LU3MA209
Eléments d'histoire des mathématiques,
niveau L3

L'enseignant : David AUBIN (david.aubin@sorbonne-universite.fr)

– Fascicule 1 –

1. Euclide, *Les Eléments*, éd. de F. Peyrard (1809), rééd. A. Blanchard, Paris, 1993.

   - Livre 1 : Définitions, demandes, notions communes et Proposition 1.
     Propositions 4 ; 9 et 10 ; 16 et 17 ; 27 à 34 ; 42 à 45 ; et 47 et 48.
   - Livre 2 : Propositions 4 et 14.
   - Livre 3 : Définitions.
   - Livre 4 : Définitions et Propositions 6,15 et 16 ;
   - Livre 5 : Définitions 1-11 et Propositions 11-12.
   - Livre 6 : Définitions et Propositions 12 et 13 et 19 et 20 (sans démonstration).
   - Livre 7 : Définitions, Propositions 1 et 2 et Proposition 33.
   - Livre 10 : Définitions 1 et 2 Proposition 1 et 117.
   - Livre 12 : Propositions 1 et 2.

2. Archimède, *Œuvres*, 4 tomes, trad. C. Mugler (Paris : Les Belles lettres, 1970-72).
   - « La mesure du cercle (proposition 1) » : t. I, p. 138-139.
   - « La quadrature de la parabole » : t. II, p. 164-165.

3. Apollonius, *Les Coniques*, trad. P. Ver Eecke (1922 ; rééd. Paris : A. Blanchard, 1959).
   - Livre I, propositions 33, 35 p. 60-61 & 64-65.

4. Pappus, *La Collection mathématique*, trad. P. Ver Eecke (1932 ; rééd. A. Blanchard, 1982).
   - Livre III, p. 38-39 & 40-42.
   - Livre IV, p. 209-214.

5. Eutocius, Commentaire, in Archimède, *Œuvres*, t. IV : -
   - « Ménechme », p. 58-60.

LE PREMIER LIVRE

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. Le point est ce dont la partie est nulle.
2. Une ligne est une longueur sans largeur.
3. Les extrémités d'une ligne sont des points.
4. La ligne droite est celle qui est également placée entre ses points.
5. Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur.
6. Les extrémités d'une surface sont des lignes.
7. La surface plane est celle qui est également placée entre ses droites.
8. Un angle plan est l'inclinaison mutuelle de deux lignes qui se touchent dans un plan, et qui ne sont point placées dans la même direction.
9. Lorsque les lignes, qui comprennent ledit angle, sont des droites, l'angle se nomme rectiligne.
10. Lorsqu'une droite tombant sur une droite fait deux angles de suite égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit; et la droite placée au-dessus est dite perpendiculaire à celle sur laquelle elle est placée.
11. L'angle obtus est celui qui est plus grand qu'un droit.
12. L'angle aigu est celui qui est plus petit qu'un droit.
13. On appèle limite ce qui est l'extrémité de quelque chose.
14. Une figure est ce qui est compris par une seule ou par plusieurs limites.
15. Un cercle est une figure plane, comprise par une seule ligne qu'on nomme circonférence; toutes les droites, menées à la circonférence d'un des points placés dans cette figure, étant égales entre elles.
16. Ce point se nomme le centre du cercle.
17. Le diamètre du cercle est une droite menée par le centre, et terminée de part et d'autre par la circonférence du cercle : le diamètre partage le cercle en deux parties égales.
18. Un demi-cercle est la figure comprise par le diamètre, et la portion de la circonférence, soutendue par le diamètre.

19. Un segment de cercle est la figure comprise par une droite et par la circonférence du cercle; le demi-cercle étant plus grand ou plus petit que le segment.
20. Les figures rectilignes sont celles qui sont terminées par des droites.
21. Les figures trilatères sont terminées par trois droites.
22. Les quadrilatères, par quatre.
23. Les multilatères, par plus de quatre.
24. Parmi les figures trilatères, le triangle équilatéral est celle qui a ses trois côtés égaux.
25. Le triangle isocèle, celle qui a seulement deux côtés égaux.
26. Le triangle scalène, celle qui a ses trois côtés inégaux.
27. De plus, parmi les figures trilatères, le triangle rectangle est celle qui a un angle droit.
28. Le triangle obtusangle, celle qui a un angle obtus.
29. Le triangle acutangle, celle qui a ses trois angles aigus.
30. Parmi les figures quadrilatères, le quarré est celle qui est équilatérale et rectangulaire.
31. Le rectangle, celle qui est rectangulaire, et non équilatérale.
32. Le rhombe, celle qui est équilatérale, et non rectangulaire.
33. Le rhomboïde, celle qui a ses côtés et ses angles opposés égaux entre eux, et qui n'est ni équilatérale ni rectangulaire.
34. Les autres quadrilatères, ceux-là exceptés, se nomment trapèzes.
35. Les parallèles sont des droites, qui, étant situées dans un même plan, et étant prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre.

DEMANDES.

1. Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque.
2. Prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie.
3. D'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence de cercle.
4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.
5. Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.
6. Deux droites ne renferment point un espace.

NOTIONS COMMUNES.

1. Les grandeurs égales à une même grandeur, sont égales entre elles.
2. Si à des grandeurs égales, on ajoute des grandeurs égales, les touts seront égaux.
3. Si de grandeurs égales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront égaux.
4. Si à des grandeurs inégales, on ajoute des grandeurs égales, les touts seront inégaux.
5. Si de grandeurs inégales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront inégaux.
6. Les grandeurs, qui sont doubles d'une même grandeur, sont égales entre elles.
7. Les grandeurs, qui sont les moitiés d'une même grandeur, sont égales entre elles.
8. Les grandeurs, qui s'adaptent entre elles, sont égales entre elles.
9. Le tout est plus grand que la partie.

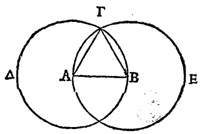
PROPOSITION PREMIÈRE.

Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral.

Exposition. Soit ΑΒ une droite donnée et finie.

Détermination. Il faut construire sur la droite finie ΑΒ un triangle équilatéral.

Construction. Du centre Α et de l'intervalle ΑΒ, décrivons la circonférence ΒΓΔ (dem. 3); et de plus, du centre Β et de l'intervalle ΒΑ, décrivons la circonférence ΑΓΕ; et du point Γ, où les circonférences se coupent mutuellement, conduisons aux points Α, Β les droites ΓΑ, ΓΒ (dem. 1).



Démonstration. Car, puisque le point Α est le centre du cercle ΒΓΔ, la droite ΑΓ est égale à la droite ΑΒ (déf. 15); de plus, puisque le point Β est le centre du cercle ΑΓΕ, la droite ΒΓ est égale à la droite ΒΑ; mais on a démontré

que la droite ΓΑ était égale à la droite ΑΒ; donc chacune des droites ΓΑ, ΓΒ est égale à la droite ΑΒ; or, les grandeurs qui sont égales à une même grandeur, sont égales entre elles (not. 1); donc la droite ΓΑ est égale à la droite ΓΒ; donc les trois droites ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ sont égales entre elles.

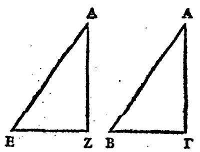
Conclusion. Donc le triangle ΑΒΓ (def. 24) est équilatéral, et il est construit sur la droite donnée et finie ΑΒ. Ce qu'il fallait faire.

[...]

PROPOSITION IV.

Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si les angles compris par les côtés égaux sont égaux, ces triangles auront leurs bases égales, ils seront égaux, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun.

Soient les deux triangles ABΓ, ΔEZ; que ces deux triangles aient les deux côtés AB, AΓ égaux aux deux côtés ΔE, ΔZ, chacun à chacun, le côté AB égal au côté ΔE, et le côté AΓ au côté ΔZ, et qu'ils aient aussi l'angle BAΓ égal à l'angle EΔZ; je dis que la base BΓ est égale à la base EZ, que le triangle ABΓ sera égal au triangle ΔEZ, et que les angles restans, soutendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun; l'angle ABΓ égal à l'angle ΔEZ, et l'angle ABΓ égal à l'angle ΔZE.



Car le triangle ABΓ étant appliqué sur le triangle ΔEZ, le point A étant posé sur le point Δ, et la droite AB sur la droite ΔE, le point B s'appliquera sur le point E, parce que AB est égal à ΔE; mais AB étant appliqué sur ΔE, la droite AΓ

s'appliquera sur ΔZ, parce que l'angle BAΓ est égal à l'angle EΔZ; donc le point Γ s'appliquera sur le point Z, parce que AΓ est égal à ΔZ; mais le point B s'applique sur le point E; donc la base BΓ s'appliquera sur la base EZ; car si le point B s'appliquant sur le point E, et le point Γ sur le point Z, la base BΓ ne s'appliquait pas sur la base EZ, deux droites comprendraient un espace, ce qui est impossible (dem. 6); donc la base BΓ s'appliquera sur la base EZ, et lui sera égale; donc le triangle entier ABΓ s'appliquera sur le triangle entier ΔEZ, et lui sera égal; et les angles restans s'appliqueront sur les angles restans, et leur seront égaux, l'angle ABΓ à l'angle ΔEZ, et l'angle AΓB à l'angle ΔZE.

Donc, si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si les angles compris par les côtés égaux sont égaux, ces triangles auront leurs bases égales, ils seront égaux, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun. Ce qu'il fallait démontrer.

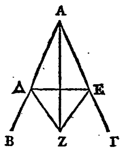
[...]

PROPOSITION IX.

Partager un angle rectiligne donné en deux parties égales.

Soit BAΓ un angle rectiligne donné; il faut le partager en deux parties égales.

Prenons dans la droite AB un point quelconque Δ, retranchons de la droite AΓ une droite AE égale à la droite AΔ, joignons ΔE, sur la droite ΔE, construisons le triangle équilatéral ΔEZ (1), et joignons AZ; je dis que l'angle BAΓ est partagé en deux parties égales par la droite AZ.



Puisque AΔ est égal à AE, et que la droite AZ est commune, les deux droites ΔA, AZ seront égales aux deux droites EA, AZ, chacune à chacune; mais la base ΔZ est égale à la base EZ; donc l'angle ΔAZ est égal à l'angle EAZ (8).

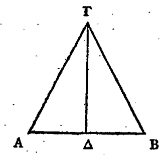
Donc l'angle rectiligne donné BAΓ est partagé en deux parties égales par la droite AZ; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION X.

Partager une droite donnée et finie en deux parties égales.

Soit donnée une droite finie AB; il faut partager la droite finie AB en deux parties égales.

Construisons sur cette droite un triangle équilatéral ABΓ (1), et partageons l'angle AΓB en deux parties égales par la droite ΓΔ (9); je dis que la droite AB est partagée en deux parties égales au point Δ.



Car puisque la droite AΓ est égale à la droite ΓB, et que la droite ΓΔ est commune, les deux droites AΓ, ΓΔ sont égales aux deux droites BΓ, ΓΔ, chacune à chacune; mais l'angle AΓΔ est égal à l'angle BΓΔ; donc la base AΔ et égale à la base BΔ (4).

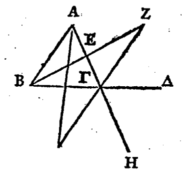
Donc la droite donnée et finie AB est partagée en deux parties égales au point Δ; ce qu'il fallait faire.

[...]

PROPOSITION XVI.

Ayant prolongé un côté d'un triangle quelconque, l'angle extérieur est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés.

Soit le triangle ABΓ, prolongeons le côté BΓ vers Δ; je dis que l'angle extérieur AΓΔ est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés ΓBA, BAΓ.



Partageons la droite AΓ en deux parties égales en E (10); et ayant joint la droite BE, prolongeons-la vers Z, faisons EZ égal à BE (3), joignons la droite ZΓ, et prolongeons AΓ vers H.

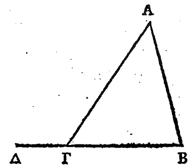
Puisque AE est égal à EΓ, et BE égal à EZ, les deux droites AE, EB sont égales aux deux droites ΓE, EZ, chacune à chacune; mais l'angle AEB est égal à l'angle ZEΓ (15), puisqu'ils sont au sommet; donc la base AB est égale à la base ZΓ (4); le triangle ABE est égal au triangle ZEΓ, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, sont égaux chacun à chacun; donc l'angle BAE est égal à l'angle EΓZ (not. 9); mais l'angle EΓΔ est plus grand que l'angle EΓZ; donc l'angle AΓΔ est plus grand que l'angle BAE. Si on partage le côté BΓ en deux parties égales, on démontrera semblablement que l'angle BΓH, c'est-à-dire AΓΔ, est plus grand que l'angle ABΓ. Donc, etc.

PROPOSITION XVII.

Deux angles d'un triangle quelconque, de quelque manière qu'ils soient pris, sont moindres que deux droits.

Soit le triangle ABΓ; je dis que deux angles du triangle ABΓ, de quelque manière qu'ils soient pris, sont moindres que deux droits.

Prolongeons BΓ vers Δ (dem. 2).

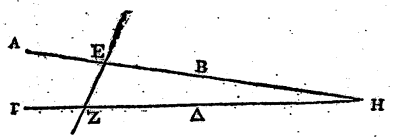


Puisque l'angle AΓΔ du triangle ABΓ est extérieur, il est plus grand que l'angle intérieur et opposé ABΓ (16). Ajoutons l'angle commun AΓB, les angles AΓΔ, AΓB seront plus grands que les angles ABΓ, BΓA. Mais les angles AΓΔ, AΓB sont égaux à deux droits (13); donc les angles ABΓ, BΓA sont moindres que deux droits. Nous démontrerons semblablement que les angles BAΓ, AΓB, et les angles ΓAB, ABΓ sont moindres que deux droits. Donc, etc.

[...]

PROPOSITION XXVII.

Si une droite tombant sur deux droites fait les angles alternes égaux entr'eux, ces deux droites seront parallèles.



Que la droite EZ tombant sur les deux droites AB, ΓΔ fasse les angles alternes AEZ, EZΔ égaux entr'eux; je dis que la droite AB est parallèle à la droite ΓΔ.

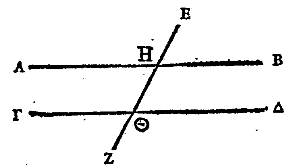
Car si elle ne lui est pas parallèle, les droites AB, ΓΔ étant prolongées se rencontreront, ou du côté BΔ, ou du côté AΓ. Qu'elles soient prolongées, et qu'elles se rencontrent du côté BΔ, au point H.

L'angle extérieur AEZ du triangle EHZ est égal à l'angle intérieur et opposé EZH, ce qui est impossible (16); donc les droites AB, ΓΔ prolongées du côté BΔ ne se rencontreront point. On démontrera de la même manière qu'elles ne se rencontreront pas non plus du côté AΓ; mais les droites qui ne se rencontrent d'aucun côté sont parallèles (déf. 35); donc la droite AB est parallèle à la droite ΓΔ. Donc, etc.

PROPOSITION XXVIII.

Si une droite tombant sur deux droites fait l'angle extérieur égal à l'angle intérieur, opposé, et placé du même côté, ou bien si elle fait les angles intérieurs et placés du même côté égaux à deux droits, ces deux droites seront parallèles.

Que la droite EZ tombant sur les droites AB, ΓΔ fasse l'angle extérieur EHB égal à l'angle intérieur HΘΔ, opposé, et placé du même côté, ou bien les angles BHΘ, HΘΔ intérieurs, et placés du même côté, égaux à deux droits; je dis que la droite AB est parallèle à la droite ΓΔ.



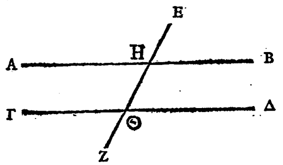
Car puisque l'angle EHB est égal à l'angle HΘΔ, et que l'angle EHB est égal à l'angle AHΘ (15), l'angle AHΘ est égal à l'angle HΘΔ; mais ces angles sont alternes; donc la droite AB est parallèle à la droite ΓΔ (27).

De plus, puisque les angles BHΘ, HΘΔ sont égaux à deux droits, et que les angles AHΘ, BHΘ sont aussi égaux à deux droits (13), les angles AHΘ, BHΘ seront égaux aux angles BΘH, HΘΔ. Retranchons l'angle commun BHΘ; l'angle restant AHΘ sera égal à l'angle restant HΘΔ; mais ces deux angles sont alternes; donc la droite AB est parallèle à la droite ΓΔ. (27). Donc, etc.

PROPOSITION XXIX.

Une droite qui tombe sur deux droites parallèles, fait les angles alternes égaux entr'eux, l'angle extérieur, égal à l'angle intérieur opposé et placé du même côté, et les angles intérieurs placés du même côté, égaux à deux droits.

Que la droite EZ tombe sur les droites parallèles AB, ΓΔ; je dis que cette droite fait les angles alternes AHΘ, HΘΔ égaux entr'eux, l'angle extérieur EHB, égal à l'angle HΘΔ intérieur opposé et placé du même côté, et les angles BHΘ, HΘΔ intérieurs et placés du même côté, égaux à deux droits.



Car si l'angle AHΘ n'est pas égal à l'angle HΘΔ, l'un d'eux est plus grand. Que l'angle AHΘ soit plus grand que HΘΔ. Ajoutons l'angle commun BHΘ, les angles AHΘ, BHΘ seront plus grands que les angles BHΘ, HΘΔ; mais les angles AHΘ, BHΘ sont égaux à deux droits (13); donc les angles BHΘ, HΘΔ sont moindres que deux droits. Mais si deux droites sont prolongées à l'infini du côté où les angles intérieurs sont plus petits que deux droits, ces droites se rencontrent (dem. 5); donc les droites AB, ΓΔ prolongées à l'infini se rencontreront. Mais elles ne se rencontreront pas, puisqu'elles sont parallèles; donc les angles AHΘ, HΘΔ ne sont point inégaux; donc ils sont égaux. Mais l'angle AHΘ est égal à l'angle EHB (15); donc l'angle EHB est égal à l'angle HΘΔ.

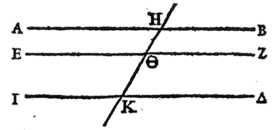
Ajoutons l'angle commun BHΘ, les angles EHB, BHΘ seront égaux aux angles BHΘ, HΘΔ; mais les angles EHB, BHΘ sont égaux à deux droits (13); donc les angles BHΘ, HΘΔ sont égaux à deux droits. Donc, etc.

PROPOSITION XXX.

Les droites parallèles à une même droite sont parallèles entr'elles.

Que chacune des droites AB, ΓΔ soit parallèle à EZ; je dis que AB est parallèle à ΓΔ.

Que la droite HK tombe sur les droites AB, ΓΔ.

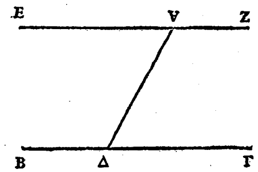


Puisque la droite HK tombe sur les droites parallèles AB, EZ, l'angle AHΘ est égal à l'angle HΘZ (27). De plus, puisque la droite HK tombe sur les droites parallèles EZ, ΓΔ, l'angle HΘZ est égal à l'angle HKΔ (28). Mais on a démontré que l'angle AHK est égal à l'angle HΘZ; donc l'angle AHK est égal à l'angle HKΔ; mais ces angles sont alternes; donc AB est parallèle à ΓΔ (29). Donc, etc.

PROPOSITION XXXI.

Par un point donné, conduire une ligne droite parallèle à une droite donnée.

Soit A le point donné, et BΓ la droite donnée; il faut par le point A conduire une ligne droite parallèle à la droite BΓ.



Prenons sur la droite BΓ un point quelconque Δ, et joignons AΔ; construisons sur la droite ΔA, et au point A de cette droite, l'angle ΔAE égal à l'angle AΔΓ (23), et prolongeons la droite AZ dans la direction de EA.

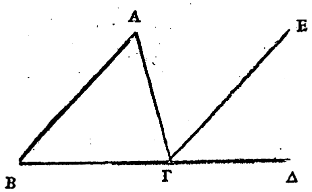
Puisque la droite AΔ, tombant sur les deux droites BΓ, EZ, fait les angles alternes EAΔ, AΔΓ égaux entr'eux, la droite EZ est parallèle à droite BΓ (27).

Donc la ligne droite EAZ a été menée, par le point donné A, parallèle à la droite donnée BΓ; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XXXII.

Ayant prolongé un côté d'un triangle quelconque, l'angle extérieur est égal aux deux angles intérieurs et opposés; et les trois angles intérieurs du triangle sont égaux à deux droits.

Soit le triangle ΑΒΓ; et prolongeons le côté ΒΓ en Δ; je dis que l'angle extérieur ΑΓΔ est égal aux angles intérieurs et opposés ΓΑΒ, ΑΒΓ; et que les trois angles intérieurs ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ sont égaux à deux droits.



Menons, par le point Γ, la droite ΓΕ parallèle à ΑΒ (31).

Puisque ΑΒ est parallèle à ΓΕ, et que ΑΓ tombe sur ces droites, les angles alternes ΒΑΓ, ΑΓΕ sont égaux entr'eux (29). De plus, puisque la droite ΑΒ est parallèle à la droite ΓΕ, et que la droite ΒΔ tombe sur ces droites, l'angle extérieur ΕΓΔ est égal à l'angle intérieur et opposé ΑΒΓ. Mais on a démontré que l'angle ΑΓΕ est égal à l'angle ΒΑΓ; donc l'angle extérieur ΑΓΔ est égal aux deux angles intérieurs et opposés ΒΑΓ, ΑΒΓ.

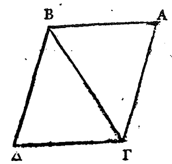
Ajoutons l'angle commun ΑΓΒ; les angles ΑΓΔ, ΑΓΒ seront égaux aux trois angles ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ. Mais les angles ΑΓΔ, ΑΓΒ sont égaux à deux droits (13); donc les angles ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ sont égaux à deux droits. Donc, etc.

PROPOSITION XXXIII.

Les droites qui joignent, des mêmes côtés, des droites égales et parallèles, sont elles-mêmes égales et parallèles.

Soient ΑΒ, ΓΔ deux droites égales et parallèles; que les droites ΑΓ, ΒΔ les joignent des mêmes côtés; je dis que les droites ΑΓ, ΒΔ sont égales et parallèles.

Joignons ΒΓ.



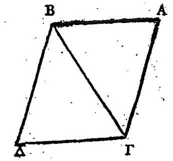
Puisque ΑΒ est parallèle à ΓΔ, et que ΒΓ tombe sur ces droites, les angles alternes ΑΒΓ, ΒΓΔ sont égaux entr'eux (29). De plus, puisque ΑΒ est égale à ΓΔ, et que la droite ΒΓ est commune, les deux droites ΑΒ, ΒΓ sont égales aux deux droites ΓΔ, ΒΓ; mais l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΒΓΔ; donc la base ΑΓ est égale à la base ΒΔ, le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΒΓΔ, et les angles restants, opposés à des côtés égaux, seront égaux, chacun à chacun (4); donc l'angle ΑΓΒ est égal à l'angle ΓΒΔ. Mais la droite ΒΓ tombant sur les deux droites ΑΓ, ΒΔ fait les angles alternes ΑΓΒ, ΓΒΔ égaux entr'eux; donc la droite ΑΓ est parallèle à la droite ΒΔ (27). Mais on a démontré qu'elle lui est égale; donc, etc.

PROPOSITION XXXIV.

Les côtés et les angles opposés des parallélogrammes sont égaux entr'eux, et la diagonale les partage en deux parties égales.

Soit le parallélogramme ΑΓΔΒ, et que ΒΓ soit sa diagonale; je dis que les côtés et les angles opposés du parallélogramme ΑΓΔΒ sont égaux entr'eux, et que la diagonale ΒΓ le partage en deux parties égales.

Car puisque ΑΒ est parallèle à ΓΔ, et que la droite ΒΓ tombe sur ces droites, les angles alternes ΑΒΓ, ΒΓΔ sont égaux entr'eux (29). De plus, puisque ΑΓ est parallèle à ΒΔ, et que ΒΓ tombe sur ces droites, les angles alternes ΑΓΒ, ΓΒΔ sont égaux entr'eux; donc les deux triangles ΑΒΓ, ΒΓΔ ont les deux angles ΑΒΓ, ΒΓΑ égaux aux deux angles ΒΓΔ, ΓΒΔ, chacun à chacun, et un côté égal à un côté, savoir, le côté commun ΒΓ, qui est adjacent aux angles égaux; ils auront donc les autres côtés égaux aux autres côtés, chacun à chacun (26), et l'angle restant égal à l'angle restant; donc le côté ΑΒ est égal au côté ΓΔ, le côté ΑΓ égal au côté ΒΔ, et l'angle ΒΑΓ égal à l'angle ΒΔΓ. Puisque l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΒΓΔ, et l'angle ΓΒΔ égal à l'angle ΑΓΒ, l'angle total ΑΒΔ est égal à l'angle total ΑΓΔ. Mais on a démontré que l'angle ΒΑΓ est égal à l'angle ΓΔΒ;



Donc les côtés et les angles opposés des parallélogrammes sont égaux entr'eux.

Je dis de plus que la diagonale partage les parallélogrammes en deux parties égales. Car puisque ΑΒ est égal à ΓΔ, et que la droite ΒΓ est commune, les deux droites ΑΒ, ΒΓ sont égales aux droites ΔΓ, ΓΒ, chacune à chacune; mais l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΒΓΔ; donc la base ΑΓ est égale à la base ΒΔ (4), et le triangle ΑΒΓ égal au triangle ΒΔΓ.

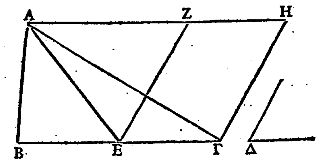
Donc la diagonale ΒΓ partage le parallélogramme ΑΓΔΒ en deux parties égales; ce qu'il fallait démontrer.

[. . .]

PROPOSITION XLII.

Construire, dans un angle rectiligne donné, un parallélogramme égal à un triangle donné.

Soit ΑΒΓ le triangle donné, et Δ l'angle rectiligne donné; il faut construire un parallélogramme égal au triangle ΑΒΓ dans l'angle rectiligne Δ.



Coupons la droite ΒΓ en deux parties égales en Ε (10), joignons ΑΕ, sur la droite ΕΓ, et au point Ε de cette droite construisons un angle ΓΕΖ égal à l'angle Δ (23), par le point Α conduisons ΑΗ parallèle à ΕΓ (31), et par le point Γ conduisons ΓΗ parallèle à ΕΖ; la figure ΖΕΓΗ sera un parallélogramme.

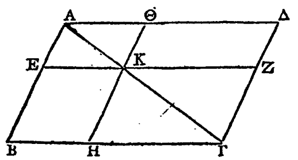
Puisque ΒΕ est égal à ΕΓ, le triangle ΑΒΕ est égal au triangle ΑΕΓ (38), car ils sont sur des bases égales ΒΕ, ΕΓ, et entre les mêmes parallèles ΒΓ, ΑΗ; donc le triangle ΑΒΓ est double du triangle ΑΕΓ. Mais le parallélogramme ΖΕΓΗ est double du triangle ΑΕΓ (41), car il a la même base que lui, et il est dans les mêmes parallèles; donc le parallélogramme ΖΕΓΗ est égal au triangle ΑΒΓ (not. 6), et il a l'angle ΓΕΖ égal à l'angle donné Δ.

Donc le parallélogramme ΖΕΓΗ a été construit égal au triangle ΑΒΓ dans un angle qui est ΓΕΖ égal à l'angle donné Δ; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XLIII.

Dans tout parallélogramme, les compléments des parallélogrammes, autour de la diagonale, sont égaux entr'eux.

Soit le parallélogramme ΑΒΓΔ, que ΑΓ soit sa diagonale, qu'autour de ΑΓ soient les parallélogrammes ΕΘ, ΖΗ, et les parallélogrammes ΒΚ, ΚΔ qu'on appelle compléments; je dis que le complément ΒΚ est égal au complément ΚΔ.



Car puisque ΑΒΓΔ est un parallélogramme, et que ΑΓ est sa diagonale, le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΑΓΔ (34). De plus, puisque ΕΚΘΑ est un parallélogramme, et que ΑΚ est sa diagonale, le triangle ΑΕΚ est égal au triangle ΑΘΚ; le triangle ΚΖΓ est égal au triangle ΚΗΓ, par la même raison; donc puisque le triangle ΑΕΚ est égal au triangle ΑΘΚ, et le triangle ΚΖΓ égal au triangle ΚΗΓ, le triangle ΑΕΚ, avec le triangle ΚΗΓ, est égal au triangle ΑΘΚ avec le triangle ΚΖΓ; mais le triangle entier ΑΒΓ est égal au triangle entier ΑΔΓ; donc le complément restant ΒΚ est égal au complément restant ΗΔ (not. 3). Donc, etc.

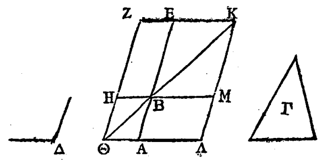
[...]

PROPOSITION XLIV.

A une droite donnée, et dans un angle rectiligne donné, appliquer un parallélogramme égal à un triangle donné.

Que ΑΒ soit la droite donnée, Γ le triangle donné, et Δ l'angle rectiligne donné; il faut sur la droite ΑΒ et dans un angle égal à Δ, appliquer un parallélogramme égal au triangle donné Γ.

Dans un angle ΕΒΗ égal à l'angle Δ, construisons un parallélogramme ΒΕΖΗ égal au triangle Γ (42), plaçons la droite ΒΕ dans la direction de la droite ΒΑ, prolongeons la droite ΖΗ vers Θ, par le point Α conduisons ΑΘ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΒΗ, ΕΖ (31), et joignons ΘΒ. Puisque la droite ΘΖ tombe sur les parallèles ΑΘ, ΕΖ, les angles ΑΘΖ, ΘΖΕ sont égaux à deux droits (29); donc les angles ΒΘΗ, ΗΖΕ sont moindres que deux droits. Mais les droites prolongées à l'infini, du côté où les angles intérieurs sont moindres que deux



angles droits, se rencontrent (dém. 5); donc les droites ΘΒ, ΖΕ étant prolongées, se rencontreront; qu'elles soient prolongées (dém. 2), et qu'elles se rencontrent en Κ; par le point Κ, conduisons ΚΛ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΕΑ, ΖΘ (31), et prolongeons les droites ΘΑ, ΗΒ vers les points Λ, Μ.

La figure ΘΛΚΖ est un parallélogramme, ΘΚ est sa diagonale, et autour de ΘΚ sont les parallélogrammes ΑΗ, ΜΕ, et les parallélogrammes ΛΒ, ΒΖ, qu'on nomme compléments; donc ΛΒ est égal à ΒΖ (43). Mais ΒΖ est égal au triangle Γ; donc ΛΒ est égal à Γ. Et puisque l'angle ΗΒΕ est égal à l'angle ΑΒΜ (15), et que l'angle ΗΒΕ est égal à l'angle Δ, l'angle ΑΒΜ est égal à l'angle Δ.

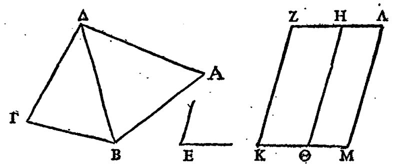
Donc à la droite donnée ΑΒ, et dans l'angle ΑΒΜ égal à Δ, on a appliqué le parallélogramme ΛΒ égal au triangle donné Γ; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XLV.

Construire, dans un angle rectiligne donné, un parallélogramme égal à une figure rectiligne donnée.

Soit ΑΒΓΔ la figure rectiligne donnée, et Ε l'angle rectiligne donné; il faut, dans l'angle donné Ε, construire un parallélogramme égal à la figure rectiligne ΑΒΓΔ.

Joignons ΔΒ, et construisons dans l'angle ΘΚΖ égal à l'angle Ε, le parallélogramme ΖΘ égal au triangle ΑΒΔ (42), et à la droite ΗΘ appliquons dans l'angle ΗΘΜ égal à l'angle Ε, le parallélogramme ΗΜ égal au triangle ΔΒΓ.



Puisque l'angle Ε est égal à chacun des angles ΘΚΖ, ΗΘΜ, l'angle ΘΚΖ est égal à l'angle ΗΘΜ; ajoutons-leur l'angle commun ΚΘΗ; les angles ΖΚΘ, ΚΘΗ seront égaux aux angles ΚΘΗ, ΗΘΜ. Mais les angles ΖΚΘ, ΚΘΗ sont égaux à deux droits (29); donc les angles ΚΘΗ, ΗΘΜ sont égaux à deux droits. Donc les deux droites ΘΚ, ΘΜ, non placées du même côté, font avec la droite ΗΘ, et au point Θ de cette droite, deux angles de suite égaux à deux droits; donc la droite ΚΘ est dans la direction de la droite ΘΜ (14). Et puisque la droite ΘΗ tombe sur les parallèles ΚΜ, ΖΗ, les angles alternes ΜΘΗ, ΘΗΖ sont égaux entr'eux (29). Ajoutons-leur l'angle commun ΘΗΛ; les angles ΜΘΗ, ΘΗΛ seront égaux aux angles ΘΗΖ, ΘΗΛ. Mais les angles ΜΘΗ, ΘΗΛ sont égaux à deux droits (29); donc les angles ΘΗΖ, ΘΗΛ sont aussi égaux à deux droits; donc la droite ΖΗ est dans la direction de la droite ΗΛ; mais ΚΖ est égal et parallèle à ΘΗ, et ΘΗ égal et parallèle à ΜΛ; donc la droite ΚΖ est égale et parallèle à ΜΛ (not. 1 et 30); mais ces deux droites sont jointes par les droites ΚΜ, ΖΛ, et les droites ΚΜ, ΖΛ sont égales et parallèles (33); donc

ΚΖΛΜ est un parallélogramme. Mais le triangle ΑΒΔ est égal au parallélogramme ΖΘ, et le triangle ΔΒΓ est égal au parallélogramme ΗΜ; donc la figure rectiligne entière ΑΒΓΔ est égale au parallélogramme entier ΚΖΛΜ.

Donc le parallélogramme ΚΖΛΜ a été construit égal à la figure rectiligne donnée ΑΒΓΔ, dans l'angle ΖΚΜ égal à l'angle donné Ε; ce qu'il fallait faire.

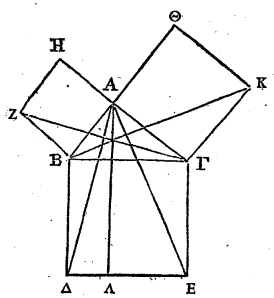
[...]

PROPOSITION XLVII.

Dans les triangles rectangles, le quarré du côté opposé à l'angle droit est égal aux quarrés des côtés qui comprennent l'angle droit.

Soit ABΓ un triangle rectangle, que BAΓ soit l'angle droit; je dis que le quarré du côté BΓ est égal aux quarrés des côtés BA, AΓ.

Décrivons avec BΓ le quarré BΔEΓ, et avec BA, AΓ les quarrés HB, ΘΓ; et par le point A conduisons AΛ parallèle à l'une ou à l'autre des droites BΔ, ΓE; et joignons AΔ, ZΓ.



Puisque chacun des angles BAΓ, BAH est droit, les deux droites AΓ, AH, non placées du même côté, font avec la droite BA au point A de cette droite, deux angles de suite égaux à deux droits; donc la droite ΓA est dans la direction de AH; la droite BA est dans la direction AΘ, par la même raison. Et puisque l'angle ΔBΓ est égal à l'angle ZBA, étant droits l'un et l'autre, si nous leur ajoutons l'angle commun ABΓ, l'angle entier ΔBA sera égal à l'angle entier ZBΓ (not. 4). Et puisque ΔB est égal à BΓ, et ZB à BA, les deux droites ΔB, ΔA sont égales aux deux droites ΓB, BZ, chacune à chacune; mais l'angle ΔBA est égal à l'angle ZBΓ; donc la base AΔ est égale à la base ZΓ, et le triangle ABΔ égal au triangle ZBΓ (4). Mais le parallélogramme BΛ est double du triangle ABΔ (41), car ils ont la même base BΔ et ils sont entre

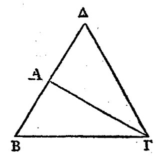
les mêmes parallèles BΔ, AΛ; le quarré BH est double du triangle ZBΓ, car ils ont la même base BZ et ils sont entre les mêmes parallèles ZB, HΓ; et les grandeurs qui sont doubles de grandeurs égales, sont égales entr'elles; donc le parallélograme BΛ est égal au quarré HB. Ayant joint AE, BK, nous démontrerons semblablement que le parallélogramme ΓΛ est égal au quarré ΘΓ; donc le quarré entier BΔEΓ est égal aux deux quarrés HB, ΘΓ. Mais le quarré BΔEΓ est décrit avec BΓ, et les quarrés HB, ΘΓ sont décrits avec BA, AΓ; donc le quarré du coté BΓ est égal aux quarrés des côtés BA, AΓ. Donc dans les triangles, etc.

PROPOSITION XLVIII.

Si le quarré d'un des côtés d'un triangle est égal aux quarrés des deux côtés restants de ce triangle, l'angle compris par les deux côtés restants est droit.

Que le quarré du côté BΓ du triangle ABΓ soit égal aux quarrés des côtés BA, AΓ; je dis que l'angle BAΓ est droit.

Du point A, conduisons la droite AΔ perpendiculaire à AΓ (11), faisons AΔ égal à BA, et joignons ΔΓ.



Car puisque ΔA est égal à AB, le quarré de ΔA est égal au quarré de AB. Ajoutons le quarré commun de AΓ; les quarrés des droites ΔA, AΓ seront égaux aux quarrés des droites BA, AΓ. Mais le quarré de ΔΓ est égal aux quarrés des droits ΔA, AΓ (47), car l'angle ΔAΓ est droit, et le quarré de BΓ est supposé égal aux quarrés des droites BA, AΓ; donc le quarré de ΔΓ est égal au quarré de BΓ; donc le côté ΔΓ est égal au côté BΓ; mais AΔ est égal à AB, et AΓ est commun; donc les deux droites ΔA, AΓ sont égales aux deux droites BA, AΓ; mais la base ΔΓ est égale à la base BΓ; donc l'angle ΔAΓ est égal à l'angle BAΓ (8). Mais l'angle ΔAΓ est droit; donc l'angle BAΓ est droit aussi. Donc, etc.

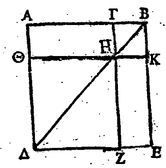
FIN DU PREMIER LIVRE.

[...]

PROPOSITION IV.

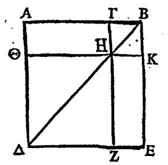
Si la droite est coupée à volonté, le quarré de la droite entière est égal aux quarrés des segments, et à deux fois le rectangle contenu sous les deux segments.

Que la droite AB soit coupée à volonté au point Γ; je dis que le quarré de AB est égal aux quarrés des segments AΓ, ΓB, et à deux fois le rectangle contenu sous AΓ, ΓB.



Avec AB décrivons le quarré AΔEB (46. 1); joignons BΔ; par le point Γ conduisons ΓHZ parallèle à l'une ou à l'autre des droites AΔ, EB (31. 1), et par le point H conduisons ΘK parallèle à l'une ou à l'autre des droites AB, ΔE.

Puisque ΓΖ est parallèle à ΑΔ, et que ΒΔ tombe sur ces deux droites, l'angle extérieur ΓΗΒ est égal à l'angle intérieur et opposé ΑΔΒ (29. 1). Mais l'angle ΑΔΒ est égal à l'angle ΑΒΔ (5. 1), puisque le côté ΒΑ est égal au côté ΑΔ; donc l'angle ΓΗΒ est égal à l'angle ΗΒΓ; donc le côté ΒΓ est égal au côté ΓΗ (6. 1); mais ΓΒ est égal à ΗΚ (34. 1), et ΓΗ égal à ΒΚ; donc ΗΚ est égal à ΚΒ; donc le quadrilatère ΓΗΚΒ est équilatéral. Je dis qu'il est rectangle. Car puisque ΓΗ est parallèle à ΒΚ, et que ΓΒ tombe sur ces deux droites, les angles ΚΒΓ, ΒΓΗ sont égaux à deux droits (29. 1). Mais l'angle ΚΒΓ est droit (déf. 30. 1); donc l'angle ΒΓΗ est droit. Donc les angles opposés ΓΗΚ, ΗΚΒ sont droits aussi (34. 1); donc le quadrilatère ΓΗΚΒ est rectangle. Mais on a démontré qu'il est équilatéral; donc ce quadrilatère est un quarré, et ce quarré est décrit avec ΓΒ. Par la même raison ΘΖ est aussi un quarré, et ce quarré est décrit avec ΘΗ, c'est-à-dire avec ΑΓ; donc ΘΖ, ΓΚ sont des quarrés décrits avec ΑΓ, ΓΒ. Et puisque le rectangle ΑΗ est égal au rectangle ΗΕ (43. 1), et que le rectangle ΑΗ est compris sous les droites ΑΓ, ΓΒ, car ΗΓ est égal à ΓΒ, le rectangle ΗΕ est égal au rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; donc les rectangles ΑΗ, ΗΕ sont égaux à deux fois le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ. Mais les quarrés ΘΖ, ΓΚ sont décrits avec les droites ΑΓ, ΓΒ; donc les quatre figures ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ sont égales aux quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ et à deux fois le rectangle compris sous ΑΓ, ΓΒ. Mais les quatre figures ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ sont la figure entière ΑΔΕΒ, qui est le quarré de ΑΒ; donc le quarré de ΑΒ est égal aux quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ, et à deux fois le rectangle compris sous ΑΓ, ΓΒ. Donc, etc.

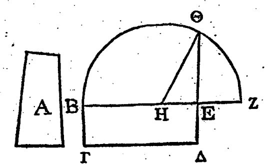


[...]

PROPOSITION XIV.

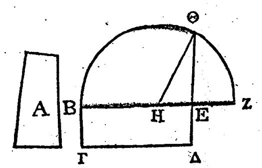
Construire un quarré égal à une figure rectiligne donnée.

Soit Α la figure rectiligne donnée; il faut construire un quarré égal à cette figure rectiligne.



Construisons un parallélogramme rectangle ΒΔ égal à la figure rectiligne donnée Α (45. 1). Si ΒΕ était égal à ΕΔ, on aurait fait ce qui était proposé; car le quarré ΒΔ aurait été construit égal à la figure rectiligne Α. Si cela n'est point, l'un des côtés ΒΕ, ΕΔ est plus grand que l'autre. Que ΒΕ soit le plus grand, prolongeons-le vers Z, et faisons EZ égal à EΔ (3. 1); coupons BZ en deux parties égales au point H; du centre H et d'un intervalle égal à l'une des droites HB, HZ, décrivons la demi-circonférence BΘZ (dem. 3); prolongeons ΔE vers Θ, et joignons HΘ.

Puisque BZ est partagé en deux parties égales au point H, et en deux parties inégales au point E; le rectangle compris sous BE, EZ avec le quarré de HE, est égal au quarré de HZ (5. 2). Mais HZ est égal à HΘ; donc le rectangle compris sous BE, EZ avec le quarré de HE est égal au quarré de HΘ. Mais les quarrés des droites ΘE, EH sont égaux au quarré de HΘ (47. 1); donc le



rectangle compris sous BE, EZ avec le quarré de HE, est égal aux quarrés de droites ΘE, EH. Retranchons le quarré commun de HE; le rectangle restant compris sous BE, EZ sera égal au quarré de EΘ. Mais le rectangle compris sous BE, EZ est le rectangle compris sous BE, EΔ, puisque la droite EZ est égale à la droite EΔ; donc le parallélogramme BΔ est égal au quarré de ΘE. Mais BΔ est égal à la figure rectiligne A; donc la figure rectiligne A est égale au quarré de EΘ.

Donc le quarré décrit avec EΘ a été construit égal à la figure rectiligne donnée A; ce qu'il fallait faire.

FIN DU DEUXIÈME LIVRE.

LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. Les cercles égaux sont ceux dont les diamètres sont égaux, ou ceux dont les droites menées des centres aux circonférences sont égales.

2. Une droite, qui touchant un cercle, et qui étant prolongée ne le coupe point, est dite tangente à ce cercle.

3. Les cercles qui ~~ne~~ se touchent et qui ne se coupent point, sont dits tangents entr'eux.

4. Dans un cercle, on dit que des droites sont également éloignées du centre, lorsque les perpendiculaires menées du centre sur ces droites sont égales.

5. La droite sur laquelle tombe la plus grande perpendiculaire est dite la plus éloignée du centre.

6. Un segment de cercle est la figure comprise par une droite et par une circonférence de cercle.

7. L'angle du segment est celui qui est compris par une droite et par une circonférence de cercle.

8. L'angle dans le segment est l'angle compris par les droites menées d'un point pris dans la circonférence du segment aux extrémités de la droite qui est la base du segment.

9. Mais lorsque les droites qui comprènent l'angle embrassent une portion de la circonférence, cet angle est dit appuyé à la circonférence.

10. Un secteur de cercle est une figure comprise entre deux rayons qui font un angle au centre et la portion de la circonférence qu'embrassent ces deux rayons.

11. Les segments des cercles sont semblables, lorsqu'ils reçoivent des angles égaux, ou lorsque les angles qu'ils contiènent sont égaux entr'eux.

LE QUATRIÈME LIVRE

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. Une figure rectiligne est dite inscrite dans une figure rectiligne, lorsque chacun des angles de la figure inscrite touche chaque côté de celle dans laquelle elle est inscrite.

2. Semblablement une figure est dite circonscrite à une figure, lorsque chaque côté de la figure circonscrite touche chaque angle de la figure à laquelle elle est circonscrite.

3. Une figure rectiligne est dite inscrite dans un cercle, lorsque chaque angle de la figure inscrite touche la circonférence de ce cercle.

4. Une figure rectiligne est dite circonscrite à un cercle, lorsque chaque côté de la figure circonscrite touche la circonférence de ce cercle.

5. Semblablement un cercle est dit inscrit dans une figure rectiligne, lorsque la circonférence du cercle touche chaque côté de la figure dans laquelle il est inscrit.

6. Un cercle est dit circonscrit à une figure, lorsque la circonférence du cercle touche chaque angle de la figure à laquelle il est circonscrit.

7. Une droite est dite adaptée dans un cercle, lorsque ses extrémités sont dans la circonférence de ce cercle.

[...]

PROPOSITION VI.

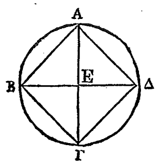
Inscrire un quarré dans un cercle donné.

Soit ΑΒΓΔ le cercle donné; il faut inscrire un quarré dans le cercle ΑΒΓΔ.

Menons les diamètres ΑΓ, ΒΔ du cercle ΑΒΓΔ perpendiculaires l'un à l'autre (11. 1), et joignons ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.

Puisque ΒΕ est égal à ΕΔ, car le point Ε est le centre, et que la droite ΕΑ est commune et à angles droits, la base ΑΒ est égale à la base ΑΔ (4. 1).

Par la même raison, chacune des droites ΒΓ, ΓΔ est égale à chacune des droites ΒΑ, ΑΔ; donc le quadrilatère ΑΒΓΔ est équilatéral. Je dis aussi qu'il est rectangle. Car puisque la droite ΒΔ est un diamètre du cercle ΑΒΓΔ, la figure ΒΑΔ est un demi-cercle. Donc l'angle ΒΑΔ est droit (31. 1). Par la



même raison, chacun des angles ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ est droit aussi; donc le quadrilatère ΑΒΓΔ est rectangle. Mais on a démontré qu'il est équilatéral; donc ce quadrilatère est un quarré. Et ce quarré est inscrit dans le cercle ΑΒΓΔ.

Donc on a inscrit le quarré ΑΒΓΔ dans le cercle donné ΑΒΓΔ. Ce qu'il fallait faire.

[...]

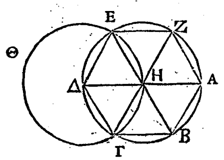
PROPOSITION XV.

Inscrire dans un cercle donné un hexagone équilatéral et équiangle.

Soit ΑΒΓΔΕΖ le cercle donné; il faut dans ce cercle inscrire un hexagone équilatéral et équiangle.

Menons le diamètre ΑΔ du cercle ΑΒΓΔΕΖ, prenons le centre Η de ce cercle, du centre Δ, et de l'intervalle ΔΗ décrivons le cercle ΕΗΓΘ (dém. 3), joignons les droites ΕΗ, ΓΗ, prolongeons-les vers les points Β, Ζ, et joignons ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ; je dis que l'hexagone ΑΒΓΔΕΖ est équilatéral et équiangle.

Puisque le point Η est le centre du cercle ΑΒΓΔΕΖ, la droite ΗΕ est égale à ΗΔ. De plus, puisque le point Δ est le centre du cercle ΕΗΓΘ, la droite ΔΕ est égale à ΔΗ. Mais on a démontré que ΗΕ est égal à ΗΔ; donc ΗΕ est égal à ΕΔ; donc le triangle ΕΗΔ est équilatéral; donc les trois angles ΕΗΔ, ΗΔΕ, ΔΕΗ sont égaux entr'eux, puisque dans les triangles isocèles, les angles à la base sont égaux entr'eux (5. 1). Mais les trois angles d'un triangle sont égaux à deux droits (32. 1); donc l'angle ΕΗΔ est le tiers de deux droits. Nous démontrerons semblablement que ΔΗΓ est le tiers de deux droits. Mais la droite ΓΗ tombant sur la droite ΕΒ fait les angles de suite ΕΗΓ, ΓΗΒ égaux à deux droits (13. 1); donc l'angle restant ΓΗΒ est le tiers de deux droits;



donc les angles ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ sont égaux entr'eux; mais les angles ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ sont égaux aux angles ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ, parce que ces angles sont opposés par le sommet (15. 1), donc les six angles ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ, ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ sont égaux entr'eux. Mais des angles égaux s'appuient sur des arcs égaux (26. 3); donc les six arcs ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ sont égaux entr'eux. Mais des arcs égaux sont soutendus par des droites égales (29. 3); donc ces six droites sont égales entr'elles; donc l'hexagone ΑΒΓΔΕΖ est équilatéral. Je dis qu'il est équiangle. Car puisque l'arc ΖΑ est égal à l'arc ΕΔ, ajoutons l'arc commun ΑΒΓΔ, l'arc entier ΖΑΒΓΔ sera égal à l'arc entier ΕΔΓΒΑ. Mais l'angle ΖΕΔ s'appuie sur l'arc ΖΑΒΓΔ, et l'angle ΑΖΕ s'appuie sur l'arc ΕΔΓΒΑ; donc l'angle ΑΖΕ est égal à l'angle ΖΕΔ (27. 3). On démontrera semblablement que les angles restants de l'hexagone ΑΒΓΔΕΖ sont égaux un à un à l'un et à l'autre des angles ΑΖΕ, ΖΕΔ; donc l'hexagone ΑΒΓΔΕΖ est équiangle. Mais on a démontré qu'il est équilatéral, et il est inscrit dans le cercle ΑΒΓΔΕΖ.

Donc on a inscrit un hexagone équilatéral et équiangle dans le cercle donné. Ce qu'il fallait faire.

COROLLAIRE.

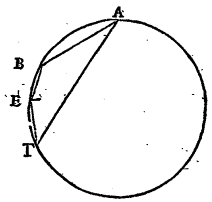
De là il est évident que le côté de l'hexagone est égal au rayon du cercle.

Semblablement si par les points Α, Β, Δ, Γ, Ε, Ζ nous menons des tangentes au cercle, on circonscrira à ce cercle un hexagone équilatéral et équiangle, conformément à ce qui a été dit pour le pentagone. C'est aussi conformément à ce qui a été dit pour le pentagone, que nous inscrirons, et que nous circonscrirons un cercle à un hexagone donné.

PROPOSITION XVI.

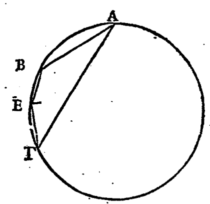
Inscrire dans un cercle donné un quindécagone équilatéral et équiangle.

Soit ΑΒΓΔ le cercle donné; il faut dans ce cercle inscrire un quindécagone équilatéral et équiangle.



Inscrivons dans le cercle ΑΒΓΔ le côté ΑΓ d'un triangle équilatéral inscrit, et le côté ΑΒ d'un pentagone équilatéral. Puisque la circonférence entière ΑΒΓΔ doit être partagée en quinze parties égales, l'arc ΑΒΓ qui est la troisième partie de la circonférence, en contiendra cinq, et l'arc ΑΒ qui est le cinquième de la circonférence, en contiendra trois; donc l'arc restant ΒΓ en contiendra deux. Partageons l'arc restant ΒΓ en deux parties égales au point Ε (30. 3), chacun des arcs ΒΕ, ΕΓ sera la quinzième partie de la circonférence du cercle

ΑΒΓΔ. Donc, si ayant joint les droites ΒΕ, ΕΓ, nous adaptons dans le cercle ΑΒΓΔ, à la suite les unes des autres, des droites égales à ces droites (1. 4), on aura inscrit dans ce cercle un quindécagone équilatéral et équiangle. Ce qu'il fallait faire.



[...]

FIN DU QUATRIÈME LIVRE.

LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. Une grandeur est partie d'une grandeur, la plus petite de la plus grande, quand la plus petite mesure la plus grande.

2. Une grandeur plus grande est multiple d'une grandeur plus petite, quand la plus grande est mesurée par la plus petite.

3. Une raison, est certaine manière d'être de deux grandeurs homogènes entr'elles, suivant la quantité.

4. Une proportion est une identité de raisons.

5. Des grandeurs sont dites avoir une raison entr'elles, lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement.

6. Des grandeurs sont dites être en même raison, la première à la seconde, et la troisième à la quatrième, lorsque des équimultiples quelconques de la première et de la troisième, et d'autres équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième sont tels, que les premiers équimultiples surpassent, chacun à chacun, les seconds équimultiples, ou leur sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois.

7. Les grandeurs qui ont la même raison sont dites proportionnelles.

8. Lorsque, parmi ces équimultiples, un multiple de la première surpasse un multiple de la seconde, et qu'un multiple de la troisième ne surpasse pas un multiple de la quatrième, on dit alors que la première a avec la seconde une plus grande raison que la troisième avec la quatrième.

9. Une proportion a au moins trois termes.

10. Lorsque trois grandeurs sont proportionnelles, la première est dite avoir avec la troisième une raison double de celle qu'elle a avec la seconde.

11. Lorsque quatre grandeurs sont proportionnelles, la première est dite avoir avec la quatrième une raison triple de celle qu'elle a avec la seconde, et ainsi de suite, tant que la proportion subsiste.

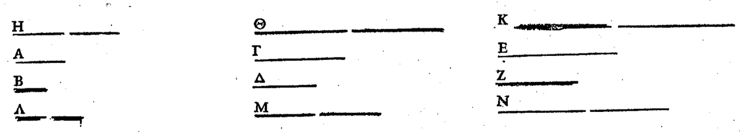
[...]

PROPOSITION XI.

Les raisons qui sont les mêmes avec une même raison sont égales entr'elles.

Que A soit à B comme Γ est à Δ, et que Γ soit à Δ comme E est à Z ; je dis que A est à B comme E est à Z.

Prenons des équimultiples quelconques H, Θ, K des grandeurs A, Γ, E, et d'autres équimultiples quelconques Λ, M, N des grandeurs B, Δ, Z.



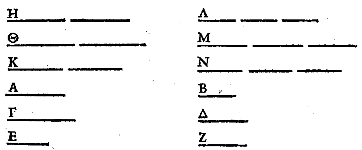
Puisque A est à B comme Γ est à Δ, et qu'on a pris des équimultiples quelconques H, Θ de A et de Γ; et d'autres équimultiples quelconques Λ, M de B et de Δ; si H surpasse Λ, Θ surpasse M; si H est égal à Λ, Θ est égal à M;

et si Η est plus petit que Α, Θ est plus petit que Μ (déf. 6. 5). De plus, puisque Γ est à Δ comme Ε est à Ζ, et qu'on a pris des équimultiples quelconques Θ, Κ de Γ et de Ε, et d'autres équimultiples quelconques Μ, Ν de Δ et de Ζ; si Θ surpasse Μ, Κ surpasse Ν; si Θ est égal à Μ, Κ est égal à Ν, et si Θ est plus petit que Μ, Κ est plus petit que Ν. Mais si Θ surpasse Μ, Η surpasse Λ; si Θ est égal à Μ, Η est égal à Λ, et si Θ est plus petit que Μ, Η est plus petit que Λ; donc, si Η surpasse Λ, Κ surpasse Ν; si Η est égal à Λ, Κ est égal à Ν, et si Η est plus petit que Λ, Κ est plus petit que Ν. Mais Η, Κ sont des équimultiples quelconques de Α et de Ε, et Λ, Ν d'autres équimultiples quelconques de Β et de Ζ; donc Α est à Β comme Ε est à Ζ (déf. 6. 5). Donc, etc.

PROPOSITION XII.

Si tant de grandeurs qu'on voudra sont proportionnelles, un des antécédents sera à un des conséquents comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents.

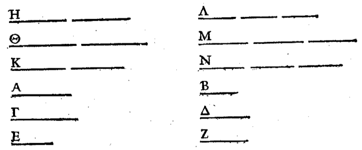
Soient Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ tant de grandeurs proportionnelles qu'on voudra; que Α soit à Β comme Γ est à Δ et comme Ε est à Ζ; je dis que Α est à Β comme la somme des antécédents Α, Γ, Ε est à la somme des grandeurs Β, Δ, Ζ.



Prenons des équimultiples quelconques Η, Θ, Κ des grandeurs Α, Γ, Ε, et d'autres équimultiples quelconques Λ, Μ, Ν des grandeurs Β, Δ, Ζ.

Puisque Α est à Β comme Γ est à Δ, et comme Ε est à Ζ; que l'on a pris des équimultiples quelconques Η, Θ, Κ des grandeurs Α, Γ, Ε, et d'autres équimultiples quelconques Λ, Μ, Ν des grandeurs Β, Δ, Ζ; si Η surpasse Λ, Θ surpasse Μ, et Κ surpasse Ν; si Η est égal à Λ, Θ est égal à Μ, et Κ égal à Ν; et si Η est plus petit que Λ, Θ est plus petit que Ν, et Κ plus petit que

Ν (déf. 6. 5). Donc, si Η surpasse Λ, la somme des grandeurs Η, Θ, Κ surpasse la somme des grandeurs Λ, Μ, Ν; si Η est égal à Λ, la somme des grandeurs Η, Θ, Κ est égale à la somme des grandeurs Λ, Μ, Ν; et si Η est plus petit que Λ, la somme des grandeurs Η, Θ, Κ est plus petite que la somme des grandeurs Λ, Μ, Ν. Mais la grandeur Η et la somme des grandeurs Η, Θ, Κ sont des équimultiples de la grandeur Α et des grandeurs Α, Γ, Ε, parce que si tant de grandeurs qu'on voudra sont les mêmes multiples d'autres



grandeurs égales en nombre, chacune de chacune, la somme des premières grandeurs est le même multiple de la somme des secondes, qu'une de ces grandeurs l'est d'une de ces grandeurs (1. 5). Par la même raison, la grandeur Λ et la somme des grandeurs Λ, Μ, Ν sont des équimultiples de la grandeur Β et de la somme des grandeurs Β, Δ, Ζ; donc Α est à Β comme la somme des grandeurs Α, Γ, Ε est à la somme des grandeurs Β, Δ, Ζ (déf. 6. 5). Donc, etc.

LE SIXIÈME LIVRE

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. Les figures rectilignes semblables sont celles qui ont les angles égaux chacun à chacun, et dont les côtés autour des angles égaux sont proportionnels.

2. Les figures sont réciproques, lorsque les antécédents et les conséquents des raisons se trouvent dans l'une et l'autre figure.

3. Une droite est dite coupée en extrême et moyenne raison, lorsque la droite entière est au plus grand segment comme le plus grand segment est au plus petit.

4. La hauteur d'une figure est la perpendiculaire menée du sommet sur la base.

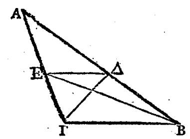
[...]

PROPOSITION II.

Si l'on mène une droite parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle; et si les côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle.

Menons ΔE parallèle à un des côtés BΓ du triangle ABΓ; je dis que BΔ est à ΔA comme ΓE est à EA.

Joignons BE, ΓΔ.



Le triangle BΔE sera égal au triangle ΓΔE (37. 1), parce qu'ils ont la même base ΔE, et qu'ils sont compris entre les mêmes parallèles ΔE, BΓ. Mais AΔE est un autre triangle; et des grandeurs égales ont la même raison avec une même grandeur (7. 5); donc le triangle BΔE est au triangle AΔE comme le triangle ΓΔE est au triangle AΔE. Mais le triangle BΔE est au triangle AΔE comme BΔ est à ΔA; car ces deux triangles, qui ont la même hauteur, savoir, la perpendiculaire menée du point E sur la droite AB, sont entr'eux comme leurs bases (1. 6). Par la même raison le triangle ΓΔE est au triangle AΔE comme ΓE est à EA; donc BΔ est à ΔA comme ΓE est à EA (11. 5).

Mais que les côtés AB, AΓ du triangle ABΓ soient coupés proportionnellement aux points Δ, E, c'est-à-dire que BΔ soit à ΔA comme ΓE est à EA, et joignons ΔE; je dis que ΔE est parallèle à BΓ.

Faisons la même construction. Puisque BΔ est à ΔA comme ΓE est à EA, que BΔ est à ΔA comme le triangle BΔE est au triangle AΔE (1. 6), et que ΓE est à EA comme le triangle ΓΔE est au triangle AΔE, le triangle BΔE est au triangle AΔF comme le triangle ΓΔE est au triangle AΔE (11. 5). Donc chacun des triangles BΔE, ΓΔE a la même raison avec le triangle AΔE. Donc le triangle

ΒΔΕ est égal au triangle ΓΔΕ (9. 5); et ils sont sur la même base ΔΕ. Mais les triangles égaux et construits sur la même base sont entre les mêmes parallèles (39. 1). Donc ΔΕ est parallèle à ΒΓ. Donc, etc.

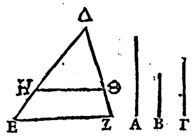
[...]

PROPOSITION XII.

Trois droites étant données, trouver une quatrième proportionnelle.

Soient Α, Β, Γ les trois droites données; il faut trouver une quatrième proportionnelle aux droites Α, Β, Γ.

Soient les deux droites ΔΕ, ΔΖ, comprenant un angle quelconque ΕΔΖ; faisons la droite ΔΗ égale à Α, la droite ΗΕ égale à Β, et la droite ΔΘ égale à Γ; et ayant joint ΗΘ, par le point Ε menons ΕΖ parallèle à ΗΘ.



Puisque la droite ΗΘ est parallèle à un des côtés ΕΖ du triangle ΔΕΖ, la droite ΔΗ est à ΗΕ comme ΔΘ est à ΘΖ (2. 6). Mais ΔΗ est égal à Α, la droite ΗΕ égale à Β, et la droite ΔΘ égale à Γ; donc Α est à Β comme Γ est à ΘΖ.

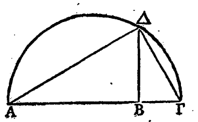
Donc trois droites Α, Β, Γ étant données, on a trouvé une quatrième proportionnelle ΘΖ. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XIII.

Deux droites étant données, trouver une moyenne proportionnelle.

Soient ΑΒ, ΒΓ les deux droites données; il faut trouver une moyenne proportionnelle entre ΑΒ, ΒΓ.

Plaçons ces droites dans la même direction, et sur la droite ΑΓ décrivons le demi-cercle ΑΔΓ; du point Β menons ΒΔ perpendiculaire à ΑΓ, et joignons ΑΔ, ΔΓ (11. 1).



Puisque l'angle ΑΔΓ est dans un demi-cercle, cet angle est droit (31. 3). Et puisque dans le triangle rectangle ΑΔΓ on a mené de l'angle droit la droite ΔΒ perpendiculaire à la base, la droite ΔΒ est moyenne proportionnelle entre les segments ΑΒ, ΒΓ de la base (cor. 8. 6).

Donc les deux droites ΑΒ, ΒΓ étant données, on a trouvé une moyenne proportionnelle ΒΔ. Ce qu'il fallait faire.

[...]

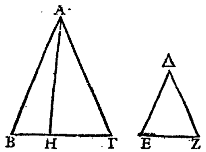
PROPOSITION XIX.

Les triangles semblables sont entr'eux en raison double des côtés homologues.

Soient les triangles semblables ΑΒΓ, ΔΕΖ, ayant l'angle en Β égal à l'angle en Ε, et que ΑΒ soit à ΒΓ comme ΔΕ est à ΕΖ, de manière que le côté ΒΓ soit l'homologue du côté ΕΖ; je dis que le triangle ΑΒΓ a avec le triangle ΔΕΖ une raison double de celle que ΒΓ a avec ΕΖ.

Prenons une troisième proportionnelle ΒΗ aux droites ΒΓ, ΕΖ, de manière que ΒΓ soit à ΕΖ comme ΕΖ est à ΒΗ; et joignons ΗΑ (11. 6).

Puisque AB est à BΓ comme ΔE est à EZ, par permutation, AB est à ΔE comme BΓ est à EZ (16. 6). Mais BΓ est à EZ comme EZ est à BH; donc AB est à ΔE comme EZ est à BH (11. 5); donc les côtés des triangles ABH, ΔEZ, autour des angles égaux, sont réciproquement proportionnels. Mais deux triangles sont égaux entr'eux lorsqu'ils ont un angle égal à un angle, et les côtés autour des angles égaux, réciproquement proportionnels (15. 6); donc le triangle ABH est égal au triangle ΔEZ. Et puisque BΓ est à EZ comme EZ est à BH, et que lorsque trois droites sont proportionnelles, la première est dite avoir avec la troisième une raison double de celle que la première a avec la seconde (10. 5), la droite BΓ a avec la droite BH une raison double de celle



que BΓ a avec EZ. Mais BΓ est à BH comme le triangle ABΓ est au triangle ABH (déf. 1. 6); donc le triangle ABΓ a avec le triangle ABH une raison double de celle que BΓ a avec EZ. Mais le triangle ABH est égal au triangle ΔEZ; donc le triangle ABΓ a avec le triangle ΔEZ une raison double de celle que BΓ a avec EZ (7. 5). Donc, etc.

[...]

PROPOSITION XX.

Les polygones semblables peuvent être divisés en triangles semblables, égaux en nombre, et homologues aux polygones; et le polygone a avec le polygone une raison double de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue.

[...]

LIVRE SEPTIEME DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. L'unité est ce selon quoi chacune des choses existantes est dite une.

2. Un nombre est un assemblage composé d'unités.

3. Un nombre est une partie d'un nombre, le plus petit du plus grand, lorsque le plus petit mesure le plus grand.

4. Un nombre est parties d'un nombre, quand il ne le mesure pas.

5. Un nombre est multiple d'un nombre, le plus grand du plus petit, quand il est mesuré par le plus petit.

6. Le nombre pair est celui qui peut se partager en deux parties egales.

7. Le nombre impair est celui qui ne peut pas se partager en deux parties égales, ou bien celui qui diffère d'une unité du nombre pair.

[...]

12. Le nombre premier est celui qui est mesuré par l'unité seule.

13. Les nombres premiers entr'eux sont ceux qui ont l'unité seule pour commune mesure.

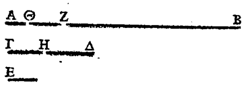
14. Le nombre composé est celui qui est mesuré par quelque nombre.

15. Les nombres composés entr'eux sont ceux qui ont quelque nombre pour commune mesure.

[...]

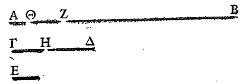
PROPOSITION PREMIÈRE.

Deux nombres inégaux étant proposés, le plus petit étant toujours retranché du plus grand, si le reste ne mesure celui qui est avant lui que lorsque l'on a pris l'unité, les nombres proposés seront premiers entr'eux.



Soient les deux nombres inégaux ΑΒ, ΓΔ; que le plus petit étant toujours retranché du plus grand, le nombre restant ne mesure celui qui est avant lui que lorsque l'on a pris l'unité; je dis que les nombres ΑΒ, ΓΔ *sont* premiers entr'eux, c'est-à-dire que l'unité seule les mesure.

Car si les nombres ΑΒ, ΓΔ ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera. Que quelque nombre les mesure, et que ce soit Ε; que ΓΔ mesurant ΑΒ laisse ΖΑ plus petit que lui-même; que ΖΑ mesurant ΔΓ laisse ΗΓ plus petit que lui-même; et qu'enfin ΗΓ mesurant ΖΑ laisse l'unité ΘΑ.

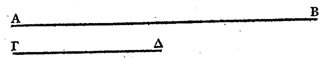


Puisque Ε mesure ΓΔ, et que ΓΔ mesure ΖΒ, le nombre Ε mesure ΖΒ. Mais il mesure ΑΒ tout entier; donc il mesurera le reste ΑΖ. Mais ΑΖ mesure ΔΗ; donc Ε mesurera ΔΗ. Mais il mesure ΓΔ tout entier; donc il mesurera le reste ΓΗ. Mais ΓΗ mesure ΖΘ; donc Ε mesurera ΖΘ. Mais il mesure ΖΑ tout entier; donc un nombre mesurera l'unité restante ΑΘ, ce qui est impossible (déf. 3. 7). Donc, aucun nombre ne mesurera les nombres ΑΒ, ΓΔ. Donc les nombres ΑΒ, ΓΔ sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION II.

Deux nombres non premiers entr'eux étant donnés, trouver leur plus grande commune mesure.

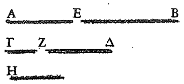
Soient donnés les deux nombres ΑΒ, ΓΔ non premiers entr'eux, et que ΓΔ soit le plus petit; il faut trouver la plus grande commune mesure des nombres ΑΒ, ΓΔ.



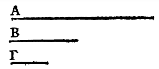
Si ΓΔ mesure ΑΒ, le nombre ΓΔ sera une commune mesure des nombres ΓΔ, ΑΒ, parce que ΓΔ se mesure lui-même; et il est évident qu'il en sera la plus grande, car aucun nombre plus grand que ΓΔ ne peut mesurer ΓΔ.

Mais si ΓΔ ne mesure pas ΑΒ, et si on retranche toujours le plus petit des nombres ΑΒ, ΓΔ du plus grand, il restera quelque nombre qui mesurera celui qui est avant lui. On n'aura pas l'unité pour reste; car si cela était, les nombres ΑΒ, ΓΔ seraient premiers entr'eux, ce qui n'est pas supposé;

il restera donc quelque nombre qui mesurera celui qui est avant lui. Que ΓΔ mesurant AB laisse EA plus petit que lui-même ; que EA mesurant ΔΓ laisse ZΓ plus petit que lui-même ; et enfin que ΓZ mesure EA. Puisque ΓZ



mesure AE, et que AE mesure ΔZ, le nombre ΓZ mesurera ΔZ. Mais il se mesure lui-même ; donc il mesurera ΓΔ tout entier. Mais ΓΔ mesure BE ; donc ΓZ mesure BE. Mais il mesure EA ; donc il mesurera BA tout entier. Mais il mesure ΓΔ ; donc ΓZ mesure AB et ΓΔ ; donc ΓZ est une commune mesure des nombres AB, ΓΔ. Je dis qu'il en est la plus grande. Car si ΓZ n'est pas la plus grande commune mesure des nombres AB, ΓΔ, quelque nombre plus grand que ΓZ mesurera les nombres AB, ΓΔ. Qu'un nombre plus grand les mesure, et que ce soit H. Puisque H mesure ΓΔ, et que ΓΔ mesure BE, le nombre H mesurera BE. Mais il mesure BA tout entier ; donc il mesurera le reste AE. Mais AE mesure ΔZ ; donc H mesure ΔZ. Mais il mesure ΔΓ tout entier ; donc il mesurera le reste ΓZ, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible ; donc quelque nombre plus grand que ΓZ ne mesurera pas les nombres AB, ΓΔ ; donc ΓZ est la plus grande commune mesure des nombres AB, ΓΔ. Ce qu'il fallait démontrer.



PROPOSITION XXXIII.

Tout nombre composé est mesuré par quelque nombre premier.

Que A soit un nombre composé ; je dis que A est mesuré par quelque nombre premier.

Puisque A est un nombre composé, quelque nombre le mesurera (déf. 13. 7). Que quelque nombre le mesure, et que ce soit B. Si B est un nombre premier, on aura ce qui est proposé ; et si B est un nombre composé, quelque nombre le mesurera. Que quelque nombre le mesure, et que ce soit Γ. Puisque Γ mesure B, et que B mesure A, le nombre Γ mesurera A ; et si Γ est un nombre premier, on aura ce qui est proposé. Si Γ est composé, quelque nombre le mesurera ; d'après une telle considération, il restera quelque nombre premier qui mesurera le nombre qui est avant lui, et le nombre A. Car s'il ne restait pas de nombre premier, il y aurait une infinité de nombres qui mesureraient A, et qui seraient plus petits les uns que les autres, ce qui ne peut pas arriver dans les nombres (déf. 2. 7). Il restera donc quelque nombre premier qui mesurera le précédent, et le nombre A. Donc, etc.

LE DIXIÈME LIVRE

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

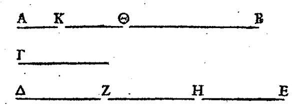
1. On appèle grandeurs commensurables celles qui sont mesurées par la même mesure.
2. Et incommensurables, celles qui n'ont aucune mesure commune.

[...]

PROPOSITION I.

Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.

Soient deux grandeurs inégales AB, Γ; que AB soit la plus grande; je dis que, si l'on retranche de AB une partie plus grande que sa moitié, et que si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la grandeur Γ.



Car Γ étant multiplié deviendra enfin plus grand que AB. Qu'il soit multiplié; que ΔE soit un multiple de Γ, et que ce multiple soit plus grand que AB. Partageons ΔE en parties ΔZ, ZH, HE égales chacune à Γ; retranchons de AB une partie BΘ plus grande que sa moitié, de AΘ une partie ΘK plus grande que sa moitié, et faisons toujours la même chose jusqu'à ce que le nombre des divisions de AB soit égal au nombre des divisions de ΔE; que le nombre des divisions AK, KΘ, ΘB soit donc égal au nombre des divisions ΔZ, ZH, HE.

Puisque ΔE est plus grand que AB, et qu'on a retranché de ΔE une partie EH plus petite que sa moitié, et qu'on a retranché de AB une partie BΘ plus grande que sa moitié, le reste HΔ est plus grand que le reste ΘA. Et puisque HΔ est plus grand que ΘA, qu'on a retranché de HΔ sa moitié HZ, et que de ΘA on a retranché ΘK plus grand que sa moitié, le reste ΔZ sera plus grand que le reste AK. Mais ΔZ est égal à Γ; donc Γ est plus grand que AK; donc AK est plus petit que Γ. Il reste donc de la grandeur AB une grandeur AK plus petite que la grandeur Γ, qui est la plus petite des grandeurs proposées. Ce qu'il fallait démontrer.

La démonstration serait la même, si les parties retranchées étaient des moitiés.

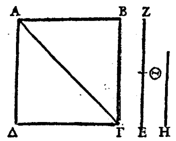
[...]

[...]

PROPOSITION CXVII.

Qu'il nous soit proposé de démontrer que dans les figures quarrées la diagonale est incommensurable en longueur avec le côté.

Soit le quarré ΑΒΓΔ, et que ΑΓ soit sa diagonale; je dis que la droite ΑΓ est incommensurable en longueur avec ΑΒ.



Qu'elle lui soit commensurable, si cela est possible; je dis qu'il s'en suivrait qu'un même nombre serait pair et impair. Or, il est évident que le quarré de ΑΓ est double du quarré de ΑΒ (47. 10); mais ΑΓ est commensurable avec ΑΒ; la droite ΑΓ a donc avec la droite ΑΒ la raison qu'un nombre a avec un nombre (6. 10). Que ΑΓ ait avec ΑΒ la raison que le nombre ΕΖ a avec le nombre Η, et que les nombres ΕΖ, Η soient les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux;

le nombre ΕΖ ne sera pas l'unité. Car si ΕΖ était l'unité, à cause que ΕΖ a avec Η la raison que ΑΓ a avec ΑΒ, et que ΑΓ est plus grand que ΑΒ, l'unité ΕΖ serait plus grande que le nombre Η, ce qui est absurde; ΕΖ n'est donc pas l'unité; ΕΖ est donc un nombre. Et puisque ΓΑ est à ΑΒ comme ΕΖ est à Η, le quarré de ΓΑ sera au quarré de ΑΒ comme le quarré de ΕΖ est au quarré de Η. Mais le quarré de ΓΑ est double du quarré de ΑΒ; le quarré de ΕΖ est donc double du quarré de Η; le quarré du nombre ΕΖ est donc pair. Le nombre ΕΖ est donc pair; car s'il était impair, son quarré serait impair; parce que si l'on ajoute tant de nombres impairs que l'on voudra, leur quantité étant impaire, leur somme est un nombre impair (23. 9); le nombre ΕΖ est donc un nombre pair. Partageons le nombre ΕΖ en deux parties égales en Θ. Puisque les nombres ΕΖ, Η sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, ces nombres seront premiers entr'eux. Mais le nombre ΕΖ est pair; le nombre Η est donc impair. Car s'il était pair, les nombres ΕΖ, Η, qui sont premiers entr'eux, seraient mesurés par deux; parce que tout nombre pair a une partie qui en est la moitié, ce qui est impossible. Le nombre Η n'est donc pas un nombre pair; il est donc impair. Mais ΕΖ est double de ΕΘ; le quarré de ΕΖ est donc quadruple du quarré de ΕΘ (11. 8). Mais le quarré de ΕΖ est double du quarré de Η; le quarré de Η est donc double du quarré de ΕΘ; le quarré de Η est donc pair; le nombre Η est donc pair, d'après ce qui a été dit (29. 9). Mais il est aussi impair, ce qui est impossible; la droite ΑΓ n'est donc pas commensurable en longueur avec ΑΒ; elle lui est donc incommensurable. Ce qu'il fallait démontrer.

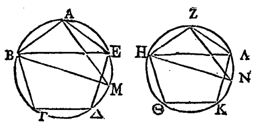
[...]

LE DOUZIÈME LIVRE
DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

PROPOSITION I.

Les polygones semblables inscrits dans des cercles sont entr'eux comme les quarrés des diamètres.

Soient les cercles ABΓΔE, ZHΘKΛ; soient dans ces cercles les polygones semblables ABΓΔE, ZHΘKΛ, et que les diamètres de ces cercles soient BM, HN; je dis que le quarré de BM est au quarré de HN comme le polygone ABΓΔE est au polygone ZHΘKΛ.

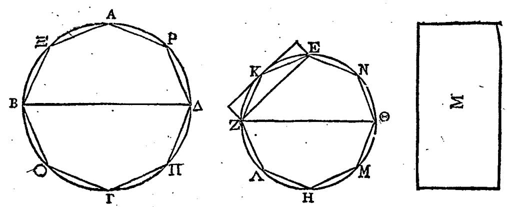


Car joignons BE, AM, HΛ, ZN. Puisque le polygone ABΓΔE est semblable au polygone ZHΘKΛ, que l'angle BAE est égal à l'angle HZΛ (déf. 1. 6), et que BA est à AE comme HZ est à ZΛ, les deux triangles BAE, HZΛ ont un angle égal à un angle; savoir, l'angle BAE égal à l'angle HZΛ, et les côtés, placés autour de ces angles, proportionnels; les triangles ABE, ZHΛ sont donc équiangles (6. 6); l'angle AEB est donc égal à l'angle ZΛH. Mais l'angle AEB est égal à l'angle AMB (21. 3), car ces angles sont appuyés sur le même arc, et l'angle ZΛH est aussi égal à l'angle ZNH; l'angle AMB est donc égal à l'angle ZNH. Mais l'angle droit BAM est égal à l'angle droit HZN (31. 3); l'angle restant est donc égal à l'angle restant; les deux triangles ABM, ZHN sont donc équiangles; BM est donc à HN comme BA est à HZ (4. 6). Mais la raison du quarré de BM au quarré de HN est double de la raison BM à HN (20. 6), et la raison du polygone ABΓΔE au polygone ZHΘKΛ est double de la raison de BA à HZ; le quarré de BM est donc au quarré de HN comme le polygone ABΓΔE est au polygone ZHΘKΛ (11. 5). Donc, etc.

PROPOSITION II.

Les cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs diamètres.

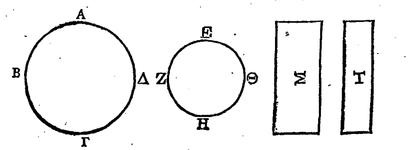
Soient les cercles ABΓΔ, EZHΘ, et que leurs diamètres soient BΔ, ZΘ; je dis que le quarré de BΔ est au quarré de ZΘ comme le cercle ABΓΔ est au cercle EZHΘ.



Car si le quarré de BΔ n'est pas au quarré de ZΘ comme le cercle ABΓΔ est au cercle EZHΘ, le quarré BΔ sera au quarré de ZΘ comme le cercle ABΓΔ est à une surface plus grande ou à une surface plus petite que le cercle EZHΘ. Que ce soit d'abord à une surface Σ plus petite. Dans le cercle EZHΘ décrivons le quarré EZHΘ; le quarré décrit sera plus grand que la moitié du cercle EZHΘ, parce que, si par les points E, Z, H, Θ nous menons des tangentes à ce cercle, le quarré EZHΘ sera la moitié du quarré circonscrit au cercle (47. 11 et 31. 3). Mais le cercle est plus petit que le quarré circonscrit; le quarré inscrit EZHΘ est donc plus grand que la moitié du cercle EZHΘ. Partageons les arcs EZ, ZH, HΘ, ΘE en deux parties égales aux points K, Λ, M, N, et joignons EK, KZ, ZΛ, ΛH, HM, MΘ, ΘN, NE. Chacun des triangles EKZ, ZΛH, MHΘ, ΘNE est donc plus grand que la moitié du segment dans lequel il est placé; parce que si par les points K, Λ, M, N nous menons des tangentes au cercle, et si sur les droites EZ, ZH, HΘ, ΘE nous construisons des parallélogrammes, chacun des triangles EKZ, ZΛH, HMΘ, ΘNE sera la moitié du parallélogramme dans lequel il est placé (37. 1). Mais un segment est plus petit que le parallélogramme où il est placé; chacun des triangles EKZ, ZΛH, HMΘ, ΘNE est donc plus grand que la moitié du segment dans lequel il est placé. Si nous partageons les arcs restants en deux parties égales; si nous joignons leurs extrémités par des droites, et si nous continuons toujours de faire la même chose, il nous restera certains segments de cercles dont la somme sera moindre que l'excès du cercle ΕΖΗΘ sur la surface Σ; car nous avons démontré dans le premier théorème du dixième livre que, deux grandeurs inégales étant données, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on continue toujours de faire la même chose, il reste enfin une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs exposées. Qu'on ait ce reste, et que ce soient les segments du cercle ΕΖΗΘ placés sur les droites ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ, et qu'ils soient plus petits que l'excès du cercle ΕΖΗΘ sur la surface Σ; le polygone restant ΕΚΖΛΗΜΘΝ sera plus grand que la surface Σ. Décrivons dans le cercle ΑΒΓΔ un polygone ΑΞΒΟΓΠΔΡ semblable au polygone ΕΚΖΗΝΜΘΝ; le quarré de ΒΔ sera au quarré de ΖΘ comme le polygone ΑΞΒΟΓΠΔΡ est au polygone ΕΚΖΛΗΜΘΝ (1. 12). Mais le quarré de ΒΔ est au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à la surface Σ; le cercle ΑΒΓΔ est donc à la surface Σ comme le polygone ΑΞΒΟΓΠΔΡ est au polygone ΕΚΖΛΗΜΘΝ; donc, par permutation, le cercle ΑΒΓΔ est au polygone qui lui est inscrit comme la surface Σ est au polygone ΕΚΖΛΗΜΘΝ. Mais le cercle ΑΒΓΔ est plus grand que le polygone qui lui est inscrit; la surface Σ est donc plus grande que le polygone ΕΚΖΛΗΜΘΝ. Mais il est aussi plus petit, ce qui est impossible; le quarré de ΒΔ n'est donc point au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à une surface plus petite que le cercle ΕΖΗΘ. Nous démontrerons semblablement que le quarré de ΖΘ n'est point au quarré de ΒΔ comme le cercle ΕΖΗΘ est à une surface plus petite que le cercle ΑΒΓΔ. Je dis ensuite que le quarré de ΒΔ n'est point au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à une surface plus grande que le cercle ΕΖΗΘ. Car si cela est possible, que le quarré de ΒΔ soit au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à une surface Σ plus grande. Par inversion, le quarré de ΖΘ sera au quarré de ΒΔ comme la surface Σ est au cercle ΑΒΓΔ. Mais la surface Σ est au cercle ΑΒΓΔ comme le cercle ΕΖΗΘ est à une surface plus petite que le cercle ΑΒΓΔ; le quarré de ΖΘ est donc au quarré de ΒΔ comme le cercle ΕΖΗΘ est à une surface plus petite que le cercle ΑΒΓΔ, ce qui a été démontré impossible; le quarré de ΒΔ n'est donc pas au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à une surface plus grande que le cercle ΕΖΗΘ. Mais on a démontré que le quarré de ΒΔ n'est point au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à une surface plus petite que le cercle ΕΖΗΘ; le quarré de ΒΔ est donc au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est au cercle ΕΖΗΘ. Donc, etc.

LEMME.

Je dis que si la surface Σ est plus grande que le cercle ΕΖΗΘ, la surface Σ sera au cercle ΑΒΓΔ comme le cercle ΕΖΗΘ est à une surface plus petite que le cercle ΑΒΓΔ.



Car que la surface Σ soit au cercle ΑΒΓΔ comme le cercle ΕΖΗΘ est à une surface Τ; je dis que la surface Τ est plus petite que le cercle ΑΒΓΔ. Car puisque la surface Σ est au cercle ΑΒΓΔ comme le cercle ΕΖΗΘ est à la surface Τ, par permutation, la surface Σ sera au cercle ΕΖΗΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à la surface Τ (16. 5). Mais la surface Σ est plus grande que le cercle ΕΖΗΘ; le cercle ΑΒΓΔ est donc plus grand que la surface Τ; la surface Σ est donc au cercle ΑΒΓΔ comme le cercle ΕΖΗΘ est à une surface plus petite que le cercle ΑΒΓΔ. Ce qu'il fallait démontrer.

[...]

ARCHIMÈDE

LA MESURE DU CERCLE

1.

Tout cercle est équivalent à un triangle rectangle dans lequel l'un des côtés de l'angle droit est égal au rayon du cercle et la base (c'est-à-dire l'autre côté de l'angle droit) égale au périmètre du cercle .
Que le cercle ΑΒΓΔ soit au triangle Ε comme l'indique l'hypothèse ; je dis qu'il lui est équivalent.

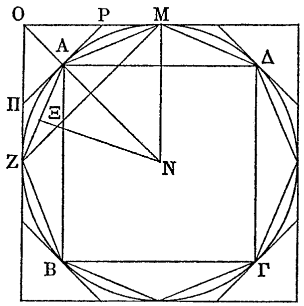


Fig. 61.

Que le cercle soit en effet, si possible, plus grand. Inscrivons-y le carré ΑΓ et divisons en deux parties égales les arcs (sc. admettant comme cordes les côtés du carré) ; que les segments de cercle aient à la fin (sc. si on répète les opérations de division en deux parties égales) une somme inférieure à la différence entre l'aire du cercle et celle du triangle . La figure rectiligne sera donc encore plus grande que le triangle. Prenons le centre Ν et abaissons la perpendiculaire ΝΞ. ΝΞ sera donc inférieur au (sc. plus petit) côté du triangle.

Mais le périmètre de la figure rectiligne est à son tour plus petit que le côté restant, du moment qu'il est plus petit que le périmètre du cercle . La figure rectiligne est par conséquent plus petite que le triangle Ε, ce qui est absurde.

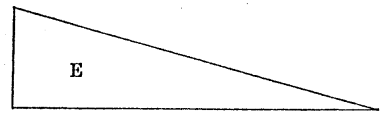


Fig. 62.

Que le cercle soit, d'autre part, plus petit, si possible, que le triangle Ε ; circonscrivons-lui un carré, divisons les arcs en deux parties égales et menons des tangentes par les points (sc. de division). L'angle ΟΑΡ est donc droit ; ΟΡ est par conséquent supérieur à ΜΡ, du moment que ΡΜ est égal à ΡΑ, et le triangle ΡΟΠ est plus grand que la moitié de la figure ΟΖΑΜ . Qu'il reste donc des segments tels que ΠΖΑ, dont la somme soit inférieure à la différence entre l'aire du triangle Ε et celle du cercle ΑΒΓΔ . La figure rectiligne circonscrite est, par conséquent, encore inférieure au triangle Ε, ce qui est absurde ; elle est, en effet, plus grande, du moment que ΝΑ est égal à la hauteur du triangle, et que le périmètre est plus grand que la base du triangle . Il s'ensuit que le cercle est équivalent au triangle Ε.

[...]

LA QUADRATURE DE LA PARABOLE

Archimède à Dosithée, prospérité !

Quand j'appris que Conon, dont l'amitié ne m'avait jamais fait défaut, était mort, que tu avais été lié avec Conon et que tu es expert en géométrie, je fus affligé de la mort d'un homme qui était à la fois un ami et un esprit remarquable en mathématiques, et je pensai à t'envoyer par écrit, comme j'avais eu l'intention de le faire à Conon, un théorème de géométrie, qui n'avait pas été étudié auparavant, mais que j'ai étudié maintenant, en le démontrant par la géométrie après l'avoir découvert par la mécanique. Certains des géomètres anciens se sont efforcés de montrer par écrit qu'il est possible de trouver une aire rectiligne équivalente à l'aire d'un cercle donné ou à celle d'un segment de cercle donné , après quoi ils ont essayé de carrer l'aire comprise entre une section de cône entier et une droite, en assumant des lemmes inadmissibles, et c'est là la raison pour laquelle la plupart ont jugé que ces propositions n'ont pas été inventées par eux. En ce qui concerne le segment compris entre une droite et une parabole, nous savons qu'aucun

des géomètres anciens n'en a cherché la quadrature, que nous avons trouvée maintenant ; nous démontrons, en effet, que tout segment compris entre une droite et une parabole est équivalent aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur que le segment, en admettant pour la démonstration le lemme que voici : l'excès de la plus grande de deux aires inégales sur la plus petite peut dépasser, s'il est ajouté (sc. un nombre suffisant de fois) à lui-même, toute aire finie donnée. Or les géomètres antérieurs ont fait appel eux aussi à ce lemme ; car c'est en se servant de ce lemme qu'ils ont démontré que les cercles ont entre eux le rapport des carrés sur leurs diamètres et que les sphères ont entre elles le rapport des cubes sur leurs diamètres , et ils ont démontré que toute pyramide est équivalente au tiers du prisme ayant même base et même hauteur que la pyramide, et que tout cône est équivalent au tiers du cylindre ayant même base et même hauteur que le cône , en prenant un lemme semblable à celui que nous venons d'indiquer. Il se trouve cependant que tous ces théorèmes cités sont considérés comme non moins vrais que ceux qui ont été démontrés sans ce lemme ; il me suffit d'avoir amené au même degré de certitude ceux que je publie maintenant. Je t'envoie donc les démonstrations que j'ai rédigées pour le théorème (sc. indiqué), en montrant d'abord comment je l'ai examiné par la mécanique, ensuite aussi comment je l'ai prouvé par la géométrie. Je ferai précéder, de plus, mes démonstrations de propositions élémentaires sur les coniques utiles pour la démonstration. Sois en bonne santé.

APOLLONIUS

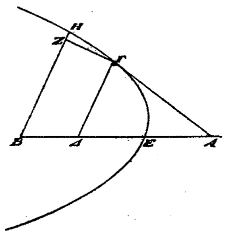
[...]

PROPOSITION XXXIII.

Si l'on prend un point sur une parabole ; si, de ce point, l'on abaisse une droite d'une manière ordonnée sur le diamètre, et si l'on pose une droite égale à celle que cette dernière droite découpe sur le diamètre, dans la direction de celui-ci, et à partir du sommet, la droite de jonction, menée du point ainsi obtenu au point que l'on a pris, sera tangente à la section.

Soit une parabole dont un diamètre est la droite AB. Abaissons une droite ΓΔ de manière ordonnée ; posons une droite AE égale à la droite EΔ, et menons la droite de jonction AΓ. Je dis que la droite AΓ prolongée tombera à l'extérieur de la section.

En effet, qu'elle tombe à l'intérieur comme la droite ΓZ, et abaissons la droite HB de manière ordonnée. Dès lors, puisque le rapport du carré de BH au carré de ΓΔ est plus grand que celui du carré de ZB au carré de ΓΔ ; mais que le carré de BA est au carré de AΔ comme le carré de ZB est au carré de ΓΔ, et que BE est à ΔE comme le carré de HB est au carré de ΓΔ , il s'ensuit que le rapport de BE à EΔ est plus grand que celui du carré de BA au carré de AΔ. Or, le quadruple du rectangle délimité sous BE, EA est au quadruple du rectangle délimité sous AE, EΔ comme BE est à EΔ;



donc, le rapport du quadruple du rectangle délimité sous BE, EA au quadruple du rectangle délimité sous AE, EΔ est plus grand que celui du carré de BA au carré de AΔ. Dès lors, par permutation, le rapport du quadruple du rectangle délimité sous BE, EA au carré de AB est plus grand que celui du quadruple du rectangle délimité sous AE, EΔ au carré de AΔ ; ce qui ne peut avoir lieu, car, EΔ étant égal à AE, le quadruple du rectangle délimité sous AE, EΔ équivaut au carré de AΔ, et le quadruple du rectangle délimité sous BE, EA est moindre que le carré de BA, puisque le point E n'est pas le milieu de la droite AB. Dès lors, la droite AΓ ne tombe pas à l'intérieur de la section ; donc elle lui est tangente.

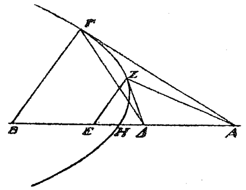
[...]

PROPOSITION XXXV.

Lorsqu'une droite rencontrant un diamètre à l'extérieur de la section est tangente à une parabole, la droite, amenée de manière ordonnée du point de contact sur le diamètre, découpera sur le diamètre, à partir du sommet de la section, une droite égale à celle qui est située entre le sommet et la tangente ; et nulle droite ne tombera dans l'espace compris entre la tangente et la section.

Soit une parabole dont un diamètre est la droite AB. Abaissons la droite BΓ de manière ordonnée, et que la droite AΓ soit tangente à la section. Je dis que la droite AH est égale à la droite HB.

En effet, qu'elle ne lui soit pas égale, s'il se peut. Posons la droite HE égale à la droite AH ; abaissons la droite EZ de manière ordonnée, et menons la droite de jonction AZ. Dès lors, la droite AZ



prolongée rencontrera la droite AΓ ; ce qui ne peut avoir lieu, car les extrémités de ces deux droites seraient les mêmes. Par conséquent, la droite AH n'est pas inégale à la droite HB ; donc elle lui est égale.

D'autre part, je dis qu'aucune droite ne tombera dans l'espace compris entre la droite AΓ et la section.

En effet, qu'une droite ΓΔ tombe dans cet espace, s'il se peut. Posons la droite HE égale à la droite HΔ, et menons la droite EZ d'une manière ordonnée. Dès lors, la droite de jonction, menée du point Δ au point Z, sera tangente à la section ; donc, cette droite prolongée tombera à l'extérieur de la section ; en sorte qu'elle rencontrera la droite ΔΓ, et les extrémités de ces deux droites seront les mêmes ; ce qui ne peut avoir lieu. Dès lors, une droite ne tombera pas dans l'espace compris entre la section et la droite AΓ.

[...]

Les Anciens ont admis que les problèmes appartiennent à trois genres en géométrie : les uns sont appelés plans , d'autres solides et d'autres encore grammiques . On appelle à juste titre plans ceux qui peuvent être résolus au moyen de lignes droites et de circonférences de cercles ; car les lignes au moyen desquelles les problèmes de ce genre sont résolus trouvent leur origine dans le plan. Quant aux problèmes dont la solution invoque une ou plusieurs sections de cône, ils sont appelés solides ; car il faut faire usage de surfaces de figures solides pour leur construction, notamment de surfaces coniques. Reste le troisième genre de problèmes appelés grammiques, parce que, outre les lignes que nous venons de dire, ils en admettent d'autres pour leur construction, dont l'origine est plus variée et plus complexe, telles que [les spirales] , les quadra-

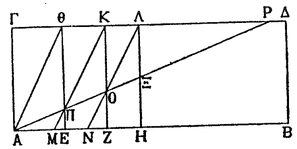
trices , les conchoïdes et les cissoïdes qui possèdent des propriétés nombreuses et étonnantes .

La différence qui existe entre les problèmes étant donc telle, les anciens géomètres n'ont pas pu construire le problème précité relatif aux deux droites , solide par nature, d'une manière conforme au raisonnement géométrique, parce qu'il n'est pas facile de tracer des sections de cône dans le plan ; mais ils y sont parvenus cependant d'une façon admirable en faisant usage d'instruments propres à exécuter la construction manuellement et commodément, comme on peut le constater dans le *Mésolabe* d'Ératosthène et dans les *Mécaniques* de Philon et de Héron . En effet, ces derniers ayant admis que le problème est solide, ils ont effectué la construction uniquement d'une manière instrumentale, [se conformant ainsi à Apollonius de Perge, qui réalisa aussi la solution du problème au moyen des sections de cône. D'autres l'ont réalisée au moyen des *Lieux Solides* d'Aristée ; mais personne ne l'a réalisée au moyen des lieux plans proprement dits] ;

[...]

Proposition 5. — Soit donc une plinthe rigide ΑΒΓΔ et, dans celle-ci, des triangles égaux ΑΕΘ, ΜΖΚ, ΝΗΛ ayant les angles droits aux points Ε, Ζ, Η. Que le triangle ΑΕΘ reste attaché, et que le triangle ΜΖΚ puisse se mouvoir dans les règles ΑΒ, ΓΔ , de telle sorte que le côté ΜΖ soit transporté

dans la règle ΑΒ qui possède une rainure dans toute sa longueur, et que le sommet Κ le soit dans la règle ΓΔ qui est aussi rainurée dans toute sa longueur. Enfin, que le triangle ΝΗΛ puisse se mouvoir aussi de la même manière dans les règles ΑΒ, ΓΔ suivant les canaux que nous avons dits.



Les choses étant disposées de cette manière, celui qui veut faire en sorte qu'un cube soit le double d'un cube, découpera la droite ΛΞ, moitié de la droite ΑΓ, puis fera avancer les triangles ΜΖΚ, ΝΗΛ jusqu'à obtenir les points Α, Ξ sur la même droite contenant les points d'intersection Π, Ο des triangles, et, enfin, mènera la droite de jonction ΑΠΟΞ, rencontrant la droite ΓΔ au point Ρ (car cela doit nécessairement suivre), et ce qu'il s'est proposé se réalisera.

En effet, puisque la droite ΑΡ est à la droite ΠΡ, la droite ΑΘ à la droite ΠΚ, la droite ΘΡ à la droite ΡΚ, la droite ΠΘ à la droite ΟΚ, la droite ΠΡ à la droite ΡΟ, la droite ΠΚ à la droite ΟΛ, la droite ΚΡ à la droite ΡΛ et la droite ΟΚ à la droite ΛΞ comme la droite ΑΓ est à la droite ΠΘ, il s'ensuit que les droites ΠΘ, ΟΚ sont deux moyennes en proportion continue des droites ΑΓ, ΛΞ. Or, la droite ΑΓ est le double de la droite ΛΞ ; donc, le cube construit sur la droite ΑΓ est aussi le double du cube construit sur la droite ΠΘ . D'autre part, si le rapport de cube à cube est quelque autre, il faut que la droite ΑΓ ait ce même rapport avec la droite ΛΞ, et les choses restantes se construiront de la même manière. [Et il résulte clairement de ceci qu'il est impossible de résoudre la proposition au moyen des plans] (1).

[...]

1. La phrase mise entre crochets n'exprime pas une conséquence nécessaire de ce qui précède, de sorte qu'elle doit avoir été interpolée.

[...]

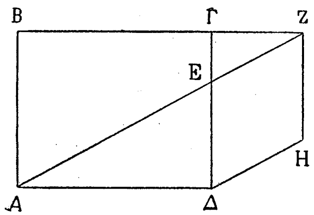
Ce qui différencie les problèmes étant donc tel, les premiers géomètres ont été incapables de trouver le problème prémentionné relatif à l'angle (5), lequel est de nature solide, en le cherchant au moyen de plans (6), car les sections de cône ne leur étaient

5. C'est-à-dire le problème de la trisection de l'angle non droit.
6. C'est-à-dire en faisant intervenir des problèmes plans, n'utilisant donc que des intersections de droites et de cercles.

pas encore familières et c'est à cause de cela qu'ils sont restés en suspens. Ils ont cependant opéré la trisection de l'angle plus tard, après avoir eu recours, pour trouver celle-ci, à l'inclinaison que nous exposons ci-dessous.

Proposition 31. — Étant donné un parallélogramme rectangulaire ΑΒΓΔ, et la droite ΒΓ étant prolongée, il faut qu'en menant transversalement la droite ΑΕ, il soit fait en sorte que la droite ΕΖ soit égale à une droite donnée.

Que la chose soit obtenue et menons les droites ΔΗ, ΗΖ parallèles aux droites ΕΖ, ΕΔ. Dès lors, puisque la droite ΖΕ est donnée et qu'elle est égale à la droite ΔΗ, la droite ΔΗ est donc donnée aussi. De plus, le point Δ est donné ; donc, le point Η est sur la circonférence d'un cercle donné de position . Et puisque le rectangle compris sous les droites ΒΓ, ΔΓ est donné et équivaut au rectangle compris sous les droites ΒΖ, ΕΔ, il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites ΒΖ, ΕΔ, c'est-à-dire le rectangle compris sous les droites ΒΖ, ΖΗ, est donné aussi . En conséquence, le point Η est sur une hyperbole .



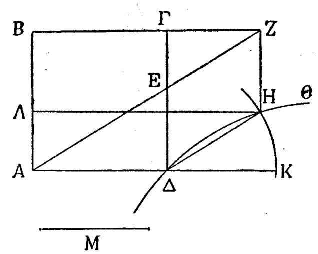
Or, il est aussi sur une circonférence de cercle donnée ; donc, le point Η est donné.

XXXVII.

Le problème se synthétisera donc de la manière suivante :

Soient ΑΒΓΔ le parallélogramme donné, Μ la droite donnée de grandeur, et que la droite ΔΚ lui soit égale. Décrivons par le point Δ l'hyperbole ΔΗΘ à l'égard des asymptotes ΑΒ, ΒΓ (ce qui sera montré dans la suite) , et décrivons par le point Κ, autour du centre Δ, l'arc du cercle ΚΗ coupant l'hyperbole au point Η ; enfin, ayant mené la droite ΗΖ parallèle à la droite ΔΓ, menons la droite de jonction ΖΑ ; je dis que la droite ΕΖ est égale à la droite Μ.

En effet, menons la droite de jonction ΗΔ et menons la droite ΗΛ parallèle à la droite ΚΑ. Dès lors, le rectangle compris sous les droites ΖΗ, ΗΛ, c'est-à-dire celui qui est compris sous les droites ΒΖ, ΖΗ, équivaut au rectangle compris sous les droites ΓΔ, ΔΑ, c'est-à-dire au rectangle compris sous les droites ΒΓ, ΓΔ . En

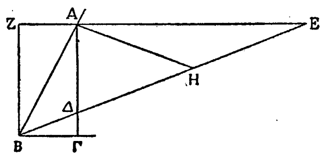


conséquence, la droite ΓΔ est à la droite ZH comme la droite ZB est à la droite BΓ, c'est-à-dire comme la droite ΓΔ est à la droite ΔE ; donc, la droite EΔ est égale à la droite ZH ; donc, ΔEZH est un parallélogramme ; donc, la droite EZ est égale à la droite ΔH, c'est-à-dire à la droite ΔK, c'est-à-dire à la droite M .

XXXVIII.

Proposition 32. — Cela étant donc démontré, la tripartition d'un angle rectiligne donné se fera de la manière suivante :

En effet, que l'angle compris sous les droites AB, BΓ soit d'abord aigu ; menons, d'un point quelconque , la perpendiculaire AΓ et, complétant le parallélogramme ΓZ, prolongeons la droite ZA jusqu'au point E. De plus, le parallélogramme ΓZ étant rectangle, posons, entre les droites EA, AΓ, la droite EΔ inclinée sur le point B, égale au double de la droite AB (car on a exposé plus haut comment cela peut être obtenu) . Dès lors, je dis que l'angle compris sous les droites EB, BΓ est la troisième partie de l'angle donné, compris sous les droites AB, BΓ.

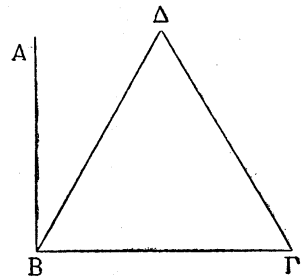


En effet, coupons la droite EΔ en deux parties égales au point H et menons la droite de jonction AH. Dès lors, les trois droites ΔH, HA, HE sont égales ; par conséquent, la droite ΔE

est double de la droite AH. Mais, elle est aussi double de la droite AB ; donc, la droite BA est égale à la droite AH et l'angle compris sous les droites AB, BΔ est égal à celui qui est compris sous les droites AH, HΔ. Or, l'angle compris sous les droites AH, HΔ est double de celui qui est compris sous les droites AE, EΔ, c'est-à-dire de celui qui est compris sous les droites ΔB, BΓ ; donc, l'angle compris sous les droites AB, BΔ est aussi double de celui qui est compris sous les droites ΔB, BΓ ; et si nous coupons l'angle compris sous les droites AB, BΔ en deux parties égales, l'angle compris sous les droites AB, BΓ sera coupé en trois parties égales .

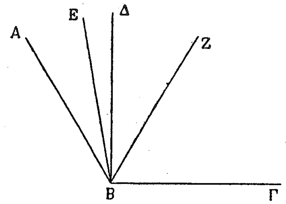
XXXIX.

Mais, si l'angle donné est droit, prenons une droite BΓ sur laquelle nous décrivons le triangle équilatéral BΔΓ et, divisant l'angle compris sous les droites ΔB, BΓ en deux parties égales, nous aurons l'angle compris sous les droites AB, BΓ divisé en trois parties égales.



XL.

Mais, que l'angle soit obtus ; que la droite BΔ soit à angles droits sur la droite ΓB ; enlevons d'une part l'angle compris sous les droites ΔB, BZ, troisième partie de l'angle compris sous les droites ΔB, BΓ, et, d'autre part, l'angle compris sous les droites EB, BΔ, troisième partie de l'angle compris sous les droites AB,



BΔ (car nous avons montré cela précédemment) . En conséquence, l'angle compris sous les droites EB, BZ est la troisième partie de l'angle entier compris sous les droites AB, BΓ ; et, si nous établissons contre chacune des droites AB, BΓ un angle égal [à celui qui est compris sous les droites EB, BZ] (²), nous couperons l'angle donné en trois parties égales.

[...]

EUTOCIUS

[...]

Ménechme.

Soit A et E les deux segments de droite donnés ; il faut trouver deux moyennes proportionnelles entre A et E.

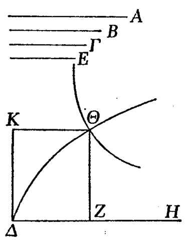


Fig. 31.

Supposons le problème résolu, et soit B et Γ (sc. les moyennes proportionnelles cherchées) ; soit ΔH une demi-droite, issue de Δ, donnée par sa position ; portons sur elle à partir de Δ le segment ΔZ égal à Γ, élevons la perpendiculaire en Z et portons sur elle ZΘ égal au segment B. Du moment donc que les trois segments A, B et Γ sont proportionnels, le rectangle de côtés A et Γ est équivalent au carré sur B, d'où il suit que le rectangle ayant pour côtés les segments donnés A et Γ, c'est-à-dire A et ΔZ, est équivalent au carré sur B, c'est-à-dire au carré sur ZΘ. Le point Θ est donc situé sur une parabole passant par le point Δ. Menons les parallèles ΘK et ΔK. Comme le rectangle de côtés B et Γ est donné, étant égal au rectangle de côtés A et E, le rectangle de côtés KΘ et ΘZ est à son tour donné. Le point Θ est donc situé sur une hyperbole d'asymptotes KΔ et ΔZ. Il s'ensuit que le point Θ et, partant, aussi le point Z, est donné.

Le problème sera dès lors composé de la manière que voici. Soit A et E les segments de droite donnés, ΔH la demi-droite issue de Δ ; faisons passer par Δ une parabole ayant pour axe ΔH et pour paramètre A ; que les carrés sur les perpendiculaires abaissées sur ΔH soient équivalents aux aires appliquées à A et ayant pour largeurs les segments découpés par elles (sc. par les perpendiculaires) à partir de Δ. Soit ΔΘ la parabole ainsi décrite, ΔK la perpendiculaire (sc. en Δ sur ΔH) ; entre KΔ et ΔZ comme asymptotes traçons une hyperbole telle que les parallèles à KΔ et ΔZ menées de ses points comprennent une aire équivalente au rectangle de côtés A et E ; cette hyperbole coupera donc la parabole. Soit Θ le point d'intersection ; menons les perpendiculaires ΘK et ΘZ. Du moment donc que le carré sur ZΘ est équivalent[1] au rectangle de côtés A et ΔZ, A est à ZΘ comme ΘZ est à ZΔ. Comme, en outre, le rectangle de côtés A et E est équivalent au rectangle de côtés ΘZ et ZΔ, A est à ZΘ comme ZΔ est à E. Mais A est à ZΘ comme ZΘ est à ZΔ ; il s'ensuit que A est à ZΘ comme ZΘ est à ZΔ et comme ZΔ est à E. Posons B égal à ΘZ et Γ égal à ΔZ ; A sera alors à B comme B est à Γ et comme Γ est à E. Les segments de droite A, B, Γ et E sont donc en proportion continue, ce qu'il fallait trouver.

[...]