LU3MA209 –
Éléments d'histoire des mathématiques
2020-2021

L'ÉQUIPE ENSEIGNANTE :
David AUBIN
Matthias CLÉRY
Azmiya PADAVIA

– *Examen partiel* –

vendredi 19 mars 2021, 10h45–12h45, salle **amphi B2**.

Toute documentation est interdite, sauf notes de cours et notes manuscrites.

Thème : le nombre d'or

PARTIE 1 :
Proposition 11 du livre 2 des *Éléments* d'Euclide (5 pts)

Vous trouverez en **annexe 1** le texte d'Euclide dans la traduction de François Peyrard. En vous servant de ce texte, répondez aux questions suivantes :

1. [1 pt] Énoncez ce que vous pensez que doit être la proposition 46 du livre 1, telle que vous pouvez la déduire à partir du texte. Rédigez-en une preuve de type euclidien.

2. [1 pt] Dans la démonstration de la proposition 11 du livre 2, on fait appel à la proposition 6 du même livre, dont vous pouvez aussi déduire l'énoncé à partir du texte. Exprimez cette proposition sous la forme d'une identité algébrique évidente.

3. [2 pts] Rédigez un commentaire structuré de la preuve de la proposition 11 du livre 2.

4. [1 pt] En posant $\mathrm{AB} = a$ et $\mathrm{AH} = x$, exprimez cette proposition sous la forme d'une équation algébrique et résolvez-la. Trouvez toutes ses solutions positives.

PARTIE 2 :
Propositions 30 du livre 6 des *Éléments* d'Euclide (5 pts)

Vous trouverez en **annexe 2** le texte d'Euclide dans la traduction de François Peyrard. En vous servant de ce texte, répondez aux questions suivantes :

5. [2 pts] Considérez d'abord la partie intitulée « Autrement ». Déduisez-en le sens de l'énoncé de la proposition. Que veut donc dire couper un segment en moyenne et extrême raison ?
6. [3 pts] Considérez ensuite la première démonstration et donnez-en un commentaire détaillé en comparant cette démonstration avec la seconde proposée.

PARTIE 3 :
Al Kwarizmi : quand le carré et les racine égalent le nombre (5 pts)

Vous trouverez en **annexe 3** une traduction de l'algorithme d'Al Kwarizmi pour résoudre une équation algébrique du 2^{nd} degré. En vous servant de ce texte, répondez aux questions suivantes :

7. [2 pts] Exprimez la solution de l'équation avec une notation actuelle. Vérifiez que cela correspond bien à la solution habituelle.
8. [3 pts] Sauriez-vous en proposer une preuve géométrique et/ou algébrique ?

PARTIE 4 :
Luca Pacioli et la divine proportion (5 pts)

Vous trouverez en **annexe 4** une traduction d'un extrait de la *Divine Proportion* de Luca Pacioli (imprimée 1509). En vous servant de ce texte, répondez aux questions suivantes :

9. [2 pts] En utilisant l'algorithme de résolution proposé par Al Kwarizmi, retrouvez la solution au problème posé par Luca PaciolI.
10. [3 pts] En vous servant des textes, mais aussi de vos connaissances acquises sur l'histoire des mathématiques, commentez les points communs et les différences entre l Euclide et Pacioli concernant la conceptualisation du problème de la division en moyenne et extrême raison et les solutions proposées par chacun.

ANNEXES

ANNEXE 1 – Livre 2, proposition 11 des *Éléments* d'Euclide, propositions 30. Extraits de l'édition de F. Peyrard (Paris, 1804), p. 99-101.

PROPOSITION XI.

PROBLÈME.

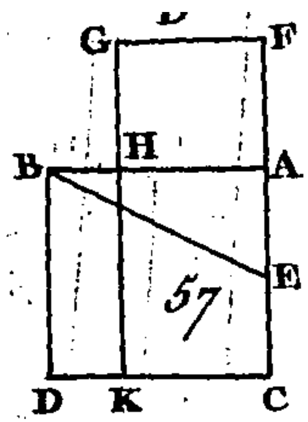
Partager une droite donnée de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un de ses segmens, soit égal au quarré de l'autre segment.

Soit AB (fig. 57) la droite donnée : il faut partager la droite AB de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un de ses segmens, soit égal au quarré de l'autre segment.

Sur la droite AB décrivez le quarré ABDC (prop. 46. 1), partagez la droite AC en deux parties égales en E (prop. 10. 1), et menez la droite BE ; ayant prolongé ensuite la droite CA vers F, faites la droite EF égale à la droite BE (prop. 3. 1), décrivez sur AF le quarré FH, et prolongez la droite GH vers K : je dis que la droite AB est partagée en H de manière que le rectangle compris sous AB et BH est égal au quarré de AH.

Puisque la droite AC est coupée en deux parties égales en E, si nous lui ajoutons directement la droite AF, le rectangle compris sous les droites CF, FA et le quarré de AE, pris ensemble, seront égaux au quarré de EF (prop. 6. 2) ; mais la droite EF est égale à la droite EB : donc le rectangle compris sous CF, FA et le quarré de AE, pris ensemble, sont égaux au quarré de EB ; mais les quarrés de BA, AE sont égaux au quarré de EB (prop. 47. 1), car l'angle BAE est droit ; donc le rectangle compris sous CF, FA avec le quarré de AE est égal aux quarrés de BA, AE. Donc, si on retranche le quarré de AE qui est commun, le rectangle compris sous CF, FA sera égal au quarré de AB ; mais le rectangle FK est compris sous les droites CF, FA, puisque la droite AF est égale à la droite FG, et le quarré de AB est égal au quarré AD : donc le rectangle FK est égal au quarré AD : donc, si l'on retranche le rectangle commun AK, le quarré FH sera égal au rectangle HD ; mais le rectangle HD est compris sous les droites AB, BH, puisque AB est égal à BD et que FH est le quarré de AH : donc le rectangle compris sous AB, BH sera égal au quarré de AH.

Donc la droite AB est coupée au point H, de manière que le rectangle compris sous AB, BH est égal au quarré de AH ; ce qu'il falloit faire.



ANNEXE 2 – Livre 6 des *Éléments* d'Euclide, propositions 30. Extraits de l'édition de F. Peyrard (Paris, 1804), p. 273-274.

PROPOSITION XXX.

PROBLÈME.

Couper une droite finie et donnée en moyenne et extrême raison.

Soit la droite AB (fig. 152) finie et donnée : il faut couper cette droite AB en moyenne et extrême raison.

Sur la droite AB construisez le quarré BC (prop. 46. 1), et sur la droite AC appliquez un parallélogramme CD qui soit égal au quarré BC et dont le parallélogramme excédent AD soit semblable au quarré BC (prop. 29. 6).

La figure BC est un quarré : donc la figure AD sera aussi un quarré ; et puisque BC est égal à CD, si l'on retranche la partie commune CE, la figure restante BF sera égale à la figure restante AD ; mais ces deux figures sont équiangles : donc les côtés des figures BF, AD qui sont autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels (prop. 14. 6) : donc FE est à ED comme AE est à EB ; mais FE est égal à AC (fig. 34. 1), c'est-à-dire à AB et ED est égal à AE : donc AB est à AE comme AE est à EB ; mais AB est plus grand que AE : donc AE est plus grand que EB.

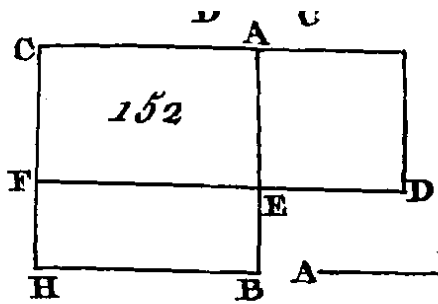
Donc la droite AE a été coupée au point E en moyenne et extrême raison, et sa partie AE est son plus grand segment ; ce qu'il falloit faire.

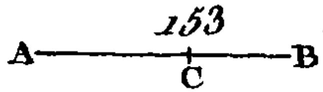
AUTREMENT.

Soit AB (fig. 153) la droite donnée : il faut couper cette droite en moyenne et extrême raison.

Partagez la droite AB au point C de manière que le rectangle compris sous les droites AB, BC soit égal au quarré de AC (prop. 11. 2).

Puisque le rectangle compris sous les droites AB, BC est égal au quarré de AC, AB sera à AC comme AC est à CB (prop. 17. 6) : donc la droite AB a été coupée en moyenne et extrême raison (déf. 3. 6) ; ce qu'il falloit faire.





ANNEXE 3 : Al Kwarizmi

Al Kwarizmi, *Traité de l'algèbre et de la mucabala* (9e siècle) :

> Quant aux biens et aux racines qui égalent le nombre, c'est comme lorsque tu dis : "un bien et dix de ses racines égalent trente-neuf dirhams". Sa signification est que tout bien, si tu lui ajoutes l'équivalent de dix de ses racines cela atteindra trente-neuf. Son procédé consiste à diviser les racines par deux, et c'est cinq dans ce problème. Tu le multiplies par lui-même et ce sera vingt-cinq. Tu l'ajoutes à trente-neuf. Cela donnera soixante-quatre. Tu prends alors sa racine carrée qui est huit et tu en retranches la moitié des racines, et c'est cinq. Il reste trois, et c'est la racine du bien que tu cherches ; et le bien est neuf.

ANNEXE 4 : Pacioli

Luca Paciolo, *La divine proportion* :

> CHAPITRE 8. COMMENT COMPRENDRE LA QUANTITÉ DIVISÉE SELON LA MOYENNE ET EXTRÊME RAISON. Il faut savoir qu'en la considérant bien, cette division d'une quantité selon la moyenne et extrême raison signifie : faire de cette quantité deux parties inégales telles que le produit de la plus petite par toute cette quantité indivise soit autant que le carré de la plus grande partie […].
>
> Ainsi, à celui qui a dit: "Faites-moi de 10 deux parties telles que, multipliées l'une par 10, font autant que l'autre multipliée par elle-même", traitant de ce cas et d'autres similaires, selon les indications que nous avons données dans la pratique spéculative appelée algèbre, et almucabala sous un autre nom, et la règle que nous donnons sur ce point dans notre travail, vous trouverez comme solution qu'une partie, c'est-à-dire la mineure, est $15\,m.R.125$ et l'autre, majeure, est $R.125.m.5$. Et ces parties, ainsi décrites, sont irrationnelles, et dans l'art elles sont appelées radicaux […]. Et vulgairement ces parties sont énoncées comme suit : la mineure [est] $15\,m.R.125$ et cela signifie que, en extrayant la racine de 125, qui est un peu plus de 11, et soustraite de 15, il y aura un peu plus de 3, ou, disons, un peu moins de 4. Et le plus grand est indiqué $R.125.m.5$; et cela signifie que, en extrayant la racine de 125, qui est un peu plus de 11, comme je le sais, en soustrayant 5, il y aurait un peu plus de 6, ou, disons, un peu moins de 7 pour ladite plus grande partie.