LU3MA209 –
Éléments d'histoire des mathématiques
2021-2022

L'ÉQUIPE ENSEIGNANTE :
David AUBIN
Pierre SAUREL

– Examen partiel –

vendredi 18 mars 2022, 10h45–12h15, **amphi 45A**.

Toute documentation est interdite, sauf notes de cours et notes manuscrites.

PARTIE 1 : Moyenne proportionnelle (5pts)

On rappelle que la proposition 13 du livre 6 des *Éléments* d'Euclide s'énonce : « Deux droites étant données, trouver une moyenne proportionnelle ». On rappelle également que la démonstration de cette proposition (vue en TD) s'appuie sur la proposition 8 du livre 6, que vous trouverez en **annexe 1**.

Reportez-vous y pour rédiger un commentaire détaillé de la démonstration dans lequel vous ferez attention à bien rappeler (ou déduire du contexte) les énoncés des propositions 32 du livre 1 et 5 du livre 6, ainsi que la définition 1 du livre 6. [Vous pouvez passer rapidement sur la seconde partie.] Expliquez également le corollaire et donnez la méthode pour trouver une moyenne proportionnelle à deux droites données.

PARTIE 2 : Polygones inscrits et circonscrits (8 pts)

En **annexe 2**, vous trouverez la proposition 4 du traité de la sphère et du cylindre d'Archimède. Référez-vous y pour répondre aux questions suivantes en vous servant de vos connaissances des mathématiques actuelles :

1) [1 pt] Étant donné des polygones réguliers à n côtés, respectivement, inscrits et circonscrits dans un cercle de rayon r, trouvez une formule pour c_n et C_n, la longueur de leurs côtés respectifs ? Pouvez-vous prouver que le rapport $C_n > c_n$ pour tout n ?
2) [1 pt] Expliquez pourquoi ceci est équivalent à la proposition donnée par Archimède ?
3) [2 pts] A l'aide du (1) ci-dessus, démontrez la proposition 6 du même traité (non incluse) qui dit essentiellement que l'aire du polygone circonscrit est strictement plus grande que l'aire du polygone inscrit, quel que soit n. On en déduit qu'on peut inscrire dans un cercle un polygone équilatère, et lui circonscrire un polygone semblable au premier, de manière que la raison de l'aire du polygone circonscrit P_n à celle du polygone inscrit p_n soit telle que :

$$\frac{P_n}{p_n} < a, \text{ pour tout } a > 1.$$

4) [1 pt] Dans la preuve donnée par Archimèdes, identifiez à l'aide des numéros de ligne où se trouve la construction.
5) [2 pts] Expliquez comment Archimède prouve que ΓN est le côté d'un polygone équilatère (lignes 16-19).
6) [1 pt] Prouvez comme Archimède que la raison $\frac{\Pi\mathrm{O}}{\Gamma\mathrm{N}}$ est plus petite que la raison $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$.

PARTIE 3 :
La surface du cône (7pts)

Nous allons maintenant nous servir de ces résultats pour démontrer la formule de l'aire du cône (sans la base) : $S = 2\pi ad$, où a est le rayon du cercle à la base et d le côté du cône (ou son apothème). Référez-vous à la proposition 15 et sa démonstration en **annexe 3**. Nous allons la démontrer en suivant les étapes suivantes :

1) [1 pt] Montrez d'abord que l'énoncé donné par Archimède est équivalent à la formule ci-dessus.
2) La preuve que la surface S du cône sans la base est égale à B, la surface du cercle B se fait par contradiction et se divise en deux parties : (a) on suppose d'abord que $B < S$; (b) puis l'inverse $B > S$, ce qui entraîne à chaque fois une contradiction.
   (a) On se concentre d'abord sur la première partie.
      i. [lignes 12-17] On suppose, grâce à la proposition 6 démontrée à l'exercice précédent que l'on a pu inscrire et circonscrire au cercle B des polygones réguliers à n cotés de telle sorte que
      $$\frac{P_n}{p_n} < \frac{S}{B}$$
      [2 pts] Expliquez pourquoi.

      ii. [lignes 17-22] On sait que l'aire d'un polygone régulier inscrit dans ou circonscrit à un cercle est proportionnelle au rayon du cercle au carré. De là, Archimède déduit que, en notant $P_n^{(A)}$ et $P_n^{(B)}$, les aires respectives des polygones circonscits aux cercles A et B :
      $$\frac{P_n^{(A)}}{P_n^{(B)}} = \frac{\Gamma}{\Delta}$$
      [2 pts] Expliquez pourquoi.

      iii. [lignes 22-26] Soit $Q_n^{(A)}$ la surface (sans la base) d'une pyramide ayant pour base le polygone régulier à n côté circonscrit au cercle A et pour hauteur la même hauteur que le cône. Alors, Archimède affirme que
      $$\frac{P_n^{(A)}}{Q_n^{(A)}} = \frac{\Gamma}{\Delta}$$
      [1 pt] Expliquez pourquoi.

      iv. [1 pt] Expliquez ensuite pourquoi on obtient alors une contradiction avec la supposition (a).
   (b) [2 pts en bonus] Commentez de manière similaire la seconde partie de la preuve.

ANNEXES

ANNEXE 1 – Livre 6, proposition 8 des *Éléments* d'Euclide. Extraits de l'édition de F. Peyrard (Paris, 1804), p. 225-227

PROPOSITION VIII.

THÉORÈME.

Si dans un triangle rectangle on conduit une perpendiculaire de l'angle droit sur la base, les triangles placés autour de la perpendiculaire sont semblables au triangle total et semblables entr'eux.

Soit le triangle rectangle ABC (fig. 128) dont l'angle BAC est droit; du point A conduisez la perpendiculaire AD sur la base BC : je dis que les triangles ABD, ADC sont semblables au triangle total ABC et semblables entr'eux.

Car puisque l'angle BAC est égal à l'angle ADB, étant droits l'un et l'autre, et que l'angle B est commun aux deux triangles ABC, ABD, l'angle restant ACB sera égal à l'angle restant BAD (prop. 32. 1) : donc les deux triangles ABC, ABD sont équiangles : donc le côté BC qui soutend l'angle droit du triangle ABC, est au côté BA qui soutend l'angle droit du triangle ABD comme le côté AB qui soutend l'angle C du triangle ABC, est au côté BD qui soutend un angle égal à l'angle C, c'est-à-dire l'angle BAD du triangle ABD, et enfin comme le côté AC est au côté AD qui soutend un angle B commun à ces deux triangles : donc les triangles ABC, ABD sont équiangles, et les côtés placés autour à des angles égaux sont proportionnels entre eux (prop. 4. 6) : donc le triangle ABC est semblable au triangle ABD (déf. 1. 6). Nous démontrerons que de même le triangle ADC est semblable au triangle ABC : donc chacun des triangles ABD, ADC est semblable au triangle total ABC.

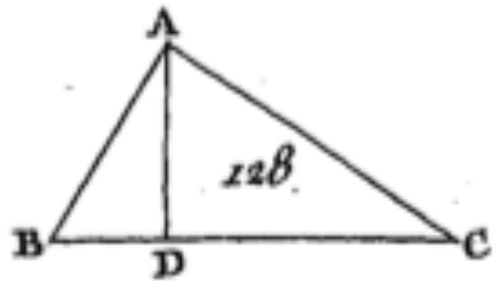
Je dis de plus que les triangles ABD, ADC sont semblables entr'eux.

Car puisque l'angle droit BDA est égal à l'angle droit ADC, et à cause qu'il a été démontré que l'angle BAD est égal à l'angle C, l'angle restant B sera égal à l'angle restant DAC (prop. 32. 1) : donc les deux triangles ABD, ADC sont équiangles : donc le côté BD du triangle ABD, qui soutend l'angle BAD est au côté DA du triangle ADC, qui soutend l'angle C égal à l'angle BAD, comme le côté AD du triangle ABD qui soutend l'angle B est au côté DC du triangle ADC qui soutend l'angle DAC égal à l'angle B, et comme le côté BA qui soutend l'angle droit ADB est au côté AC qui soutend l'angle droit ADC (prop. 4. 6) : donc le triangle ABD est semblable au triangle ADC (déf. 1. 6).

Donc si dans un triangle rectangle, on conduit une perpendiculaire de l'angle droit sur la base, les triangles placés autour de la perpendiculaire sont semblables au triangle total et semblables entr'eux; ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

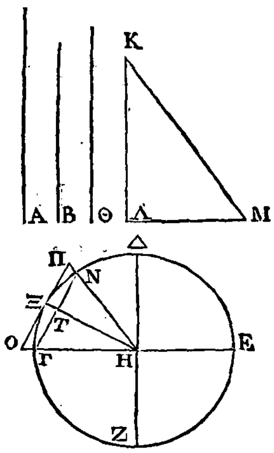
Il suit de là que, dans un triangle rectangle la perpendiculaire conduite de l'angle droit sur la base, est moyenne proportionnelle entre les segmens de la base, et que chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre la base et le segment qui lui est contigu.



ANNEXE 2 - Archimède, *De la sphère et du cylindre*, trad. F. Peyrard (Paris : F. Buisson, 1807). [http://remacle.org/bloodwolf/erudits/archimede/table.htm]

PROPOSITION IV.

Deux quantités inégales et un cercle étant donnés, il est possible d'inscrire un polygone dans ce cercle, et de lui en circonscrire un autre (semblable), de manière que la raison du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit soit moindre que la raison de la plus grande quantité à la plus petite.

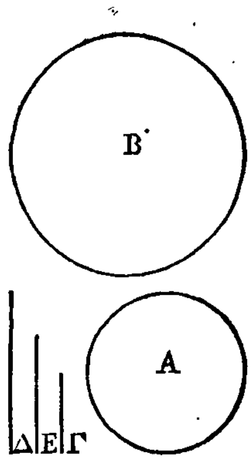


Soient donnés les quantités A, B, et le cercle ΓΔΕΖ : je dis qu'il est possible de faire ce qui est proposé.

Cherchons deux droites Θ, ΚΛ, de manière que Θ étant la plus grande, la raison de la droite Θ à la droite ΚΛ soit moindre que la raison de la plus grande quantité donnée à la plus petite (3). Du point Λ et sur la droite ΚΛ, élevons la perpendiculaire ΛΜ; et du point K menons la droite KM égale à la droite Θ ; ce qui peut se faire. Conduisons les deux diamètres ΓΕ, ΔΖ perpendiculaires l'un sur l'autre. Si l'angle ΔΗΓ est partagé en deux parties égales, sa moitié en deux parties égales, et ainsi de suite, il restera enfin un certain angle plus petit que le double de l'angle ΛΚΜ. Qu'on ait cet angle et que cet angle soit ΝΗΓ. Menons la corde ΝΓ. La droite ΝΓ sera le côté d'un polygone équilatère ; car puisque l'angle ΝΗΓ mesure l'angle droit ΔΗΓ, et que l'arc ΝΓ mesure le quart de la circonférence, l'arc ΝΓ mesurera la circonférence entière. Il est donc évident que la droite ΓΝ est le côté d'un polygone équilatère. Partageons l’angle ΝΗΓ en deux parties égales par la droite ΗΞ, que la droite ΟΞΠ touche le cercle au point Ξ ; et menons les droites ΗΗΠ, ΗΓΟ, il est évident que la droite ΠΟ sera le côté d'un polygone circonscrit au cercle, équilatère et semblable au polygone inscrit dont le côté est ΝΓ. Puisque l'angle ΝΗΓ est moindre que le double de l’angle ΛΚΜ, et que l'angle ΝΗΓ est double de l'angle ΤΗΓ, l'angle ΤΗΓ sera plus petit que l’angle ΛΚΜ. Mais les angles placés aux points Λ, Τ sont droits ; donc la raison de la droite ΜΚ à la droite ΛΚ est plus grande que la raison de la droite ΓΗ à la droite ΗΤ. Mais la droite ΓΗ est égale à la droite ΗΞ ; donc la raison de ΗΞ à ΗΤ, c'est-à-dire la raison de ΠΟ à ΝΓ est moindre que la raison de ΜΚ à ΚΛ. Mais la raison de ΚΜ à ΚΛ est moindre que la raison de A à B, et la droite ΠΟ est le côté du polygone circonscrit, tandis que la droite ΓΝ est le côté du polygone inscrit. Ce qu'il fallait trouver.

PROPOSITION XV. Archimède, *De la sphère et du cylindre*, trad. F. Peyrard (Paris : F. Buisson, 1807). [http://remacle.org/bloodwolf/erudits/archimede/table.htm]

La surface d'un cône droit quelconque, la base exceptée, est égale à un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre le côté du cône et le rayon du cercle qui est la base du cône.



Soit le cône droit dont le cercle A est la base ; que la droite Γ soit le rayon de la base ; que la droite Δ soit égale au côté du cône ; que la droite E soit moyenne proportionnelle entre Γ, Δ, et enfin que le cercle B ait pour rayon une droite égale à la droite E. Je dis que le cercle B est égal à la surface du cône, la base exceptée.

Car si le cercle B n'est pas égal à la surface du cône, la base exceptée, il est ou plus grand ou plus petite Supposons d'abord qu'il soit plus petit Puisqu'on a deux quantités inégales, la surface du cône et le cercle B, et que la surface du cône est la plus grande, on peut inscrire dans le cercle B un polygone équilatère, et lui circonscrire un polygone semblable au premier, de manière que la raison du polygone circonscrit au polygone inscrit soit moindre que la raison de la surface du cône au cercle B (6). Imaginons que l'on ait circonscrit au cercle A un polygone semblable au polygone circonscrit au cercle B ; et supposons que le polygone circonscrit au cercle A soit la base d'une pyramide qui ait le même sommet que le cône. Puisque les polygones circonscrits aux cercles A, B sont semblables, ils sont entre eux comme les carrés des rayons de ces cercles ; c'est-à-dire, comme les carrés des droites Γ, E, ou comme les droites Γ, Δ. Mais le polygone circonscrit au cercle A est à la surface de la pyramide circonscrite au cône, comme la droite Γ est à la droite Δ. En effet, la droite Γ est égale à la perpendiculaire menée du centre du cercle sur un des côtés du polygone ; la droite Δ est égale au côté du cône ; et le contour du polygone est la hauteur commune de deux rectangles dont les moitiés sont le polygone circonscrit au cercle A, et la surface de la pyramide circonscrite au cône. Donc le polygone circonscrit au cercle A est au polygone circonscrit au cercle B, comme le polygone circonscrit au cercle A est à la surface de la pyramide circonscrite au cône. Donc la surface de la pyramide est égale au polygone circonscrit au cercle B. Donc puisque la raison du polygone qui est circonscrit au cercle B au polygone inscrit est moindre que la raison de la surface du cône au cercle B, la raison de la surface de la pyramide qui est circonscrite au cône au polygone inscrit dans le cercle B, sera moindre que la raison de la surface du cône au cercle B. Ce qui est impossible ; car la surface de la pyramide est plus grande que la surface du cône, ainsi que nous l'avons démontré (13) ; et le polygone inscrit dans le cercle B est au contraire plus petit que le cercle B. Donc le cercle B n'est pas plus petit que la surface du cône.

Je dis à présent que le cercle B n'est pas plus grand que la surface du cône. Car supposons, si cela est possible, que ce cercle soit plus grand. Supposons de nouveau qu'on ait inscrit dans le cercle B un polygone, et qu'on lui en ait circonscrit un autre ; de manière que la raison du polygone circonscrit au polygone inscrit soit moindre que la raison du cercle B à la surface du cône (6). Inscrivons dans le cercle A un polygone semblable à celui qui est inscrit dans le cercle B ; et concevons que ce polygone soit la base d'une pyramide, qui ait le même sommet que le cône. Puisque les polygones inscrits dans les cercles A, B sont semblables, ces polygones sont entre eux comme les carrés des rayons de ces cercles. Donc la raison du polygone inscrit dans le cercle A au polygone inscrit dans le cercle B est égale à la raison de Γ à Δ. Mais la raison de

Γ à Δ est plus grande que la raison du polygone inscrit dans le cercle A à la surface de la pyramide inscrite dans le cône ; car la raison du rayon du cercle A au côté du cône est plus grande que la raison de la perpendiculaire menée du centre sur le côté du polygone à la perpendiculaire menée du sommet du cône sur le côté du même polygone (β). Donc la raison du polygone inscrit dans le cercle A au polygone inscrit dans le cercle B est plus grande que la raison du premier polygone à la surface de la pyramide. Donc la surface de la pyramide est plus grande que le polygone inscrit dans le cercle B. Mais la raison du polygone qui est circonscrit au cercle B au polygone qui lui est inscrit, est moindre que la raison du cercle B à la surface du cône ; donc la raison du polygone qui est circonscrit au cercle B à la surface de la pyramide inscrite dans le cône, est encore moindre que la raison du cercle B à la surface du cône. Ce qui est impossible ; car le polygone circonscrit est plus grand que le cercle B (2), tandis que la surface de la pyramide inscrite dans le cône est plus petite que la surface du cône (13). Donc le cercle B n'est pas plus grand que la surface du cône. Mais ou a démontré qu'il n'est pas plus petit : donc il lui est égal.