique : à l'exception des axiomes et définitions, toutes les propositions sont démontrées ; l'ordre des propositions semble aussi avoir fait d'une réflexion assez aboutie.

Si les *Eléments* d'Euclide nous sont aussi bien connus, cela est dû à plusieurs générations de scribes, de compilateurs et de commentateurs. Aucun manuscrit de la période euclidienne ne subsiste. Les copies complètes du traités que nous possédons semblent provenir de Constantinople autour du X^{e} siècle après Jésus-Christ. La plupart reprennent une version des œuvres d'Euclide compilée au IV^{e}

siècle par Théon d'Alexandrie. En Europe occidentale, la connaissance d'Euclide est pour l'essentiel perdue après la chute de l'empire romain. Ce n'est qu'au début du XIII^e^ siècle que commencent à circuler des traductions latines, composée à partir de version arabes des *Eléments*. Ces premières traductions sont très imparfaites. Au XVI^e^ siècle, des versions plus fidèles sont imprimées en grec et en latin et sont traduites dans les langues vernaculaires. Au début du XIX^e^ siècle, François Peyrard découvre, traduit et publie un manuscrit grec complet dans la bibliothèque du Vatican qui diffère un peu de la tradition. A la fin de ce même siècle, un travail philologique rigoureux par Heiberg permet d'établir la version définitive du traité.

Vous trouverez en **annexe 1**, l'énoncé et la preuve de la proposition 14 (la dernière) du livre 2, dans la traduction de François Peyrard. Reportez-vous y pour répondre aux deux prochaines questions.

2) [1 pt] Identifiez les différentes partie de la preuve euclidienne.

La preuve euclidenne comporte, en plus de la figure presque toujours présente, 6 parties distinctes :

- énoncé : « Construire un quarré égal à une figure rectiligne donnée ».
- exposition : « Soit A la figure rectiligne donnée ; »
- détermination : « il faut construire un quarré égale à cette figure rectiligne ».
- construction : « Construisons un parallélogramme (…) et joignons HΘ ».
- démonstration : « Puisque BZ est partagé (…) ; donc la figure rectiligne A est égale au quarré de EΘ ».
- conclusion : « Donc le quarré décrit avec EΘ a été construit égal à la figure rectiligne donnée A ; ce qu'il fallait faire ».

3) [2 pts] Rédigez un commentaire bref, clair et précis de cette proposition. Dans ce commentaire, veillez à bien faire apparaître les éléments suivants :
   - énoncé et utilisation de la proposition 45, livre 1 (vue en td) ;
   - utilisation de la proposition 3 (non vue en td) ; quel est son énoncé probable selon vous ?
   - utilisation de la proposition 5 du livre 2 (non vue en td) ; énoncé probable sous forme géométrique ou d'une identité remarquable ?
   - énoncé et utilisation de la proposition 47 du livre 1 (vue en td).

La preuve de la proposition 14 du livre 2 consiste à trouver la racine carrée d'une aire rectiligne donnée, qu'on suppose être rectangulaire en vertu de la proposition I.45 qui montre comment construire un rectangle BΔ égal à une figure rectiligne donnée A. Une fois cela fait, il suffit de construire la moyenne proportionnelle entre *a* et *b* (les longueurs des côtés du rectangle). En effet, si *c* est cette moyenne proportionnelle, on aura bien $c = \sqrt{ab}$ et le carré de côté *c* aura même aire que A.

La première partie de la preuve euclidenne permet de construire un cercle de rayon *c.* On part du rectangle BΔ construit d'aire égale à celle de la figure rectiligne donnée A en vertu de la proposition I.45. On considère le cas où l'un des côtés BΔ est strictement plus grand que la largeur BΓ (car si longueur et largeur étaient égales on aurait déjà construit un carré de même aire que A). Ce qui permet d'ajouter la largeur du rectangle (EZ=EΔ) à la longueur BE et de déterminer le centre du segment total

BZ, qu'on appelle H (ceci est fait par le biais la proposition I.3 qui montre comment bissecter un segment de doite), puis on trace un cercle de cercle H et de diamètre BZ. Enfin, on prolonge le segment EΔ qui croise le cercle en Θ, et on trace le rayon HΘ.

La seconde partie de la preuve est la démonstration que ce rayon est bien une moyenne proportionnelle, mais étant donné que ce concept n'est introduit que dans le livre 5, on le démontre directement en utilisant deux propositions :

- la proposition II.5 qui dit que l'aire du rectangle BΔ avec le carré de HE est égale au carré de HE (ce qui est équivalent à une identité remarquable : $ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$) ; on a donc $BE{\times}EZ + HE^2 = HZ^2$.
- le théorème de Pythagore (I.47), de sorte qu'on ait : $\mathrm{HE}^2 + \Theta\mathrm{E}^2 = \mathrm{H}\Theta^2 = HZ^2$.

En combinant les deux propositions et en éliminant HE^2 commun aux deux expressions, on obtient donc : $BE{\times}EZ = \Theta\mathrm{E}^2$, ce qu'il fallait démontrer.

Reportez-vous maintenant à l'**annexe 2** qui contient l'énoncé et la preuve de la proposition 8 du livre 6.

4) [2 pts] Plutôt que de rédiger un commentaire détaillé de la preuve euclidienne, écrivez une démonstration claire et succincte de cette proposition en utilisant un langage moderne. Vous pouvez bien entendu vous inspirer de la preuve donnée par Euclide

Dans l'**annexe 3**, tiré de la traduction française d'Euclide par D. Henrion en 1632, vous trouverez un corollaire qui suit immédiatement la preuve donnée par Euclide.

5) [1 pt] Qu'est-ce qu'un corollaire ? Quel est le statut de ce corollaire dans les *Eléments* ? Pensez-vous qu'il a été écrit par Euclide lui-même ? Et sinon, par qui ?
6) [2 pt] Donnez la définition d'une moyenne proportionnelle. Exprimez en langage mathématique moderne l'énoncé du corollaire et esquissez en une preuve.

Partie 2 : Tartaglia [total : 7 pts]

Vous trouverez en **annexes 4 et 5** deux extraits de la traduction française de *L'Arithmétique* de Niccolò Tartaglia (éd. 1613), ainsi qu'une transcription en caractères modernes du premier extrait.

7) [1 pt] Quelle découverte célèbre est en partie attribuée à Tartaglia ? Que savez-vous du statut de mathématicien de Tartaglia ? A qui s'adresse cet ouvrage en premier lieu ?
8) [1 pt] Expliquez en langage moderne la procédure de Tartaglia presenté en **annexe 4**.
9) [2 pts] Reconstituez la preuve qui y est esquissée à partir des proposition d'Euclide ci-dessus (partie 1 de l'examen).
10) [2 pts] Utilisez l'extrait de l'**annexe 5** pour formuler une méthode arithmétique permettant d'extraire la racine carré d'un entier qui est un carré parfait.
11) [1 pt] Commentez les liens entre géométrie et arithmétique exprimés dans cette œuvre au regard de l'histoire des mathématiques depuis l'Antiquité.

Partie 3 : Descartes [total : 4 pts]

Vous trouverez enfin en **annexe 6** un texte de Descartes tiré de la *Géométrie* (1637). Commentez ce texte en répondant aux questions suivantes :

12) [1 pt] Esquissez de façon moderne (et à la lumière des propositions précédentes) la preuve que le segment GI est la racine carrée du segment GH.
13) [1 pt] Pourquoi Descartes doit-il définir une unité ?
14) [2 pt] Quelle est la place de cet ouvrage de Descartes dans l'histoire des mathématiques ? Quelle différence conceptuelle voyez-vous entre l'exemple donné par Descartes et la procédure géométrique de Tartaglia ? [Indice : c'est la géométrie analytique qui permet de penser les nombres qu'aujourd'hui on appelle réels].

ANNEXE 1 : Les *Eléments* d'Euclide, proposition 14, livre 2 (édition et traduction de Peyrard).

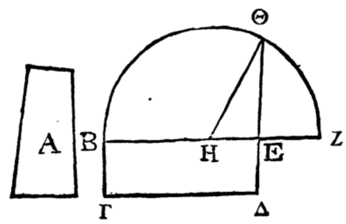
PROPOSITION XIV.

Construire un quarré égal à une figure rectiligne donnée.

Soit A la figure rectiligne donnée ; il faut construire un quarré égal à cette figure rectiligne.

Construisons un parallélogramme rectangle BΔ égal à la figure rectiligne donnée A (45. 1). Si BE était égal à EΔ, on aurait fait ce qui était proposé ; car le quarré BΔ aurait été construit égal à la figure rectiligne A. Si cela n'est point, l'un des côtés BE, EΔ est plus grand que l'autre. Que BE soit le plus grand, prolongeons-le vers Z, et faisons EZ égal à EΔ (3. 1) ; coupons BZ en deux parties égales au point H ; du centre H et d'un intervalle égal à l'une des droites HB, HZ, décrivons la demi-circonférence BΘZ (dem. 3) ; prolongeons ΔE vers Θ, et joignons HΘ.

Puisque BZ est partagé en deux parties égales au point H, et en deux parties



inégales au point E ; le rectangle compris sous BE, EZ avec le quarré de HE, est égal au quarré de HZ (5. 2). Mais HZ est égal à HΘ ; donc le rectangle compris sous BE, EZ avec le quarré de HE est égal au quarré de HΘ. Mais les quarrés des droites ΘE, EH sont égaux au quarré de HΘ (47. 1) ; donc le rectangle compris sous BE, EZ avec le quarré de HE, est égal aux quarrés de droites ΘE, EH. Retranchons le quarré commun de HE ; le rectangle restant compris sous BE, EZ sera égal au quarré de EΘ. Mais le rectangle compris sous BE, EZ est le rectangle compris sous BE, EΔ, puisque la droite EZ est égale à la droite EΔ ; donc le parallélogramme BΔ est égal au quarré de ΘE. Mais BΔ est égal à la figure rectiligne A ; donc la figure rectiligne A est égale au quarré de EΘ.

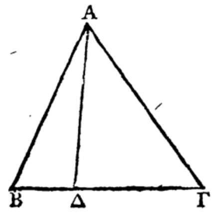
Donc le quarré décrit avec EΘ a été construit égal à la figure rectiligne donnée A ; ce qu'il fallait faire.

ANNEXE 2 : Les *Eléments* d'Euclide, proposition 14, livre 2 (édition et traduction de Peyrard).

PROPOSITION VIII.

Si dans un triangle rectangle on mène une perpendiculaire de l'angle droit sur la base, les triangles adjacents à la perpendiculaire sont semblables au triangle entier et semblables entr'eux.

Soit le triangle rectangle ΑΒΓ, ayant l'angle droit ΒΑΓ ; du point Α menons sur la base ΒΓ la perpendiculaire ΑΔ ; je dis que les triangles ΑΒΔ, ΑΔΓ sont semblables au triangle entier ΑΒΓ et semblables entr'eux.



Car puisque l'angle ΒΑΓ est égal à l'angle ΑΔΒ, étant droits l'un et l'autre, et que l'angle en Β est commun aux deux triangles ΑΒΓ, ΑΒΔ, l'angle restant ΑΓΒ est égal à l'angle restant ΒΑΔ (32. 1); donc les deux triangles ΑΒΓ, ΑΒΔ sont équiangles. Donc le côté ΒΓ qui soutend l'angle droit du triangle ΑΒΓ, est au côté ΒΑ qui soutend l'angle droit du triangle ΑΒΔ, comme le côté ΑΒ qui soutend l'angle en Γ du triangle ΑΒΓ, est au côté ΒΔ qui soutend un angle égal à l'angle Γ, c'est-à-dire l'angle ΒΑΔ du triangle ΑΒΔ, et comme le côté ΑΓ est au côté ΑΔ qui soutend l'angle Β, commun aux deux triangles ; donc les triangles ΑΒΓ, ΑΒΔ sont équiangles, et ils ont les côtés autour des angles égaux proportionnels (4. 6); donc le triangle ΑΒΓ est semblable au triangle ΑΒΔ (déf. 1. 6). Nous démontrerons semblablement que le triangle ΑΔΓ est semblable au triangle ΑΒΓ; donc chacun des triangles ΑΒΔ, ΑΔΓ est semblable au triangle entier ΑΒΓ.

Je dis aussi que les triangles ΑΒΔ, ΑΔΓ sont semblables entr'eux.

Car puisque l'angle droit ΒΔΑ est égal à l'angle droit ΑΔΓ, et qu'on a démontré que l'angle ΒΑΔ est égal à l'angle en Γ, l'angle restant en Β est égal à l'angle restant ΔΑΓ (32. 1); donc les deux triangles ΑΒΔ, ΑΔΓ sont équiangles. Donc le côté ΒΔ du triangle ΑΒΔ, qui soutend l'angle ΒΑΔ, est au côté ΔΑ du triangle ΑΔΓ, qui soutend l'angle Γ, égal à l'angle ΒΑΔ, comme le côté ΑΔ du triangle ΑΒΔ, qui soutend l'angle en Β, est au côté ΔΓ, qui soutend l'angle ΔΑΓ du triangle ΑΔΓ, égal à l'angle en Β; et comme le côté ΒΑ, qui soutend l'angle droit ΑΔΒ, est au côté ΑΓ qui soutend l'angle droit ΑΔΓ (4. 6); donc le triangle ΑΒΔ est semblable au triangle ΑΔΓ (déf. 1. 6). Donc, etc.

ANNEXE 3 : Corollaire de la proposition 8 du livre 6 des *Eléments* d'Euclide (éd. Henrion).

COROLLAIRE.

De cecy est manifeste, que la perpendiculaire tirée de l'angle droict d'vn triangle rectangle à la base, est moyenne proportionnelle entre les deux segmens de la base : & chacun des costez comprenant l'angle droict, estre aussi moyen proportionnel entre toute la base, & le segment qui le touche.

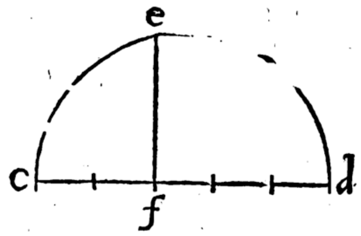
Car il a esté demonstré, que comme BD est à DA, ainsi DA est à DC : & partant DA est moyenne prop. entre BD & DC : item que comme CB est à BA, ainsi BA à BD : & par ainsi BA est moyenne prop. entre CB & BD : finalement que comme BC est à CA, ainsi CA à CD : & partant CA est moyenne proportionnelle entre BC & CD.

ANNEXE 4 : L'Arithmétique de Nicolas Tartaglia, extrait 1.

Source : *L'Arithmétique de Nicolas Tartaglia brescian, grand mathématicien, et prince des praticiens*, traduit par Guillaume Gosselin (Paris : Adrian Perier, 1613).

Comment on peut donner exactement par voye Geometrique le costé Quarré d'vn nombre, tant Quarré, que non Quarré.

Nous soit proposé de trouuer par voye Geometrique le costé Quarré de 6, par 6 nous entendrons 6 quelconques mesures, comme pieds, pas, ou autres quelconques ; or posons que ce soient 6 pieds superficiels : nou[illegible] trouuerons deux nombres qui multipliez l'vn par l'autre, ont fait 6, & tels seront 2 & 3, qui multipliez l'vn par l'autre ont fait 6, ainsi nous tirerons vne ligne, qui ait autant de pieds, que il y a en la somme de ces deux nombres, c'est à sçauoir qui ait 5 pieds, laquelle soit C———D, sur laquelle nous descrirons la moitié d'vn cercle, qui sera C, E, D, puis du point, qui est celuy point, qui distingue les 2 pieds d'auec les 3 pieds, lesquels sont en la ligne C———D, nous tirerons la ligne F, E, perpendiculairement sur la ligne C, D, & dirõs que la ligne F, E, sera le costé exacte des 6 pieds superficiels, ce qui est demonstré par la derniere du secõd, & s'ensuit encor par l'huictiéme du sixiéme, que la ligne F, E, est le costé exacte de 6, ce que nous cherchions, ainsi qu'on peut voir,



Transcription fidèle de la page précédente en caractères modernes :

Comment on peut donner exactement par voye Geometrique le costé Quarré d'vn nombre, tanta Quarré, que non Quarré.

Nous soit proposé de trouuer par voye Geometrique le costé Quarré de 6, par 6 nous entendons 6 quelconques mesures, comme pieds, ou autres quelconques ; or posons que ce soient 6 pieds superficiels : nous trouuerons deux nombres qui multiplieez l'vn par l'autre, ont fait 6, & tels seront 2 & 3, qui multipliez l'vn par l'autre ont fait 6, ainsi nous tirerons vne ligne, qui ait autant de pieds, que il y a en la somme de ces deux nombres, c’est à sçavoir qui ait 5 pieds, sur laquelle nous descrirons la moitié d’vn cercle, qui sera C, E, D, puis du point, qui est celuy point, qui distingue les 2 pieds d’auec les 3 pieds, lesquels font en la ligne C—D, nous tirerons la ligne F,E, perpendiculairement sur la ligne C,D 1 dirõs que la ligne F, E, sera le costé exacte des 6 pieds superficiels, ce qui est démonstré par la derniere du secõd, & s’ensuit encor par l’huictième du sixème, que la ligne F,E, est le costé exacte de 6, ce que nous cherchions, ainsi q’uon peut voir.

ANNEXE 6 : L’Arithmétique de Nicolas Tartaglia, extrait 2.

Comment on peut tirer le coſté Quarré d'vn nombre plus grand que 100.

Chap. III.

TROVVONS le coſté Quarré de 1296, premierement nous eſcrirons vn poinct deſſus la premiere figure vers la main dextre, à ſçauoir deſſus 6, puis nous en mettrõs encor vn autre deſſus la troiſiéme figure, à ſçauoir deſſus 2, & ainſi conſequemment deſſus les figures des lieux impers, & autant qu'il y aura de poincts, autant y aura il de figures au coſté de ce Quarré: cõme en noſtre Quarré 1296, il n'y aura que deux figures, à raiſon qu'il ne peut receuoir que deux poincts. Apres auoir fait cecy, nous tirerons vne ligne cõme celle-cy, A——B,

3 A
1 2 9 6 | 3
9
B

Puis nous trouuerons le plus grand quarré, qui ſoit contenu en 12, qui eſt le nombre appartenant au dernier poinct, & nous trouuerons qu'iceluy quarré ſera 9, car 16 n'y peuuent pas eſtre cõtenus, nous eſcrirons le coſté de ce quarré 9, qui eſt 3, derriere noſtre ligne A, B, pour la premiere figure de noſtre coſté, puis nous oſterons ce quarré 9 de 12, & eſcrirons le reſte, qui ſera 3 deſſus 2, apres auoir effacé 12: Cecy eſtant fait, qui ne ſera plus reïteré nous doublerons tout ce qui eſt derriere noſtre ligne A, B, comme maintenant nous doublerons 3, & ferons 6, lequel double nous eſcrirons deſſous celle figure de noſtre Quarré, qui n'a point de poinct ſur ſoy marqué, & qui eſt prochain au poinct, que nous auons deſia acheué, nous mettrõs donques ce double qui eſt 6, deſſous 9, qui eſt la figure de noſtre Quarré, qui n'a point ſur ſoy de poinct, & eſt prochain au poinct, que nous auons acheué, c'eſt aſçauoir au poinct, qui eſt ſur 2, en ceſte ſorte.

3 A
1 2 9 6 | 3
6
B

Ce double ainſi mis nous ſeruira de diuiſeur, ainſi nous diuiſerons le nõbre ſuperieur de noſtre Quarré par ce double, à ſçauoir 39 par 6, en diſant, 6 en 39 combien ſont ils contenus de fois? & nous trouuerons qu'ils y ſeront cõtenus 6 fois, nous eſcrirons ce quotient, qui eſt 6, en deux endroits, premierement apres le double qui a ſeruy de diuiſeur, à ſçauoir apres 6, & ſecondement apres toutes les figures de noſtre coſté, qui n'eſt qu'vne, c'eſt à ſçauoir 3, derriere la ligne A, B, en ceſte ſorte.

~~3~~ ~~3~~ A
~~1~~ ~~2~~ ~~9~~ ~~6~~ | 36
~~6~~ ~~6~~
B

Bb iiij

Ce quotient, qui eſt 6, lequel nous auons eſcrit derriere la ligne A, B, apres noſtre premiere figure, ſera la derniere figure de noſtre coſté, a cauſe qu'il n'y a que deux poincts.

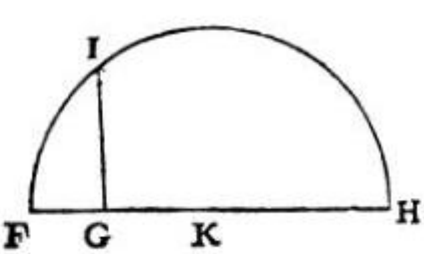
Cecy eſtant ainſi fait, nous multiplerons la derniere figure de noſtre coſté, qui eſt 6, par tout ce que nous auons eſcrit au diuiſeur, à ſçauoir par 66, en diſant, 6 multiplians 6, font 36, que nous oſtons de 39, & reſtent 3, lequel reſte nous eſcrirons deſſus 9, apres auoir effacé 39, puis encor 6 multipliãs le dernier nombre du diuiſeur, qui eſt 6, font 36, que nous oſtons de 36, & ne reſte rien, nous effacerons donques 36, qui eſt le nombre ſuperieur, & ſemblablement tout ce qui eſt en noſtre diuiſeur, à ſçauoir 66, & dirons, pour autant qu'il ne reſte rien, que le nombre donné, 1296, eſtoit vn nombre vrayement Quarré, duquel le coſté Quarré eſt 36 : la preuue ſera, que ſi nous multiplions 36 par 36, c'eſt à dire par ſoy-meſme, nous ferons 1296.

36	coſté
36	coſté
216	*Nombres produis, ou*
108	*ſuperficiels,*
1296	*Sommes de ces nombres ſuperficiels, ou Quarré de ce nombre 36.*

ANNEXE 5 : *La Géométrie* de Descartes.

Source : René Descartes, *La Géométrie* (Leyde, 1637) :

l'Extraction de la racine quarrée.



Ou s'il faut tirer la racine quarrée de GH, ie luy adiouſte en ligne droite FG, qui eſt l'vnité, & diuiſant FH en deux parties eſgales au point K, du centre K ie tire le cercle FIH, puis eſleuant du point G vne ligne droite iuſques à I, à angles droits ſur FH, c'eſt GI la racine cherchée. Ie ne dis rien icy de la racine cubique, ny des autres, à cauſe que i'en parleray plus commodement cy aprés.