LU3MA209 –
Éléments d’histoire des mathématiques
2022-2023

L’ÉQUIPE ENSEIGNANTE :
David AUBIN et Thomas BERTHOD

– Examen final –

Lundi 15 mars 2023, 14h–16h, Atrium 128.

Toute documentation est interdite, sauf notes de cours et notes manuscrites.

PARTIE 1 : Angles sous-tendu par une même corde (7 pts)

Vous trouverez en **annexe 1** la proposition 20 du livre 2 des *Éléments* d’Euclide (trad. Peyrard).

1) [4 pts] Rédigez un commentaire détaillé de la proposition en expliquant toutes les autres propositions employées par Euclide.
2) [3 pts] Utilisez cette proposition pour démontrer que l’angle d’un triangle inscrit dans un demi-cercle est droit.

PARTIE 2 : Extraction de la racine carrée selon Newton (7 pts)

En **annexe 2**, vous trouverez un extrait de la *Méthode des fluxions* de Newton (trad. Buffon, 1740).

1) [2 pts] Comment interprétez-vous les opérations effectuées par Newton dans cet extrait ?
2) [2 pts] Expliquez comment le résultat obtenu se rapproche du binôme de Newton ?
3) [3 pts] Quels sont les enjeux liés à la convergence des séries dans cet exemple. Pourquoi Newton ne s’en préoccupe-t-il pas ? (Votre réponse peut inclure des considérations mathématiques et historiques).

PARTIE 3 : Trouver la tangente selon Newton (6 pts)

En **annexe 3**, vous trouverez un autre extrait de la *Méthode des fluxions* de Newton (trad. Buffon, 1740).

1) [3 pts] Comment interprétez-vous les opérations effectuées par Newton dans cet extrait (cas général et exemple) ?
2) [3 pts] Détaillez les différences et points communs avec la méthode utilisée par L’Hôpital dans *L’Analyse des infiniments petits* (vue en TD).

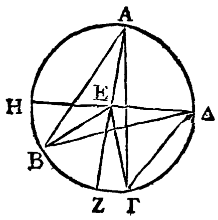
ANNEXES

ANNEXE 1 – Euclide.

PROPOSITION XX.

Dans un cercle, l'angle au centre est double de l'angle à la circonférence, quand ces angles ont pour base le même arc.

Soit le cercle ABΓ, que l'angle BEΓ soit au centre de ce cercle, que l'angle BAΓ soit à la circonférence, et que ces angles ayent pour base le même arc BΓ; je dis que l'angle BEΓ est double de l'angle BAΓ.



Joignons la droite AE, et prolongeons-la vers Z.

Puisque EA est égal à EB, l'angle EAB est égal à l'angle EBA (5. 1); donc les angles EAB, EBA sout doubles de l'angle EAB. Mais l'angle BEZ est égal aux angles EAB, EBA (32. 1); donc l'angle BEZ est double de l'angle EAB. L'angle ZEΓ est double de l'angle ZAΓ par la même raison; donc l'angle entier BEΓ est double de l'angle entier BAΓ.

Que l'angle BAΓ change de position, et qu'il soit un autre angle BΔΓ; ayant joint la droite ΔE, prolongeons-la vers H. Nous démontrerons semblablement que l'angle HEΓ est double de l'angle HΔΓ; mais l'angle HEB est double de l'angle HΔB; donc l'angle restant BEΓ est double de l'angle restant BΔΓ. Donc, etc.

ANNEXE 2 – Newton.

Exemples de Reduction par l'Extraction des Racines.

XI. La quantité $aa + xx$ étant proposée, vous pouvez en extraire la Racine quarrée, comme vous le voyez ici.

$$aa + xx \left(a + \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} + \frac{7x^{10}}{256a^9} - \frac{21x^{12}}{1024a^{11}}, \text{ \&c.} \right.$$

$$aa$$

$$0 + xx$$

$$+ xx + \frac{x^4}{4a^2}$$

$$- \frac{x^4}{4a^2}$$

$$- \frac{x^4}{4a^2} - \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{64a^6}$$

$$+ \frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{64a^6}$$

$$+ \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{16a^6} - \frac{x^{10}}{64a^8} + \frac{x^{12}}{256a^{10}}$$

$$- \frac{5x^8}{64a^6} + \frac{x^{10}}{64a^8} - \frac{x^{12}}{256a^{10}}, \text{ \&c.}$$

$$- \frac{5x^8}{64a^6} - \frac{5x^{10}}{128a^8} + \frac{5x^{12}}{512a^{16}}$$

$$+ \frac{7x^{10}}{128a^8} - \frac{7x^{12}}{512a^{10}}, \text{ \&c.}$$

$$+ \frac{7x^{10}}{128a^8} + \frac{7x^{12}}{256a^{10}}$$

$$- \frac{21x^{12}}{512a^{10}}, \text{ \&c.}$$

La Racine se trouve donc être $a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5}$, &c.

On peut observer que vers la fin de l'Opération je néglige tous les Termes dont les Dimensions surpassent les Dimensions du dernier Terme, c'est-à-dire du Terme auquel je veux finir ma suite, par Exemple, $\frac{x^{12}}{a^{11}}$.

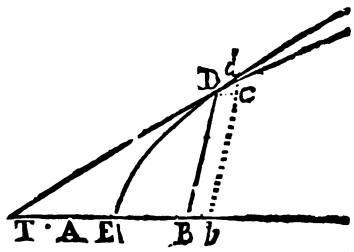
ANNEXE 3 – Newton (bis).

PROBLEME IV.

Tirer les Tangentes des Courbes.

PREMIERE MANIERE.

I. ON peut tirer les Tangentes différemment, selon les différentes Relations des Courbes aux Lignes droites, & premierement soit BD une Ligne droite Ordonnée sous un Angle donné à une autre Ligne droite AB, prise pour Base ou Abscisse, & soit BD terminée à une Courbe ED. Faites mouvoir cette Ordonnée & faites-lui parcourir un Espace indéfiniment petit & parvenir à *bd*. Elle aura augmenté du Moment *cd*, tandis que AB aura augmenté du Moment B*b*, auquel D*c* est égal & parallele. Prolongés D*d* jusqu'à ce qu'elle rencontre AB en T, cette Ligne touchera la Courbe en D ou *d*, & les Triangles *dc*D, DBT seront semblables ; ce qui donne TB : BD :: D*c* ou B*b* : *cd*.



II. La Relation de BD à AB est donnée par l'Equation à la Courbe ; cherchez par le Prob. 1. la Relation des Fluxions, & prenez TB à BD dans le Raport de la Fluxion de AB à la Fluxion de BD ; la Ligne TD touchera la Courbe au Point D.

III. EXEMPLE. 1. Nommant AB, x & BD, y, soit leur Raport $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. Celui des Fluxions sera $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0$. Ainsi $\dot{x} : \dot{y} :: 3xx - 2ax + ay : 3y^2 - ax ::$ BD (y) : BT. Donc BT $= \frac{3y^3 - axy}{3x^2 - 2ax + ay}$. Et le Point D & de la les Lignes DB & AB ou x & y étant données, la longueur BT sera donnée, ce qui détermine la Tangente TD.