LU3MA209 –
Éléments d'histoire des mathématiques
2022-2023

L'ÉQUIPE ENSEIGNANTE :
David AUBIN et Thomas BERTHOD

– Examen partiel –

jeudi 16 mars 2022, 13h45–15h15, **amphi 56A**.

Toute documentation est interdite, sauf notes de cours et notes manuscrites.

PARTIE 1 : Somme des numérateurs et dénominateurs (8 pts)

En **annexe 1**, vous trouverez l'énoncé et la preuve de la proposition 12 du livre 5 des *Éléments* d'Euclide, qu'on peut reformuler ainsi :

Si on a la proportion suivante $p_1 : q_1 :: p_2 : q_2 :: p_3 : q_3 :: \cdots$, quel que soit le nombre de grandeurs impliquées, alors on aura, pour tout i :

$$p_i : q_i :: (p_1 + p_2 + p_3 + \cdots) : (q_1 + q_2 + q_3 + \cdots).$$

Répondez aux questions suivantes :

1) [3 pts] Expliquez d'abord la différence entre nombres et grandeurs dans les mathématiques euclidiennes.
2) [2 pts] Donnez une preuve arithmétique rigoureuse de cette proposition en considérant que toutes les grandeurs p_i et q_i sont des nombres et en assimilant la proportion à une égalité de quotients.
3) [3 pts] Rédigez un commentaire détaillé de la preuve donnée par Euclide pour des grandeurs en général à partir du texte fourni en annexe.

PARTIE 2 : Propriété de la parabole (12 pts)

En **annexe 2**, vous trouverez l'énoncé et la preuve de la proposition 11 du livre 1 des *Coniques* d'Apollonius. Lisez attentivement cette preuve et répondez aux questions suivantes :

1) [3 pts] Quel est l'énoncé de la proposition 4 du livre 1 des *Coniques*, tel que vous pouvez le déduire de cette preuve ?
2) [3 pts] Tenter de donner l'énoncé et de rédiger une preuve euclidienne de la proposition utilisée pour affirmer que $\mathrm{K}\Lambda^2 = \Lambda\mathrm{M} \times \Lambda\mathrm{N}$ dans la preuve d'Apollonius.
3) [3 pts] Rédigez un commentaire détaillé et complet de la preuve d'Apollonius.
4) [3 pts] Expliquez en quoi cette proposition se rapproche conceptuellement de la paramétrisation habituelle de la parabole : $y = ax^2$. A quoi correspond alors géométriquement le paramètre a ?

ANNEXES

ANNEXE 1 – Livre 5, proposition 12 des *Éléments* d'Euclide. Extraits de l'édition de F. Peyrard (Paris, 1814), p. 262-263.

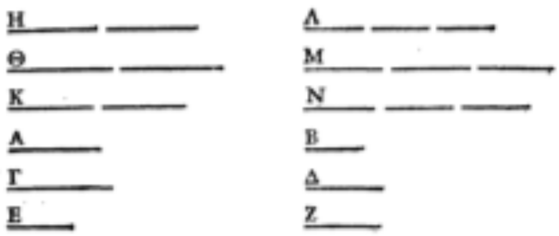
PROPOSITION XII.

Si tant de grandeurs qu'on voudra sont proportionnelles, un des antécédents sera à un des conséquents comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents.

Soient Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ tant de grandeurs proportionnelles qu'on voudra ; que Α soit à Β comme Γ est à Δ et comme Ε est à Ζ ; je dis que Α est à Β comme la somme des antécédents Α, Γ, Ε est à la somme des grandeurs Β, Δ, Ζ.

Prenons des équimultiples quelconques Η, Θ, Κ des grandeurs Α, Γ, Ε, et d'autres équimultiples quelconques Λ, Μ, Ν des grandeurs Β, Δ, Ζ.

Puisque Α est à Β comme Γ est à Δ, et comme Ε est à Ζ ; que l'cn a pris



des équimultiples quelconques Η, Θ, Κ des grandeurs Α, Γ, Ε, et d'autres équimultiples quelconques Λ, Μ, Ν des grandeurs Β, Δ, Ζ ; si Η surpasse Λ, Θ surpasse Μ, et Κ surpasse Ν ; si Η est égal à Λ, Θ est égal à Μ, et Κ égal à Ν ; et si Η est plus petit que Λ, Θ est plus petit que Ν, et Κ plus petit que Ν (déf. 6. 5). Donc, si Η surpasse Λ, la somme des grandeurs Η, Θ, Κ surpasse la somme des grandeurs Λ, Μ, Ν ; si Η est égal à Λ, la somme des grandeurs Η, Θ, Κ est égale à la somme des grandeurs Λ, Μ, Ν ; et si Η est plus petit que Λ, la somme des grandeurs Η, Θ, Κ est plus petite que la somme des grandeurs Λ, Μ, Ν. Mais la grandeur Η et la somme des grandeurs Η, Θ, Κ sont des équimultiples de la grandeur Α et des grandeurs Α, Γ, Ε, parce que si tant de grandeurs qu'on voudra sont les mêmes multiples d'autres grandeurs égales en nombre, chacune de chacune, la somme des premières grandeurs est le même multiple de la somme des secondes, qu'une de ces grandeurs l'est d'une de ces grandeurs (1. 5). Par la même raison, la grandeur Λ et la somme des grandeurs Λ, Μ, Ν sont des équimultiples de la grandeur Β et de la somme des grandeurs Β, Δ, Ζ ; donc Α est à Β comme la somme des grandeurs Α, Γ, Ε est à la somme des grandeurs Β, Δ, Ζ (déf. 6. 5). Donc, etc.

ANNEXE 2 – Livre 1, proposition 11 des *Coniques* d'Apollonius. Extraits de l'édition de Roshdi Rashed (Walter de Gruyter, Berlin, 2008), p. 87-88.

PROPOSITION I.11. — LA CARACTÉRISATION DE LA PARABOLE

Soit $AB\Gamma$ un plan passant par l'axe du cône et un plan $\mathscr{P}$ qui coupe le plan de base suivant ΔE perpendiculaire à $B\Gamma$ en H. Si la droite ZH, intersection du plan $\mathscr{P}$ et du plan $AB\Gamma$, est parallèle à $A\Gamma$, on considère le segment $Z\Theta$ tel que $Z\Theta \perp ZH$ et que $\frac{Z\Theta}{ZA} = \frac{B\Gamma^2}{AB \cdot A\Gamma}$; alors si K est un point quelconque de la section et Λ le point de ZH tel que $K\Lambda \mathbin{/\!/} \Delta E$, on a

$$(1) \qquad K\Lambda^2 = Z\Theta \cdot \Lambda Z.$$

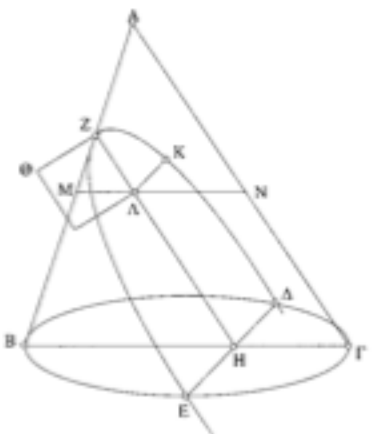


Fig. 11

Par Λ on mène $MN \mathbin{/\!/} B\Gamma$; le plan (MKN) est parallèle au plan de base et d'après la proposition I.4 il coupe la surface conique suivant un cercle de diamètre MN ; on a donc $K\Lambda^2 = \Lambda M \cdot \Lambda N$. Les triangles $ZM\Lambda$, AMN et $AB\Gamma$ sont semblables, d'où

$$\frac{MN}{NA} = \frac{M\Lambda}{\Lambda Z} = \frac{B\Gamma}{\Gamma A} \text{ et } \frac{MN}{MA} = \frac{\Lambda M}{MZ} = \frac{\Lambda N}{AZ} = \frac{B\Gamma}{BA}.$$

Or par hypothèse

$$\frac{Z\Theta}{ZA} = \frac{B\Gamma}{\Gamma A} \cdot \frac{B\Gamma}{BA},$$

donc

$$\frac{Z\Theta}{ZA} = \frac{M\Lambda}{\Lambda Z} \cdot \frac{\Lambda N}{AZ} = \frac{K\Lambda^2}{\Lambda Z \cdot AZ},$$

d'où l'égalité (1).

La section est une parabole et le segment $Z\Theta$ est son côté droit associé au diamètre ZH. On a donc montré que *tout* point K pris sur la section vérifie (1).