SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

LU3MA209 –
Éléments d'histoire des mathématiques
2021-2022

L'ÉQUIPE ENSEIGNANTE :
David AUBIN
Pierre SAUREL

– Examen final –

vendredi 13 mai 2022, 16h30–18h30, **amphi 15**.

Toute documentation est interdite, sauf notes de cours et notes manuscrites.

PARTIE 1 : Traité des fluxions de MacLaurin (12 pts)

Vous trouverez en annexe 1 un extrait du *Traité des fluxions* de Colin MacLaurin dans la traduction française du père Pezenas publiée en 1749. Dans l'introduction, il revient sur la méthode d'exhaustion. Lisez ce texte et founissez des réponses argumentées aux questions suivantes :

1) [3 pts] Que veut dire MacLaurin quand il écrit : « les triangles semblables sont entr'eux en raison doublée de leurs côtés homologues » (p. iv) ? Esquissez une démonstration inspirée des *Éléments* d'Euclide.

2) [2 pts] « C'étoit un principe fondamental parmi eux, que la différence de deux quantités inégales peut s'ajoûter plusieurs fois à elle-même, en telle sorte qu'elle surpassera une quantité finie proposée de la même espèce » (p. iv-v). Discutez cette phrase et le passage suivant se rapportant à Archimède. Pourquoi ce principe est-il contradictoire avec les infiniment petits ?

3) « A mesure que les polygones inscrits dans les deux cercles, deviennent plus grands, ils conservent toujours entr'eux la même proportion constante, & cette raison invariable de ces polygones doit aussi être la raison des cercles eux-mêmes. » (p. vi)

    a. [3 pts] Commentez la preuve que donne MacLaurin à cette proposition.
    b. [2 pts] Discutez les différences entre la preuve de MacLaurin et celle d'Euclide (livre 12, prop. 2).

4) A la page 7 du *Traité*, MacLaurin définit la Fluxion en ces termes :

« La vitesse, avec laquelle une quantité flue, à chaque terme du tems pendant lequel elle est supposée se former, se nomme Fluxion, qui est, par conséquent, toujours mesurée par l'incrément ou le décrément que ce mouvement auroit produit dans un tems donné, s'il avoit été continué uniformément depuis ce terme sans aucune accélération ou retardement : ou

bien on peut la mesurer par la quantité qui seroit produire dans un tems donné par un mouvement uniforme, égale au mouvement générateur dans ce terme. »

[2 pts] Comment comprenez-vous cette définition ? En quoi se rapproche-t-elle et s'éloigne-t-elle de la définition moderne de la dérivée d'une fonction ?

PARTIE 2 : Séries infinies (8 pts)

5) Dans le cours et les TD, nous avons vu comment Isaac Newton, dans son traité sur *La Méthode des fluxions et des suites infinies*, trad. Buffon (Paris, 1740), développe des fractions irréductibles sous forme de séries infinies :

$$\frac{aa}{b+x} = \frac{aa}{b} - \frac{a^2x}{b^2} + \frac{a^2x^2}{b^3} - \frac{a^2x^3}{b^4} + \frac{a^2x^4}{b^5} - \ldots$$

a) [2 pts] Rappelez quelle est la méthode utilisée par Newton pour dériver ce résultat ?

b) [2 pts] Comment ce résultat peut-il être vu comme une conséquence de la formule du binôme de Newton ?

6) Considérez maintenant le texte d'Euler en **annexe 2**, tiré de ses *Élémens d'algèbre,* trad. française (Lyon, 1770).

   a. [2 pts] Au paragraphe 298, Euler se propose de résoudre en série infinie la fraction $\frac{1}{1+a}$. Expliquez comment il arrive au résultat donné.

   b. [2 pts] Au paragraphe 299, il en déduit que :

   ½ = 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 + …

   Que pensez-vous de cette preuve ? Qu'en aurait pensé Abel ou Cauchy ? Justifiez votre opinion à l'aide d'arguments mathématiques et historiques.

ANNEXES

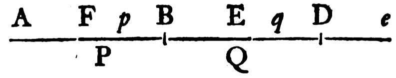
ANNEXE 1 – *Traité des fluxions* de Colin MacLaurin. Extraits de l'introduction, traduction Esprit Pezenas (Paris : Jombert, 1749), p. iv-vii.

Mais avant que de commencer, il ſera bon de conſidérer les traces que les Anciens ont ſuivies en plusieurs occaſions, pour meſurer toutes les figures rectilignes, & pour paſſer de là aux figures curvilignes : car comme ils n'ont pas pu ſe réſoudre à admettre des élémens rectilignes dans les figures curvilignes, il eſt bon d'examiner par quel artifice ils ont pu paſſer des unes aux autres ; & comme ils ſe ſont attachés à donner à leurs démonſtrations toute la perfection poſſible, nous devons, à leur imitation, démontrer auſſi exactement que nous le pourrons, une méthode plus générale que la leur, pour être à l'abri de toutes les chicanes, & pour ne pas nous écarter des anciens principes de la Géométrie.

Ils ont trouvé que les triangles ſemblables ſont entr'eux en raiſon doublée de leurs côtés homologues ; & réduiſant les polygones ſemblables au même nombre de triangles ſemblables, ils ont étendu cette propoſition à tous ces polygones. Mais lorſqu'ils ont entrepris de comparer les figures curvilignes ſemblables, que l'on ne peut pas réduire à un même nombre des parties rectilignes ſemblables, cette méthode leur a manqué. Les cercles ne ſont que des figures planes curvilignes conſidérées comme telles dans les élémens de Géométrie. Si les Anciens avoient pu ſe déterminer à les regarder comme des polygones d'une infinité de côtés, comme quelques-uns l'ont fait pour abréger leurs démonſtrations, après avoir prouvé que les polygones ſemblables inſcrits dans les cercles ſont en raiſon doublée des diamétres, ils auroient appliqué aux cercles cette même propoſition, & ils auroient regardé la ſeconde propoſition du douziéme Livre d'Euclide comme un corollaire aiſé de la premiere. Mais il y a lieu de croire qu'ils n'ont jamais voulu paſſer une démonſtration de cette eſpece. C'étoit un principe fondamental parmi eux, que la différence de deux quantités inégales peut s'ajoûter pluſieurs fois à elle-même, en telle ſorte qu'elle ſurpaſſera une quantité finie propoſée de la même eſpece ; & l'on voit par leurs démonſtrations, qu'ils ont établi ſur ce principe d'une maniere particuliere leurs propoſitions au ſujet des figures curvilignes ; comme Archimede le déclare expreſſément, dans ſon Livre à Doſithée ſur la quadrature de la parabole, reconnoiſſant que c'eſt là le fondement de toutes ſes découvertes, & le donnant comme un principe dont les Anciens s'étoient ſervis pour démontrer avant lui toutes les propoſitions de cette eſpece. Mais ce principe paroît incompatible avec l'hypotheſe des quantités ou différences infiniment petites, leſquelles étant ajoûtées à elles-mêmes un nombre de fois, ne ſçauroient jamais devenir des quantités finies.

Ils ont donc pris une autre route, moins directe à la vérité, mais très-évidente. Ils ont trouvé que les polygones ſemblables inſcrits approchent continuellement de l'aire des cercles, à meſure que l'on augmente le nombre de leurs côtés ; enſorte que les différences décroiſſantes, entre chaque cercle & ſon polygone inſcrit, deviennent enfin plus petites qu'aucune quantité donnée, en diviſant & ſous-diviſant toujours les arcs de cercle qui ſoutiennent les côtés de ces polygones : & que pendant tout ce tems-là les polygones inſcrits gardent toujours entr'eux la même proportion invariable, qui eſt celle des quarrés des diamétres de leurs cercles. C'eſt par-là qu'ils ont démontré que la proportion des cercles eux-mêmes ne pouvoit-être autre que cette proportion invariable de tous les polygones ſemblables inſcrits. Je vais donner un extrait de leurs démonſtrations, pour faire voir de quelle maniere ils ont pu, dans cette occaſion & en pluſieurs autres, prouver leurs propoſitions ſur les figures curvilignes, en ne ſe ſervant que de ce qu'ils avoient déja découvert ſur les figures rectilignes : & afin de faire mieux ſentir la méthode générale qu'ils ont employée pour démontrer les théorêmes de cette eſpece, je vais repréſenter les cercles & les polygones inſcrits par des lignes droites, de la même maniere que toutes les grandeurs ſont exprimées dans le cinquiéme Livre des Elémens. ...

Suppoſons donc que les droites AB & AD repréſentent les aires de deux cercles que l'on veut comparer enſemble, & que AP & AQ repréſentent deux polygones ſemblables inſcrits dans ces cercles. En ſubdiviſant continuellement les arcs circulaires qui ſoutiennent les côtés de ces polygones, on augmentera leurs aires & elles approcheront toujours plus des aires circulaires AB & AD, enſorte qu'à la fin leur différence ſera moindre qu'aucune quantité déterminable; parce que le triangle, qui eſt ſouſtrait de chaque ſegment circulaire à chaque nouvelle diviſion eſt toujours plus grand que la moitié de ce ſegment. A meſure que les polygones inſcrits dans les deux cercles, deviennent plus grands, ils conſervent toujours entr'eux la même proportion conſtante, & cette raiſon invariable de ces polygones doit auſſi être la raiſon des cercles eux-mêmes. Car ſi cela n'étoit pas, ſuppoſons que la raiſon des premiers polygones AP & AQ, l'un à l'autre, fût la même que celle du cercle AB, à une grandeur AE moindre que le cercle AD; ſuppoſons auſſi que les ſubdiviſions des arcs de cercle ſoient continuées, juſques à ce que la différence, entre le cercle & le polygone inſcrit, ſoit moindre que ED; de maniere que ce polygone puiſſe être repréſenté par A q plus grand que AE, & que A p repréſente un polygone inſcrit dans le cercle AB & ſemblable au polygone A q. Donc puiſque AP : AQ : : AB : AE par l'hypotheſe, & que le polygone A p : A q : : AP : AQ étant tous en raiſon doublée des diamétres; il ſuit que AB : AE : : A p : A q, & que le cercle AB étant plus grand que A p, ſon polygone inſcrit; AE ſera plus grand que A q; mais A q eſt ſuppoſé plus grand que AE. Donc il eſt impoſſible que le polygone AP ſoit au polygone AQ, comme le cercle AB eſt à AE, moindre que le cercle AD. Par la même raiſon AQ n'eſt pas à AP, comme AD eſt à une grandeur (AF) moindre que AB. D'où il ſuit que nous ne pouvons pas ſuppoſer que AP ſoit à AQ, comme AB eſt à une grandeur A e plus grande que AD; parce que ſi nous prenons AF à AB comme



AD à A e, AF ſera moindre que AB, & AP ſera à AQ comme AF moindre que AB eſt à AD, contre ce qui a été démontré. Il ſuit donc que AP n'eſt pas à AQ comme AB à une grandeur plus grande ou plus petite que AD; mais que la raiſon des cercles AB & AD, l'un à l'autre, eſt la même que la raiſon invariable des polygones ſemblables AP & AQ inſcrits dans ces cercles, qui eſt la raiſon doublée de leurs diamétres.

ANNEXE 2 - Leonhard Euler, *Élémens d'algèbre*, traduit de l'allemand (Lyon : Jean-Marie Bruysset, 1774).

298.

On pourra de la même maniere réfoudre en férie infinie la fraction $\frac{1}{1+a}$, en divifant

$$
\begin{array}{l}
1+a)\ 1 \quad (1-a+aa-a^3+a^4 \\
\underline{1+a} \\
\quad -a \\
\quad \underline{-a-aa} \\
\qquad +aa \\
\qquad \underline{+aa+a^3} \\
\qquad\quad -a^3 \\
\qquad\quad \underline{-a^3-a^4} \\
\qquad\qquad +a^4 \\
\qquad\qquad \underline{+a^4+a^5} \\
\qquad\qquad\quad -a^5,\ \&c.
\end{array}
$$

d'où il fuit que la fraction $\frac{1}{1+a}$ eft égale à la fuite,

$$1-a+aa-a^3+a^4-a^5+a^6-a^7,\ \&c.$$

299.

Si l'on pofe $a=1$, on a cette comparaifon remarquable :

$$\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}=1-1+1-1+1-1+1-1\,;$$

la férie donne 0 ; & fi on finit par $+1$, elle donne 1. Mais c'eft-là précifément ce qui tranche le nœud ; car puifqu'on doit continuer jufqu'à l'infini fans s'arrêter jamais ni à -1, ni à $+1$, il eft clair que la fomme ne peut être ni 0 ni 1, & qu'il faut que ce réfultat final tienne un milieu entre ces deux, & qu'il foit $\frac{1}{2}$.