LU3MA209 –
Éléments d'histoire des mathématiques
2020-2021

L'ÉQUIPE ENSEIGNANTE :

David AUBIN
Matthias CLÉRY
Azmiya PADAVIA

– *Examen final* –

Samedi 15 mai 2021, 11h–12h30, salle **amphi A1**.

Toute documentation est interdite, sauf notes de cours et notes manuscrites.

Question unique : L'analyse des infiniment petit

Vous trouverez en **annexe** un extrait de *l'Analyse des infiniment petits* du Marquis de l'Hôpital (1696). En vous servant de ce texte, répondez aux questions suivantes [en principe, il n'est pas nécessaire d'avoir su répondre à la question précédente pour tenter de répondre à la suivante] :

1. Considérez d'abord la figure 8 (page suivante). Notez qu'on a posé : $PE = s$; $PF = t$; $PQ = x$; $PM = y$ et $PN = z$, ainsi que : $Oq = dx$; $Rm = dy$; et $Sn = -dz$.
   a. [2 pts] Expliquez pourquoi, à partir des principes du calcul différentiel, on peut considérer que les triangles QPE et qOQ sont semblables.
   b. [2 pts] Cela étant, montrez à l'aide de cette propriété que $OQ = \frac{sdx}{x}$.

2. Considérez l'ensemble de la proposition IV.
   a. [1 pt] On montre de manière similaire à celle employée plus haut que $SN = -\frac{tdz}{z}$. Expliquez pourquoi le signe moins semble nécessaire à l'Hôpital.
   b. [1 pt] Montrez donc que $dz = -\frac{szdx}{tx}$.
   c. [2 pts] Quelle est la valeur de PT en fonctions de x, y, dx et dy ?
   d. [1 pt] Expliquez pourquoi l'Hôpital considère enfin que PT peut être exprimé en des termes tous connus ?

3. Considérez maintenant le premier exemple (paragraphe 21), soit l'équation $y^2 = xz$.
   a. [1 pt] Comment calculez-vous la différence $2ydy = xdz + zdx$ en appliquant les règles de la différentiation énoncées par l'Hôpital ?
   b. [2 pts] Montrez alors que $PT = \frac{2st}{t-s}$.

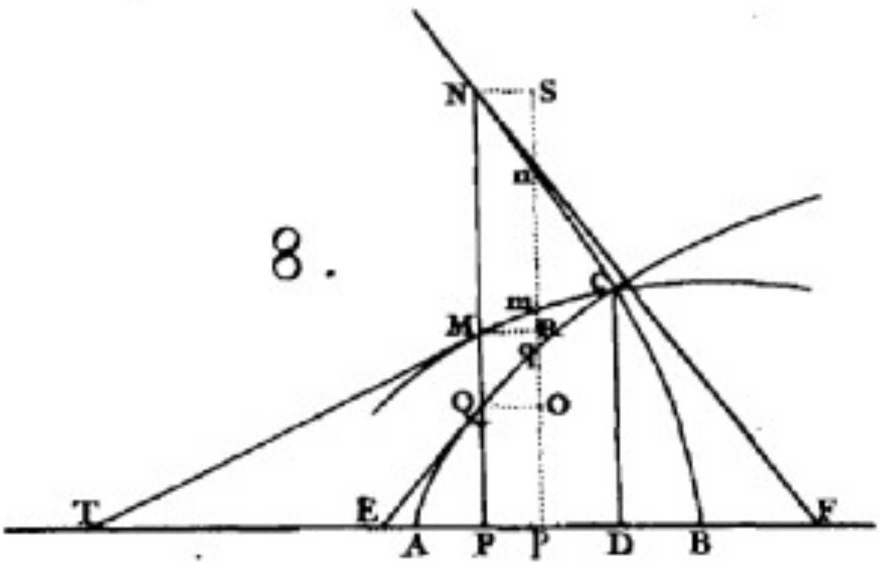
4. Exprimons ce problème de manière moderne.

    a. [2 pts] Pour une fonction $\eta = f(\xi)$, il faut d'abord calculer la valeur de la sous-tangente de la courbe qui exprime la fonction dans un graphe cartésien. Notons ξ_f l'abscisse à l'origine de la tangente au point ξ de la fonction $f(\xi)$, c'est-à-dire l'intersection entre la tangente et l'axe des ξ. Exprimez la valeur de ξ_f en fonction de $f(\xi)$ et $f'(\xi)$.

    b. [3 pts] Si on a trois fonctions $f(\xi)$, $g(\xi)$ et $h(\xi)$, telles que $h^2 = fg$, alors que peut-on dire de la relation entre les abscisses à l'origine ξ_f, ξ_g et ξ_h ?

5. [2 pts] Commentez la solution donnée par l'Hôpital pour le problème général : $y^{m+n} = x^m z^n$.

6. [3 pts] Dans le dernier paragraphe, Guillaume de l'Hôpital suppose que deux des trois courbes sont des lignes droites, quelles conclusions en tire-t-il par rapport à la troisième ? Pourquoi ?



ANNEXE

ANNEXE – Guillaume de L'Hôpital, *Analyse des infiniment petits*, p. 20-21.

PROPOSITION IV.

Problême.

20. SOIENT *deux lignes courbes* AQC, BCN *qui ayent pour diametre la droite* TEABF, *& dont l'on ſçache mener les tangentes* QE, NF ; *ſoit de plus une autre ligne courbe* MC *telle que la relation des appliquées* MP, QP, NP, *ſoit exprimée par une équation quelconque. Il faut d'un point donné* M *ſur cette derniere courbe luy mener la tangente* MT.

Ayant imaginé aux points Q, M, N, les petits triangles QOq, MRm, NSn, & nommé les connuës PE, s ; PF, t ; PQ, x ; PM, y ; PN, z ; l'on aura $Oq = dx$, $Rm = dy$, $Sn = -dz$,* parce que x & y croiſſant, z diminuë. Et à cauſe des triangles ſemblables QPE & qOQ, NPF & nSN, MPT & mRM ; l'on aura $QP\ (x).\ PE\ (s) :: qO\ (dx).\ OQ$ ou MR ou $SN = \frac{sdx}{x}$. Et $NP\ (z).\ PF\ (t) :: nS\ (-dz).\ SN = \frac{-tdz}{z} = \frac{sdx}{x}$ (d'où l'on tire $dz = \frac{-szdx}{tx}$). Et $mR\ (dy).\ RM\ (\frac{sdx}{x}) :: MP\ (y).\ PT = \frac{sydx}{xdy}$. Or ſi l'on met dans la différence de l'équation donnée, à la place de dz, ſa valeur $-\frac{szdx}{tx}$, on trouvera une valeur de dx en dy, laquelle étant ſubſtituée dans $\frac{sydx}{xdy}$, les dy ſe détruiront, & la valeur de la ſoutangente PT ſera exprimée en termes tous connus.

EXEMPLE.

21. SOIT $yy = xz$, dont la différence eſt $2ydy = zdx + xdz = \frac{tzdx - szdx}{t}$, en mettant pour dz ſa valeur negative $-\frac{szdx}{tx}$, d'où l'on tire $dx = \frac{2tydy}{tz - sz}$; & partant $PT\ (\frac{sydx}{xdy}) = \frac{2styy}{txz - sxz} = \frac{2st}{t-s}$, en mettant pour yy ſa valeur xz.

Soit maintenant l'équation générale $y^{m+n} = x^m z^n$, dont la différence eſt $\overline{m+n}\,y^{m+n-1}dy = mz^n x^{m-1}dx + nx^m z^{n-1}dz = \frac{mtz^n x^{m-1}dx - nsz^n x^{m-1}dx}{t}$, en mettant pour dz ſa valeur $-\frac{szdx}{tx}$, d'où l'on tire $PT\ (\frac{sydx}{xdy}) = \frac{mst + nsty^{m+n}}{mtz^n x^m - nsz^n x^m} = \frac{mst + nst}{mt - ns}$, en mettant pour y^{m+n} ſa valeur $x^m z^n$.

On peut remarquer que ſi les courbes AQC, BCN devenoient des lignes droites, la courbe MC ſeroit alors une des Sections coniques à l'infini ; ſçavoir une Ellipſe lorſque l'appliquée CD, qui part du point de rencontre C, tombe entre les extrémités A, B ; une Hyperbole lorſqu'elle tombe de part ou d'autre ; & enfin une Parabole lorſque l'une des extrémités A ou B eſt infiniment éloignée de l'autre, c'eſt-à-dire lorſque l'une des lignes droites CA ou CB eſt parallele au diametre AB.