LU3MA209
Eléments d'histoire des mathématiques, niveau L3

L'enseignant : David AUBIN (david.aubin@sorbonne-universite.fr)

– *Fascicule 2* –

1. Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (mort vers 850), *Livre concis du calcul de l'aljabr et l'al-muqabala*, trad. A. Djebbar, d'après l'éd. de A. M. Mashrafa & M. Mursi Ahmade (Le Caire, 1969), p. 20-24.
2. Ibn al-Haytham (m. 1039), et commentateur, « Traité sur la quadrature du cercle », trad. R. Rashed, in les *Mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle*, t. 2 (Londres, 1993), p. 82-98 (numéros pairs seul.).
3. Nasir al-Din al-Tusi (m. 1274), « Opuscule qui délivre des doutes concernant les droites parallèles », trad. K. Jaouiche in *La Théorie des parallèles en pays d'Islam* (Paris, 1986), p. 215-224.
4. Rafael de Bombelli, *L'Algebra* (Bologne, 1572 2e éd. 1579), trad. J.-P. Le Goff (IREM de Basse-Normandie, 1998) ; Livre Ier, p. 47-48 ; Livre II, p. 57, 59-64.
5. Albert Girard, *L'invention nouvelle en algèbre* (1638), extrait, 3 pages.
6. Pierre Fermat, *Œuvres*, supplément : « Méthode de maximis et minimis » (1638), p. 74-76.
7. René Descartes :
   - *La Géométrie* (1re éd., Leyde, 1637), Livre I, p. 297-304.
   - *La Géométrie* (rééd., Paris, 1886), Livre II, p. 15-17 & Livre III, p. 54-57, 59-60 & 63-69.
   - *Œuvres de Descartes* (rééd., Paris: Vrin, 1976), « Correspondance avec Élisabeth » (1643), t. IV, p. 37-42.
8. Isaac Newton, *La méthode des fluxions et des suites infinies*, trad. Georges Buffon (1740 ; réimp. Blanchard, 1994), p. 1-4.
9. Guillaume François Antoine, marquis de l'Hôpital, *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes* (Paris, 1696), p. 1-14 (avec figures 1-5).
10. Gottfried Wilhelm Leibniz, « Aperçu d'une nouvelle analyse concernant la science de l'infini appliquée aux sommes et aux quadratures », *Acta eruditorum* (mai 1702) ; trad. M. Parmentier, in *Leibniz : la naissance du calcul différentiel* (Paris: Vrin, 1989), p. 387-401.
11. Leonhard Euler, *Introduction à l'analyse infinitésimale* (Lausanne, 1748; trad. J. Labey, Paris, 1796), t. I, p. 1-6, 45-47, 92-93, 96-98 & 102.

Al - Khwarizmi

Quant au carré et au nombre qui égalent des racines, c'est comme quand tu dis : Un carré et vingt et un en nombre égalent dix de ses racines. Cela vaut aussi pour tout bien qui est tel que si on lui ajoute vingt et un dirham, la somme qui en résulte est égale à dix racines de ce bien.

La méthode de résolution consiste en ceci :

Prends la moitié des racines, cela fera cinq.
Tu la multiplies par elle-même, cela fera vingt cinq.
Tu retranches les vingt et un dont a dit qu'ils étaient avec les carrés, il restera quatre.
Tu prends sa racine qui est deux.
Tu le retranches de la moitié des racines qui est cinq, il restera trois.
Et c'est la racine du carré que tu voulais et le carrré est neuf.
Si tu veux, ajoutes la racine (de quatre) à la moitié des racines.
Cela fera sept et ce sera la racine du carré que tu voulais et le carré est quarante neuf.

Si tu rencontres un problème qui te mène à ce cas, tu vérifies sa validité par l'accroissement, si elle n'est pas (vérifiée), elle le sera alors nécessairement par diminution.

Ce cas se résout à la fois par l'accroissement et par la diminution et, cela n'est pas ainsi pour les autres cas parmi les trois pour lesquels on a besoin de prendre la moitié des racines.

Sache aussi que, dans ce cas, si, ayant pris la moitié des racines et les ayant multipliées par elles-mêmes, le résultat est inférieur aux dirham qui sont avec le carré, le problème est alors impossible.
S'il est égal aux dirham eux-mêmes, la racine du carré est alors égale, exactement, à la moitié des racines, sans accroissement ni diminution.

[...]

Quant à (la justification de la solution de) : un carré et vingt et un dirham égalent dix de ses racines, nous prenons pour le carré une surface carrée de côtés inconnus et c'est la surface (AD) puis, nous lui accolons une surface à côtés parallèles de largeur égale à l'un des côtés de la surface (AD), ce sera le côté EN, et la surface sera (EB). La longueur des deux surfaces réunies sera alors CE. Et nous avons appris que sa longueur était dix en nombre car, pour toute surface carrée de côtés et d'angles égaux, un de ses côtés multiplié par un est égal à la racine de cette surface, et (multiplié) par deux, (il est égal) à deux de ses racines .
Comme on a dit: Un carré et vingt un égalent dix de ses racines, on sait alors que la longueur du côté CE est dix en nombre, car le côté CD est le côté du carré.

Puis, nous divisons le côté CE en deux moitiés, au point H. Nous voyons que le segment EH est égal au segment HC. (Soit I milieu de DN). Nous voyons que HI est égal à CD. Ajoutons au segment HI, dans son prolongement, l'équivalent de l'excès de CH sur HI, (ajoutons au segment EN, dans son prolongement le segment EM) afin que surface (NK) soit un carré. Le segment IK est alors égal à KM. Nous avons donc une surface carrée de côtés et d'angles égaux et c'est la surface (MI). Or, nous avons vu que le segment IK est (égal à) cinq et les côtés sont égaux. La surface est donc (égale à) 25, et c'est le résultat du produit de la moitié des racines par elle-même, (c'est à dire) cinq (mulitiplié) par cinq qui donne vingt-cinq. (Mais), on avait vu que la surface (EB) était les vingt et un qui avaient été ajoutés aux carrés. A l'aide du segment IK qui est un des côtés de la surface (MI), nous dissocions (EI) de la surface (EB) et il reste la surface (AI). Nous prenons, du segment KM, le segment KL qui est égal au segment HK (et, sur HE, le segment HG égal à LK). Nous voyons que le segment IH est égal au segment ML, et il reste du segment MK le segment LK qui est égal au segment KH. La surface (MG) est alors égale à (IA).
On voit donc que la surface (EI), augmentée de la surface (MG), est égale à la surface (EB) qui est vingt et un. Mais la surface (MI) est (égale à) vingt cinq. Lorsque nous aurons retranché de la surface (MI) les surfaces (EI) et (MG) qui sont (égales à) vingt et un, il nous restera une petite surface et c'est la surface (GK) qui est la différence entre vingt cinq et vingt et un et c'est quatre. Sa racine est le segment GH qui est égal au segment HA qui est (égal à) deux. Si tu le retranches du segment HC qui est la moitié des racines, il reste le segment AC qui est (égal à) trois et c'est la racine du premier carré. Si tu l'ajoutes au segment CH qui est (égal à) la moitié des racines, cela vaudra sept et c'est le segment GC. Ce sera la racine d'un carré plus grand que le (premier carrré) et qui, si tu lui ajoutes vingt et un, est égal à dix de ses racines.
Et voici la figure (de la preuve) : [à faire]

Et c'est ce que nous voulions démontrer .

Ibn al-Haytham

TRAITÉ D'AL-ḤASAN IBN AL-ḤASAN IBN AL-HAYTHAM

Sur la quadrature du cercle

De nombreux philosophes ont cru que la surface du cercle ne peut pas être égale à la surface d'un carré limité par des droites. Cette notion a souvent été reprise dans plusieurs de leurs dialogues et de leurs controverses, mais nous n'avons trouvé chez aucun des anciens ni des modernes, une figure polygonale égale à la surface d'un cercle d'une manière parfaitement exacte. Quant à Archimède, il a eu recours à une certaine approximation[1] dans ce qu'il a présenté à propos de la mesure du cercle. Or cette dernière notion est l'une de celles qui ont renforcé l'opinion des philosophes dans leur conviction. Comme il en a été ainsi, nous avons réfléchi profondément à cette notion et il nous a alors été révélé qu'elle est possible, qu'elle n'est pas difficile et qu'elle a des analogues: il peut exister une lunule, entourée par deux arcs de deux cercles tout en étant égale à un triangle, et il peut exister une lunule et un cercle, dont la somme est égale à un triangle. Nous avons exposé plusieurs figures différentes, de cette espèce, dans notre livre *Sur les lunules*./ Mais comme il en est ainsi pour les figures des lunules, nous sommes devenu plus intimement convaincu / qu'il est possible que l'aire du

[1] Litt.: une certaine simplification.

cercle soit égale à l'aire d'un quadrilatère de côtés droits. Nous avons donc considéré cette notion avec une extrême attention, jusqu'à ce qu'il nous fût apparu par la démonstration qu'elle est possible et qu'il n'y a aucune ambiguïté quant à sa possibilité. Nous avons alors composé ce traité.

Nous disons que, si on mène dans un cercle l'un de ses diamètres, qu'on marque ensuite sur l'une de ses moitiés un point quelconque, que nous joignons ce point aux extrémités du diamètre par deux droites, et qu'enfin nous construisons / sur ces deux droites / deux demi-cercles, alors la somme des deux lunules formées par la circonférence de ces deux demi-cercles avec la circonférence du premier cercle est égale / au triangle formé dans le premier cercle. Nous avons montré cette notion dans notre livre *Sur les lunules* et nous en répétons la démonstration en ce lieu.

Soit un cercle sur lequel il y a A, B et C, et soit D son centre. Faisons passer par le point D la droite ADC, AC sera donc le diamètre du cercle. Marquons un point B sur la circonférence du cercle,/ joignons les deux droites AB et BC et construisons sur les deux droites AB et BC deux demi-cercles qui sont AEB et BGC.

Je dis que la somme des deux lunules AEBHA *et* BGCIB *est égale / au triangle* ABC.

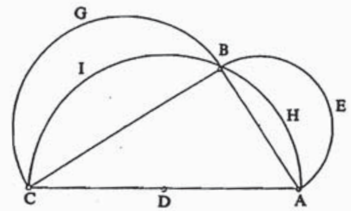


Fig. 2.1

Démonstration: Le rapport de deux cercles quelconques l'un à l'autre est égal au rapport du carré du diamètre de l'un au carré du diamètre de l'autre, comme il a été montré dans la proposition 2 du livre douze des *Éléments*. Le rapport du cercle *BGC* au cercle *BEA* est donc égal au rapport du carré de *CB* au carré de *BA*. Par composition, le rapport de la somme[2] des carrés de *CB* et de *AB* au carré de *AB* est égal au rapport de la somme des cercles *BGC* et *BEA* au cercle *BEA*. Mais la somme des carrés de *CB* et de *AB* est égale au carré de *AC*, donc le rapport du carré / de *AC* au carré de *AB* est égal au rapport de la somme des cercles *BGC* et *BEA* au cercle *BEA*. Mais le rapport du carré de *AC* au carré de *AB* est égal au rapport du cercle *ABC* au cercle *BEA*. Le rapport / de la somme des cercles *BGC* et *BEA* au cercle *BEA* est donc égal au rapport du cercle *ABC* au cercle *BEA*. Le cercle *ABC* est donc égal à la somme des cercles *BGC* et *BEA*. Le demi-cercle *ABC* / est donc égal à la somme des demi-cercles *AEB* et *BGC*. Si nous enlevons les deux portions *AHB* et *BIC* qui sont communes au cercle *ABC* et à la somme des cercles *AEB* et *BGC*, il reste le triangle *ABC* égal à la somme des deux lunules *AEBHA* et *BGCIB*. Ce qu'il fallait démontrer.

Si les deux arcs *AHB* et *BIC* / sont égaux, alors les deux droites *AB* et *BC* sont égales, / les deux cercles *AEB* et *BGC* sont égaux, leurs moitiés sont égales et les deux lunules *AEBHA* et *BGCIB* sont égales. Joignons *BD*, les deux triangles *ABD* et *BDC* sont égaux. Mais / on a montré que la somme des deux lunules / est égale au triangle *ABC*; si donc les deux lunules sont égales et les deux triangles *ABD* et

[2] Nous ajoutons parfois «somme» pour les besoins de la traduction.

BCD sont égaux, chacune des lunules est donc égale / à chacun des triangles et la lunule *AEBHA* est égale / au triangle *ABD*.

Ceci étant démontré, reprenons le cercle, la lunule *AEBHA* et le triangle *ABD*, et partageons la droite *BA* en deux moitiés au point *K*, alors le point *K* sera le centre du cercle *AEB*. Joignons *DK* et prolongeons-la, qu'elle coupe les deux arcs *AHB* et / *AEB* aux points *H* et *E*, la droite *DKHE* sera alors un diamètre du cercle *ABC* / et un diamètre du cercle *AEB*, car elle passe par leurs centres. / Partageons la droite *EH* en deux moitiés au point *L*; faisons de *L* un centre et traçons avec la distance *LH* un cercle, soit le cercle *HMEN*, ce cercle sera donc tangent au cercle *ABC* de l'extérieur et tangent au cercle *AEB* de l'intérieur, car il rencontre chacun des deux cercles à l'extrémité d'un diamètre commun à ces deux cercles et au cercle qui leur est tangent. Le cercle *HMEN* est donc tout entier à l'intérieur de la lunule *AEBHA*, ce cercle est par conséquent lui-même une partie de cette lunule. Mais toute grandeur a un rapport à toute autre grandeur — dont elle est une partie — même si personne ne connaît ce rapport, ni ne peut parvenir à sa connaissance, car le rapport entre les grandeurs n'est pas en raison de la connaissance que les gens en ont, ni en raison de leur capacité à le déterminer et à le connaître, mais le rapport entre les grandeurs est une notion propre aux grandeurs qui sont d'un même genre. Si donc deux grandeurs sont de même genre, et si chacune d'elles est limitée, finie, fixe selon sa grandeur et ne changeant d'aucune manière — ni changement par augmentation, ni changement par diminution, ni changement de genre —, alors l'une a par rapport à l'autre un seul et même rapport fixe qui ne change pas,/ et qui ne modifie sa forme d'aucune manière.

Pour toute grandeur, sa partie est de son genre si cette partie est limitée, finie et ne change ni dans son genre, ni dans sa grandeur, ni dans sa figure,/ ni dans sa forme, et si la grandeur tout entière est également fixe selon son état et ne change ni dans son genre, ni dans sa grandeur, ni dans sa figure, ni dans sa forme. Si la grandeur et sa partie ont cette propriété, alors la grandeur tout entière a, à sa partie, un seul et même rapport fixe qui ne change pas et ne varie d'aucune manière.

Si / un cercle *ABC* est de grandeur connue, alors sa circonférence est connue, son diamètre est également connu et son centre / est connu, le diamètre *AC* est donc connu, / l'arc *AB* qui est le quart de sa circonférence est connu, la droite *AB* est connue, la droite *BD* est connue et le triangle *ABD* est connu; j'entends par «connu» ce que j'ai rappelé lors de la description du cercle *ABC*, qu'il est fixe selon son état et ne change pas, car / le connu chez les mathématiciens est ce qui // ne change pas. Et le demi-cercle *AEB* sera connu car la droite *AB* qui est son diamètre est connue, l'arc *AEB* est connu car il ne change pas, l'arc *AHB* est connu, donc la lunule *AEBHA* est connue, c'est-à-dire qu'elle est fixe selon la même propriété et qu'elle ne change ni dans son genre, ni dans sa grandeur, ni dans sa figure; par «son genre», je veux dire qu'elle est une surface plane. La droite *KE* qui est le demi-diamètre du cercle est connue, la droite *KH* est connue / car les deux points *K* et *H* sont connus, il reste la droite *EH* connue, c'est-à-dire qu'elle ne change ni dans sa grandeur,/ ni dans son genre, ni dans sa figure./ Mais la droite *EH* est le diamètre du cercle *HMEN*, donc le cercle *HMEN* est connu; ni

sa grandeur, ni sa figure, ni sa forme ne changent. Mais le cercle *HMEN* est une partie de la lunule *AEBHA*, or la lunule *AEBHA* et le cercle *HMEN*, tous deux, ne changent d'aucune manière et ils sont de même genre car l'un est une partie de l'autre, donc la lunule *AEBHA* a au cercle *HMEN* un rapport / fixe, selon la même propriété, qui ne change d'aucune manière. Mais tout rapport d'une grandeur quelconque à une de ses parties est le rapport de toute grandeur à sa partie analogue à cette partie, le rapport de la lunule *AEBHA* au cercle *HMEN* est donc égal au rapport de la droite *AD* à une de ses parties, que nous connaissions la grandeur de cette partie ou que nous ne connaissions pas la grandeur de cette partie, que nous ne puissions pas la déterminer et que nous ne parvenions pas à la trouver. Que cette partie soit *DU*, donc le rapport de *AD* à *DU* sera égal au rapport de la lunule *AEBHA* au cercle *HMEN*. Donc le rapport de *AD* à *DU* est un rapport fixe qui ne change jamais,/ car le rapport de la lunule au cercle / est un rapport fixe qui ne change pas. Si le rapport de *AD* à *DU* est un rapport fixe / qui ne change jamais, alors la droite *DU* / est une seule et même droite qui ne change pas, car la droite *AD* est une droite de grandeur connue dont la grandeur ne change pas. Joignons *BU* pour que *BUD* soit un triangle. Mais le rapport du triangle *ABD* au triangle *BDU* / est égal au rapport de la droite *AD* à la droite *DU*. Mais le rapport de *AD* à *DU* est égal au rapport de la lunule *AEBHA* au cercle *HMEN*, donc le rapport du triangle *ABD* au triangle *BDU* est égal au rapport de la lunule *AEBHA* au cercle *HMEN*. Si nous permutons,/ le rapport du triangle *ABD* à / la lunule *AEBHA* est égal au rapport du triangle *BDU* au cercle *HMEN*. Mais on a montré que la lunule *AEBHA* est égale au triangle *ABD*, donc le cercle *HMEN* est égal au triangle *BDU*. Mais tout triangle est égal à un carré, ceci a été montré à la fin du deuxième livre des *Éléments* d'Euclide.

Construisons un carré égal au triangle BDU, soit le carré $SQPO$. Le cercle $HMEN$ sera égal au carré / $SQPO$. Mais le rapport du diamètre AC au diamètre EH est un rapport connu , car chacun de ces deux diamètres est de grandeur connue; que le rapport de AC à EH soit égal au rapport de XQ à QP, donc le rapport du carré de AC au carré de HE est égal au rapport du carré de XQ au carré de QP. Construisons sur la droite XQ un carré, soit le carré XT, le rapport du carré de AC au carré de EH est égal au rapport du carré XT au carré QO. Mais le rapport du carré de AC au carré de HE est le rapport du cercle ABC au cercle $HMEN$, donc le rapport du carré XT au carré QO est égal au rapport du / cercle / ABC au cercle $HMEN$. Mais le carré QO est égal au cercle $HMEN$, donc le carré XT est égal au cercle ABC.

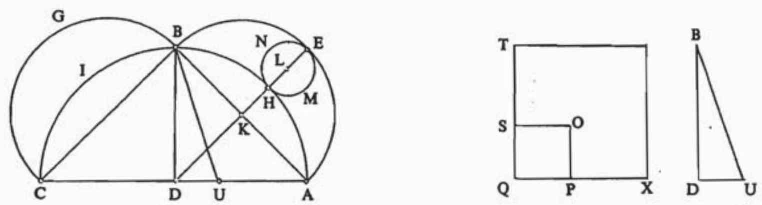


Fig. 2.2

Par cette démonstration, on a montré que tout cercle / est égal à un quadrilatère de côtés droits.

Mais comment trouver ce carré? Nous lui consacrerons un traité indépendant, car notre but dans ce traité est de montrer seulement que cette notion est possible, / pour montrer que l'opinion de celui qui a cru qu'un cercle ne peut pas être égal à un quadrilatère de côtés droits, est fausse. Par les preuves que nous avons

présentées dans ce traité, il a été montré que tout cercle est égal à un quadrilatère de côtés droits. Il a donc été montré à partir de cela que la croyance de ce groupe est fausse / et qu'il est vrai que tout cercle est égal à un quadrilatère de côtés droits. Les vérités des notions intelligibles n'ont pas besoin d'être trouvées et déterminées en acte par l'homme, mais si la démonstration établit la possibilité de la notion, alors cette notion devient vraie, que l'homme la détermine / en acte ou ne la détermine pas. Ce que nous avons mentionné pour identifier cette notion est suffisant, c'est le but que nous avons cherché dans ce traité.

Le traité *Sur la quadrature du cercle* est achevé.

[...]

Objection

Si la notion mentionnée [...] dans ce traité avait été prouvée à partir de sa démonstration, alors on aurait pu le montrer par cette voie d'une manière beaucoup plus facile que celle qu'il a exposée: en effet, si nous traçons dans un cercle quelconque un carré, alors ce carré est une partie de ce cercle et la partie a au tout un certain rapport, d'après ce qu'il a exposé, même si on ne connaît pas ce rapport. Que ce rapport soit égal au rapport de ce carré à un autre carré, donc le rapport du carré construit dans le cercle au cercle et son rapport à un autre carré est le même, donc le cercle serait égal au dernier carré.

Cependant, je vois qu'il n'a rien fait dans ce traité car ce que l'on recherche c'est construire un carré égal au cercle. Que ceci soit possible ou non dans la connaissance divine n'est d'aucun profit pour ce que l'on recherche. Que ceci soit possible sans que nous ayons la capacité <de le construire>, alors il n'a rien ajouté à ce que croyaient les anciens, car en fait leur affirmation est que jusqu'à maintenant, ceci n'a pas été trouvé par la démonstration.

Al - Tusi

[...]

Chapitre

De la démonstration de ce qui est requis
selon une manière qui m'a paru <bonne>

Quant à la méthode qui m'est apparue après avoir lu ce qu'avaient dit ces <hommes> honorables, c'est la suivante <dans laquelle la théorie est exposée> en sept propositions[246]. Deux d'entre elles coïncident avec deux des propositions d'al-Ḫayyām : ce sont la deuxième et la quatrième de ces propositions, qui sont identiques à sa première et à sa quatrième proposition.

On <suppose> admis par celui qui examinera ces propositions le début du *Livre des Éléments* jusqu'à la proposition 28 du Livre I, à l'exception du postulat qui fait l'objet du doute.

Proposition 1

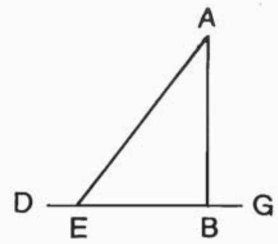
La plus courte des droites menées d'un point quelconque à une droite sur laquelle il ne se trouve pas et qui n'est pas limitée à ses extrémités — c'est ce qu'on appelle la distance du point à la droite — est la perpendiculaire abaissée de ce point à cette droite.

Soit, par exemple, la perpendiculaire AB abaissée du point A à la droite GD.

Je dis que c'est la droite la plus courte qu'on puisse mener de ce point à cette droite.

La preuve de cela :

245. Litt. : les paroles.
246. Litt. : où la méthode s'est ordonnée en sept propositions.



Menons de ce point à cette droite une droite AE. Le triangle ABE est alors formé, dont l'angle B est droit. L'angle E est alors plus petit qu'un angle droit, car la <somme> de deux angles quelconques d'un triangle est plus petite que deux droits, comme il a été démontré dans la proposition 17. Par suite, AB, qui est la corde du plus petit angle E est plus courte que AE, qui est la corde du plus grand angle B, ainsi que cela a été démontré dans la proposition 18.

Il en va de même de toute droite qu'on suppose menée du point A à la droite GD.

Par suite, <la droite> AB est la plus courte des droites menées du point A à la droite AG et c'est ce que l'on appelle la distance de ce point à cette droite, selon la terminologie adoptée par les gens de métier et selon ce qu'a déclaré l'auteur des *Éléments* au début du Livre III.

Et c'est ce que nous voulions montrer.

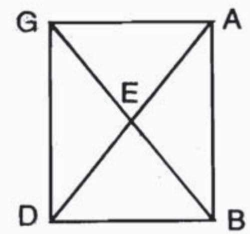
Proposition 2

Si on élève deux perpendiculaires à une ligne droite et qu'on joigne leurs extrémités par une autre droite, celle-ci formera avec elles deux angles égaux.

<Soient>, par exemple, les deux perpendiculaires égales AB et GD, élevées sur la droite BD et par les extrémités desquelles passe la droite AG, formant les angles BAG et DGA.

Je dis que ces deux angles sont égaux.

La preuve de cela :



Menons les droites AD et GB, qui se coupent au point E. Les deux côtés AB, BD du triangle ABD sont alors égaux aux deux côtés GD et DB du triangle GDB. Et les angles ABD et GDB sont égaux parce que ce sont deux angles droits. Les deux bases AD et GB sont donc égales ainsi que les angles BAD, DGB et ADB, GBD comme il a été démontré dans la proposition 4 <des *Éléments*>.

Par suite, les segments[247] BE et DE sont égaux ainsi qu'il a été démontré dans la proposition 6 <des *Éléments*>. Les <segments> AE et GE, <parties> restantes des <bases> égales AD et GB sont aussi égaux. Les angles EAG et EGA sont alors égaux ainsi qu'il a été

247. *sāq* : litt. : tige d'une plante, partie de la jambe comprise entre le genou et la cheville. Nous pensons qu'aṭ-Ṭūsī a sciemment utilisé ce mot ici pour bien indiquer qu'il s'agit d'une *partie* des droites AD et BG comme la phrase suivante l'indique clairement. C'est la raison pour laquelle nous ne pensons pas trahir sa pensée en traduisant par «segments» car c'est bien de cela qu'il s'agit ici.

démontré dans la proposition 5 des <*Éléments*>. Mais <nous avons montré> que les angles BAD et DGB étaient égaux. Tout l'angle BAG est donc égal à tout l'angle DGA.

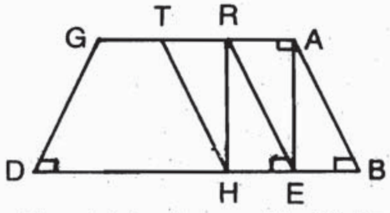
Et c'est ce que nous voulions montrer.

Et l'on voit, d'après la proposition 28 <des *Éléments*>, que ces deux perpendiculaires sont parallèles.

Proposition 3

Si l'on élève sur une ligne droite deux perpendiculaires égales et que par leurs extrémités passe une autre droite, celle-ci formera avec elles deux angles droits.

Soient, par exemple, les perpendiculaires égales AB, GD élevées sur la droite BD et soit AG la droite qui passe par leurs extrémités.



Je dis que les angles égaux BAG et DGA sont droits.

La preuve de cela :

En effet, s'ils ne sont pas droits, ils sont tous les deux obtus ou tous les deux aigus.

Supposons-les d'abord obtus.

Menons dans la première figure, du point A à la droite AG, la perpendiculaire AE, comme cela a été montré dans la proposition 11 <des *Éléments*>. Elle tombera nécessairement entre les droites AB et GD. L'angle AED, extérieur au triangle rectangle ABE, sera plus grand que l'angle droit intérieur <B>, ainsi qu'il a été montré dans la proposition 16 <des *Éléments*>. Il sera donc obtus lui aussi.

Menons ensuite du point E, la perpendiculaire ER à la droite BD ; elle tombera entre les droites AE et GD. L'angle ERG, extérieur au triangle EAR, sera plus grand que l'angle droit intérieur A. Il sera donc obtus lui aussi.

Menons ensuite du point R la perpendiculaire RH à la droite AG de nouveau.

Menons, dans cet ordre, autant de perpendiculaires que nous voulons, car elles ne s'arrêtent pas à une limite.

Les perpendiculaires à la droite BD, issues des points situés sur la droite AG — ce sont les perpendiculaires AB, RE, TH — sont alors, successivement, de plus en plus longues, la plus courte d'entre elles étant la perpendiculaire AB, car elle sous-tend l'angle aigu AEB du triangle ABE. Elle est donc plus courte que AE, qui sous-tend l'angle droit ABE, ainsi que cela a été démontré dans la proposition 19 <des *Éléments*>. <Or>, AE, qui sous-tend l'angle aigu ARE dans le triangle AER est plus courte que RE, qui sous-tend l'angle droit EAR. Par suite, <la perpendiculaire> AB est plus courte que <la perpendiculaire> RE. On montre de même que RE est aussi plus courte que TH et TH <plus courte> que celle qui la suit, et ainsi de suite.

On voit par là que les perpendiculaires qui sont proches de AB sont plus

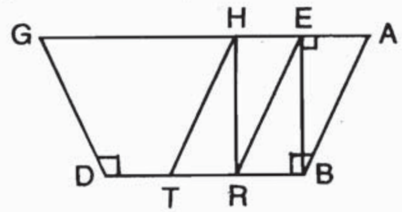
courtes que celles qui en sont éloignées. Par suite, les distances des points de AG dont sont issues les perpendiculaires à la droite BD ont, dans l'ordre, des longueurs qui vont en croissant du côté de G.

<La droite> AG s'écarte donc de BD du côté de G et s'en rapproche du côté de A.

Mais l'angle DGA est obtus par hypothèse et égal à l'angle BAG en vertu de la proposition précédente. On peut donc montrer aussi, en procédant de cette manière[248], que la droite GA s'écarte de la droite DB du côté de A et qu'elle s'en rapproche du côté de G. Or c'était l'inverse. C'est là une contradiction.

Les angles BAG et DGA ne sont donc pas obtus.

Supposons-les à présents aigus.



Menons successivement les perpendiculaires de la manière que nous avons dite, ainsi qu'on le voit sur la deuxième figure, en commençant toutefois par la perpendiculaire abaissée de B sur AG, comme cela a été montré dans la proposition 12 <des *Éléments*>. Elle tombera entre les droites AB et GD si l'angle A est aigu et elle ne peut tomber à l'extérieur <de ces droites>, car alors un angle droit et un angle obtus seraient assemblés dans un triangle.

Nous procédons ensuite comme plus haut et nous montrons que la droite AG se rapproche de BD du côté de G et s'en écarte du côté de A.

Nous montrons ensuite, en reprenant le même procédé[249] à partir de G, que AG se rapproche de <BD> du côté où il s'en écartait et s'en écarte du côté où il s'en rapprochait. C'est une contradiction.

Les angles BAG et DGA ne sont donc ni obtus, ni aigus ; ils sont donc droits.

C'est ce que nous voulions montrer.

Proposition 4

Les côtés opposés d'une surface quadrilatère rectangle sont égaux.

Soit, par exemple, la surface rectangle ABGD.

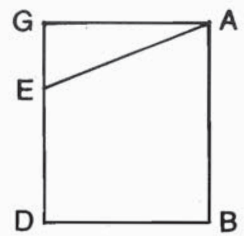
Je dis que les deux côtés AB, GD sont égaux. Il en est de même des deux côtés AG, BD.

248. *bi-hāḏa l-tadbīr* ; litt. : à l'aide de cet arrangement, cette construction. Mais il faudra commencer cette fois-ci à partir du sommet G, comme aṭ-Ṭūsī l'indiquera clairement dans la deuxième hypothèse, celle où les angles BAG et DGA sont aigus.

249. Litt. : le travail.

La preuve de cela :

Si AB n'est pas égal à GD, alors <supposons> que GD soit le plus long des deux.



Prenons sur DG <une droite> DE égale à[250] BA, comme il a été montré dans la proposition 3 <des *Éléments*> et menons AE.

La droite AE passe alors par les extrémités des deux perpendiculaires égales AB et ED, issues des extrémités de la droite BD. Les angles BAE et DEA sont donc droits. Mais l'angle BAG était droit. Les angles BAE et BAG, le plus grand et le plus petit, seraient alors égaux. C'est une contradiction.

De même, l'angle AED, extérieur au triangle AEG et l'angle AGE, qui lui est intérieur, seraient égaux. Cela est également une contradiction comme il a été montré dans la proposition 16 <des *Éléments*>.

Le côté AB est donc égal au côté GD.

On montre de même que le côté AG est égal au côté BD.

Et c'est ce que nous voulions montrer.

Proposition 5

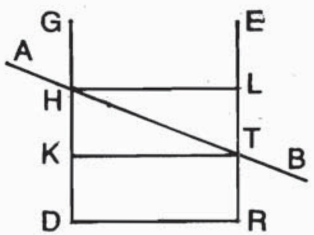
Si une droite coupe, d'une manière quelconque, deux perpendiculaires élevées sur une droite, elle rend égaux les angles alternes, l'angle externe devient égal à l'angle interne qui lui est opposé[251] et les deux angles internes situés du même côté deviennent égaux à deux droits.

Soit, par exemple, la droite AB qui coupe, d'une manière quelconque, les perpendiculaires GD et ER, élevées sur DR, en deux points H et T.

Je dis que les angles alternes DHT et ETH sont égaux. Il en est de même des angles AHG et ATE, l'externe et l'interne[252].

Et <je dis> que les angles GHT et ETH, qui sont du côté de G, E, sont égaux à deux angles droits.

La preuve de cela :



Si la droite TR est égale à la droite HD, tous les angles situés autour des points H et T sont droits ; les angles indiqués <dans l'énoncé> sont alors égaux et la conclusion est vérifiée.

Et si elle ne lui est pas égale, supposons que HD soit la plus grande des deux et prenons sur <cette droite> une <droite> DK égale à TR, comme il a été montré dans la proposition 3 <des *Éléments*>. Joignons K, T. Les angles DKT et RTK

250. Litt. : autant que la grandeur de ...
251. Voir note 21.
252. Dans le texte : l'interne et l'externe.

sont droits comme on l'a montré dans la troisième de ces propositions. Prenons sur ET une <droite> TL égale à HK et joignons H, L. Les angles KHL et TLH sont également droits et les deux côtés HK et KT, qui entourent l'angle droit HKT, sont égaux aux côtés TL et LH, qui entourent l'angle droit TLH.

Les angles KHT et HTL sont égaux, ainsi qu'on l'a montré dans la proposition 4 et ce sont les <angles> alternes.

De même, l'angle AHG est égal à l'angle KHT, je veux dire son opposé, comme il a été démontré dans la proposition 15 <des *Éléments*> et l'angle KHT est égal à l'angle ATE.

L'angle AHG est donc égal à l'angle ATE, et ce sont les <angles> interne et externe.

De même, les deux angles AHG, GHT, pris ensemble[253], sont égaux à deux angles droits en vertu de la proposition 13 <des *Éléments*>. <Or>, l'angle AHG est égal à l'angle ATE.

Par suite, les deux angles internes GHT et ATE, qui sont d'un même côté <de la droite AB>, sont, pris ensemble, égaux à deux droits.

Et c'est ce que nous voulions montrer.

On voit ainsi que toute droite qui coupe ces deux perpendiculaires en étant perpendiculaire à une d'elles est également perpendiculaire à l'autre.

Proposition 6

Si deux lignes droites non limitées à leurs extrémités se coupent selon des angles non droits et si on élève une perpendiculaire sur l'une d'elles, alors cette perpendiculaire, si on la prolonge, coupera l'autre droite sur l'un de ses côtés, <à savoir> du côté de l'angle aigu compris entre cette perpendiculaire et la droite coupée par cette perpendiculaire.

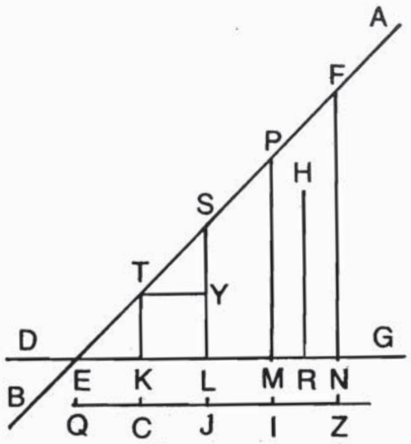
Soit, par exemple, les droites AB et GD qui se coupent au point E <selon> des angles non droits. Et <soit> HR la perpendiculaire élevée sur la droite GD.

Je dis que si je prolonge <cette perpendiculaire>, elle coupera la droite AB sur l'un de ses côtés.

253. Au sens de : la somme *(mağmū')* des deux angles.

La preuve de cela :

Supposons que des deux angles inégaux AEG et GEB, qui, pris ensemble, sont égaux à deux angles droits en vertu de la proposition 13 <des *Éléments*>, l'angle AEG soit <l'angle> aigu.



Soit T un point quelconque sur la droite AE. Abaissons la perpendiculaire TK sur la droite GD comme cela a été montré dans la proposition 12 <des *Éléments*>.

Le point K se trouvera nécessairement soit entre E et R, soit sur le point R, soit au-delà de ce point du côté de G.

Si le point K se trouve entre E et R, donnons-nous[254] une droite égale à EK et soit QC cette droite. Prolongeons-la du côté de C. Prenons successivement sur cette droite des <droites> égales à QC, comme il a été montré dans la proposition 3 <des *Éléments*>, jusqu'à ce que l'ensemble des multiples de la droite QC dépasse la droite ER et soit QZ <la droite obtenue>.

Supposons que ces multiples soient les parties QC, CJ, JI, IZ, chacune d'elles étant égale à la droite EK.

Prenons ensuite sur AE des droites successives égales à la droite TE[255], en nombre égal au nombre de ces parties ; ce sont : ET, TS, SP, PF. Abaissons ensuite des points S, P, F les perpendiculaires SL, PM, FN à GD, comme il a été montré dans la proposition 12 <des *Éléments*>.

Abaissons du point T la perpendiculaire TY sur la droite SL. Dans les triangles ETK, TYS, les angles ETK, ESY, l'interne et l'externe, sont égaux en vertu de la proposition précédente, les deux perpendiculaires TK, SL élevées sur la droite LK, étant coupées par SE. <De plus>, les angles EKT, TYS sont droits et les côtés ET et TS sont égaux comme il a été montré dans la proposition 26 <des *Éléments*> et le côté YT est égal au côté EK.

Mais le quadrilatère YTLK est rectangle car les angles L, K, Y sont droits par hypothèse et l'angle T est également droit comme il a été montré dans la proposition précédente. Les côtés opposés YT, LK sont donc égaux comme il a été montré dans la quatrième de ces propositions.

Les droites EK, KL sont donc égales.

On montre de même que les droites LM, MN sont égales elles aussi et que toutes les droites EK, KL, LM, MN sont égales. Par suite, toutes ces droites — je veux dire la droite EN — sont égales à toutes les parties QC, CJ, JI, IZ — je veux dire la droite QZ — car leur nombre est égal au nombre de ces parties et chacune d'elles est égale à la droite EK.

254. Litt. : supposons.
255. Litt. : autant que la quantité de TE.

Mais la droite QZ est plus longue que la droite ER ; donc <la droite> EN est également plus longue que ER. Le point N se trouve donc nécessairement à l'extérieur de <l'intervalle compris> entre E et R, du côté de G, et la perpendiculaire HR se trouve donc à l'intérieur du triangle FNE.

Donc, si nous prolongeons la perpendiculaire RH, qui est parallèle à la perpendiculaire FN, jusqu'à ce qu'elle sorte du triangle FNE, elle coupera nécessairement le côté AB.

Mais si le point K coïncide avec le point R et que les deux perpendiculaires <TK et HR> coïncident, ou <si le point K> se trouve en dehors de <l'intervalle> compris entre E et R, du côté de G, et que la perpendiculaire HR soit à l'intérieur du triangle TKE, alors la conclusion est plus évidente.

C'est ce que nous voulions montrer.

On voit ainsi que la rencontre <de la perpendiculaire et de l'oblique> a lieu du côté de l'angle aigu — je veux dire l'angle AER.

Quant à la proposition utilisée dans ce théorème et selon laquelle il est possible de trouver des multiples de la plus courte de deux droites limitées à leurs deux extrémités et <tels> qu'ils dépassent la plus longue, c'est celle dont nous avons traité et dont nous avons dit qu'elle était évidente par elle-même. L'auteur des *Éléments* l'a utilisée dans la première proposition du Livre X, d'une manière telle qu'elle puisse s'appliquer à toutes les espèces de grandeurs, sans en faire l'objet d'un postulat en <aucun> endroit de son ouvrage.

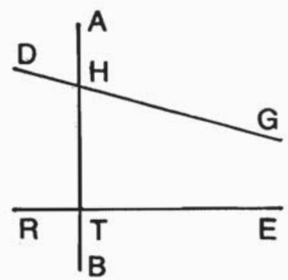
Proposition 7

comportant la démonstration du postulat

Si une ligne droite coupe deux lignes droites en rendant les deux angles intérieurs situés d'un même côté plus petits que deux droits, alors les deux droites, lorsqu'on les prolonge de ce côté, se rencontrent.

Soit, par exemple, la droite AB qui coupe les deux droites GD et ER, formant <avec celles-ci> les angles GHT et ETH, qui sont plus petits que deux droits.

Je dis que si on prolonge les droites GD et ER du côté de G, E, elles se rencontreront.

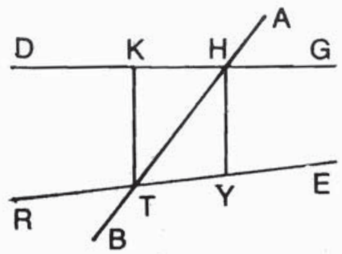


La preuve de cela :

Si l'un des deux angles GHT, ETH est droit, l'autre est nécessairement aigu et dans ce cas, l'une des deux droites, GD, ER, coupera la droite AB selon des angles non droits et l'autre lui sera perpendiculaire.

Si donc on les prolonge elles se rencontreront du côté de l'angle aigu, ainsi que nous l'avons montré dans la proposition précédente.

Et si l'un des deux angles, GHT par exemple, est obtus, menons du point H la perpendiculaire HY à la droite GD, comme il a été montré dans la proposition 11 <des *Éléments*> et du point T la perpendiculaire TK, également à GD, comme il a été montré dans la proposition 12 <des *Éléments*>.



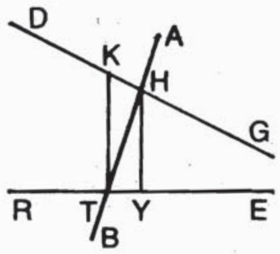
Nous disons ensuite que puisque les angles GHT et ETH, pris ensemble, sont plus petits que deux droits, et que l'angle GHY est droit, la somme des angles YHT et HTY est plus petite qu'un droit. Mais les angles alternes YHT et HTK formés par la rencontre de la droite AT avec les perpendiculaires YH et TK sont égaux, ainsi qu'il a été montré dans la cinquième de ces propositions.

Par suite, tout l'angle KTY est plus petit qu'un droit ; il est donc aigu.

Les droites KT et ET se rencontrent donc selon des angles qui ne sont pas droits et la droite GK est perpendiculaire à l'une d'elles, je veux dire à KT.

Par suite, les droites GK et ET se rencontreront si on les prolonge du côté de G, E, ainsi qu'il a été montré dans la proposition précédente.

Et si l'un des deux angles GHT, ETH n'est ni droit ni obtus, mais que chacun des deux est aigu, nous menons du point T la perpendiculaire TK à la droite ER, comme il a été montré dans la proposition 11 <des *Éléments*>, et du point H la perpendiculaire HY à ER également, comme il a été montré dans la proposition 12 <des *Éléments*>.



L'angle ETK est alors droit et les angles alternes KTH, THY, formés par la rencontre de AB avec les perpendiculaires HY, KT, sont égaux ainsi qu'il a été montré dans la cinquième de ces propositions. Si donc nous soustrayons les angles ETH, THY, qui, pris ensemble, sont égaux à un droit, des angles ETH, GHT, qui, pris ensemble, sont, par hypothèse, plus petits que deux droits, il reste l'angle YHG, qui sera alors plus petit qu'un droit ; il est donc aigu.

Les droites YH et GH se coupent donc selon des angles non droits et EY est perpendiculaire à l'une d'elles, je veux dire à HY.

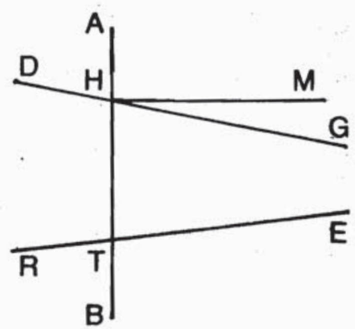
GD et ER se rencontreront donc si on les prolonge du côté de G, E, ainsi qu'il a été montré dans la proposition précédente[256].

C'est ce que nous voulions montrer.

[...]

256. Dans la *Rédaction des* Éléments de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī (Ms. Munich, Fonds arabe, nº 288), l'auteur donne une seconde démonstration de ce troisième cas, celui où les deux angles intérieurs sont plus petits que deux droits.

Sa démonstration consiste à mener du point H la perpendiculaire HM à AB. L'angle HTE étant aigu, la perpendiculaire HM coupe la droite RE, du côté de G, E, en vertu de la proposition 6. La droite GD, qui coupe la droite AB selon un angle plus petit qu'un droit — l'angle BHG — coupera donc nécessairement la droite RE.



Bombelli

[LIVRE] PREMIER. // p. 169 //

J'ai trouvé une autre sorte de *R.c.* liées , très différente des autres, qui apparaît au Chapitre du Cube égal à des [Q]uantités [inconnues] et à un nombre quand le cube du tiers [du nombre] des quantités [inconnues] est plus grand que le carré de la moitié du nombre comme cela sera démontré dans ce Chapitre ; laquelle sorte de R.q. a dans son Algorithme des opérations différentes des autres et a un nom différent ; parce que, lorsque le cube du tiers [du nombre] des quantités est plus grand que le carré de la moitié du nombre, [la racine carrée de] leur différence ne peut être appelée ni plus ni moins, c'est pourquoi je l'appellerai plus de moins quand il faudra l'ajouter, et quand il faudra le soustraire je l'appellerai moins de moins , et cette opération est, absolument nécessaire, plus encore que l'autre racine R.c. L. , pour la réponse aux Chapitres des puissances de puissances , accompagnées de [C]ubes, ou de [Q]uantités, ou de tous les deux ensemble, pour lesquelles les cas d'égalisation où apparaît cette sorte de R. sont beaucoup plus nombreux que ceux où apparaît l'autre ; ce qui paraîtra à beaucoup plutôt sophistique que réel, et telle est

l'opinion que moi aussi j'ai maintenu, jusqu'à ce que j'en ai trouvé la démonstration par les lignes (comme cela sera démontré par des surfaces planes dans le dit Chapitre) et d'abord je traiterai de la Multiplication, en proposant la règle du plus et du moins.

Plus par plus de moins, [cela] fait plus de moins.
Moins par plus de moins, [cela] fait moins de moins.
Plus par moins de moins, [cela] fait moins de moins.
Moins par moins de moins, [cela] fait plus de moins.
Plus de moins par plus de moins, [cela] fait moins.
Plus de moins par moins de moins, [cela] fait plus.
Moins de moins par plus de moins, [cela] fait plus.
Moins de moins par moins de moins, [cela] fait moins.

[...]

// p. 290 // LIVRE [SECOND.]

Chapitre du Cube égal à des Quantités et un nombre.

Voulant égaler le Cube à des Quantités et un nombre, on prend le tiers [du nombre] des Quantités et on l'élève au cube, et l'on retranche le produit [de ce calcul] du carré de la moitié du nombre ; et de ce qui reste, si on en prend la racine carrée, [et qu'on l'ajoute et qu'on la retranche de la moitié du nombre][67], et si, de cette somme et de cette différence, on prend la racine cubique de chacune, alors ces deux racines [cubiques] ajoutées ensemble forment la valeur de la Quantité (comme l'on verra dans les exemples décrits ci-dessous).

Soit égalé 1 $\overset{3}{\cup}$ à 6 $\overset{1}{\cup}$ p. 40. On prend le tiers des Quantités, ce qui est 2, on l'élève au cube, ce qui fait 8, et on enlève le résultat du carré {❷}[68] de la moitié du nombre, qui vaut 400 : il reste 392, et l'on prend de ce reste la racine carrée, qui est R.q. 392 ; on l'ajoute à la moitié // p. 291 // du nombre, ce qui fera 20 p. R.q. 392 ; la R.c. de ce binôme, jointe à la R.c. de son résidu, *i. e.* à R.c. ⌊ 20 m. R.q. 392 ⌋, ces racines cubiques sont l'une 2 p. R.q. 2 et l'autre 2 m. R.q. 2, qui, ajoutées ensemble font 4, et la Quantité vaut 4 ; cette résolution provient de la démonstration, qui suit et dont est issue la demande inscrite ci dessous.

[Traduction symbolique, insérée dans le texte original au lieu marqué {❷} :]

1 $\overset{3}{\cup}$ égal à 6 $\overset{1}{\cup}$ p. 40.

2.	20.
2.	20.
4.	400.
2.	8.
8.	392.

R.q. 392.

20. p. R.q. 392. 20. m. R.q. 392.

R.c. ⌊ 20. p. R.q. 392. ⌋ p. R.c. ⌊ 20. m. R.q. 392. ⌋

Racines. 2. p. R.q. 2. 2. m. R.q. 2, qui

sommées ensemble font 4, qui est la valeur de la Quantité.

67 Le texte donne : "al quale si aggionge, e cava il mezzo del numero", qu'il faut entendre plutôt : "il quale si aggionge, e cava del mezzo del numero".

68 La démarche, rédigée sous une forme symbolique, est insérée dans le texte original en ce lieu marqué {❷}. Elle figure ici à la suite du paragraphe.

[...]

On peut encore, dans la résolution de ce Chapitre, procéder en cette manière. Soit égalé 1 $\overset{3}{\cup}$ à 15 $\overset{1}{\cup}$ p. 4 ; on prend le tiers [du nombre] des Quantités, qui est [égal à] 5 ; on l'élève au cube, ce qui fait 125 ; on ôte cela du carré de la moitié du nombre, qui est 4, et il reste m. 121 (en ce cas on parlera de "plus de moins") ; quand on prendra la R.q. de ce [nombre], cela donnera p. de m. 11, qui, jointe à la moitié du nombre, fait 2 p. de m. 11 ; une fois prise la racine cubique de cela et jointe à son résidu, on obtient 2 p. de m. 1 et 2 m. de m. 1, qui, jointes ensemble font 4, et 4 est la valeur de la Quantité. Et bien qu'à beaucoup cela paraîtra comme chose extravagante, et que cette opinion me soit aussi apparue, il y a déjà un certain temps, comme étant plutôt sophistique que véridique , il advint // p. 294 // {❶} néanmoins qu'à tant chercher, j'en ai trouvé la démonstration, laquelle sera relatée ci dessous ; ce que l'on peut encore montrer par les lignes, et qui peut servir dans les opérations sans aucune difficulté ; et en de nombreuses occasions, l'on trouve la valeur de la Quantité en nombres (comme on l'a trouvée dans cet exemple). Donc lecteur, à cela applique bien ton esprit ; même lorsqu'il se trouvera abusé.

[Traduction symbolique, insérée dans le texte original au lieu marqué {❶} :]

$$
\begin{array}{llll}
1.\ \overset{3}{\smile}\ \text{Égal à} & 15.\ \overset{1}{\smile} & \text{p.} & 4. \\
 & 5. & & 2. \\
 & 5. & & 2. \\
 & \overline{25.} & & \overline{4.} \\
 & 5. & & 125. \\
 & \overline{125.} & \text{R.q. p. de m. 121.} &
\end{array}
$$

Somme 2 p. R.q. p. de m. 121. Reste 2 m. R.q. p. de m. 121.
R.c. ⌊ 2. p. de m. 11. ⌋ R.c. ⌊ 2. m. de m. 11. [⌋]
Racine c. : 2. p. de m. 1. 2. m. de m. 1.
Additionnés, ils font 4. qui est la valeur de la Quantité.

[...]

Démonstration de ce dont est extraite la règle de résolution [de l'équation] du Cube égal à des Quantités et un nombre.

Soit le cube *abce*, égal au parallélépipède ACDE, lequel soit [égal à] 6 Quantités (et le côté AC soit égal au côté *ab* du cube, à savoir : l'un et l'autre soient [égaux à] 1 $\overset{1}{\smile}$), et [au][77] corps H, lequel soit 20 ; que l'on imagine une coupe par une surface parallèle [à une face] dans le cube *abce*, soit *fil*, et cela fait, l'on fait une autre coupe, *hpr*, en faisant [la ligne] *hc* égale à [la ligne] [*af*][78], et ensuite, l'on fait une autre coupe *mof*, en faisant [la ligne] *cm* égale à [la ligne] *ch*, et que toutes ces coupes fassent des angles droites avec les surfaces [du cube] ; et cela fait, on aura partagé le Cube *abce* en huit morceaux, parmi lesquels deux seront des cubes, à savoir *him* et *sq*[79], et les autres seront 6, qui, agencés ensemble, feront le parallélépipède LPR ; et parce que la démonstration est claire par elle-même, je ne m'efforcerai pas de faire connaître comment ils sont agencés ensemble ; [sauf à dire que] le côté IR est égal au côté *ab*, [la ligne] IN est égale à la [ligne] *bh*, et le même [côté][80] est égal à la [ligne] AC, et en présupposant que la surface AF[81] soit égale à la surface IPL, le parallélépipède IVQ sera égal au parallélépipède ADE ; il reste de nécessité que le[s] cube[s] [*sq*][82] et [*mh*][83], ou encore ϕ[84] e $\widehat{+}$ [85], (que j'ai représentés pour eux-mêmes bien qu'on puisse les voir), soient égaux [ensemble] au corps H, lequel est [égal à] 20 ; le côté du Cube *sq* est égal à la [ligne] IN et IN est la troisième partie de IP, et la superficie LP toute entière est [égale à] 6, // p. 296 // puisque le parallélépipède IVQ entier est [égal à] 6 Quantités ; IR est une Quantité, et la superficie LP étant [égale à] 6, la superficie LN sera [égale à] 2 ; la ligne IL sera égale au côté du Cube [*mh*][86]. Donc il faut trouver deux nombres qui, multipliés l'un par l'autre, fassent 2, et tels que leurs cubes, ajoutés ensemble, fassent 20. On pose que IL est [égale à] 1 $\overset{1}{\smile}$; IN sera [égale à] 2 divisés par 1 $\overset{1}{\smile}$, et la superficie LN sera [égale à] 2 (comme cela fut proposé).

77 Le texte donne : "nel", c'est-à-dire "dans", alors qu'il s'agit d'égaler le cube "au parallélépipède ACDE" et "au corps H", pour représenter l'équation $x^3 = 6x + 20$; compte tenu de l'absence de ponctuation et d'un signe de parenthèse, ce passage est obscur *a priori* ; on ne peut le comprendre qu'en fermant la parenthèse là où nous l'avons fait et en modifiant le texte original de la manière suivante : "& *al* corpo .H.".

78 Le texte donne : "b.f".

79 Le cube n'est ici désigné que par la diagonale de l'une de ses faces puisqu'aucun sommet de la face opposée n'est visible sur la figure en perspective cavalière et que les arêtes "cachées" le restent.

80 Le "même" côté est en fait ".a.b.", dont on a supposé qu'il était égal à ".A.C.".

81 Le texte donne : ".A.B.", or il s'agit de la surface du parallélogramme ".A.C.D.E.", telle que, égale à ".I.P.L." et multipliée par ".A.C.", égale à ".I.R.", on obtienne un volume égal à celui du parallélogramme ".I.V.Q.".

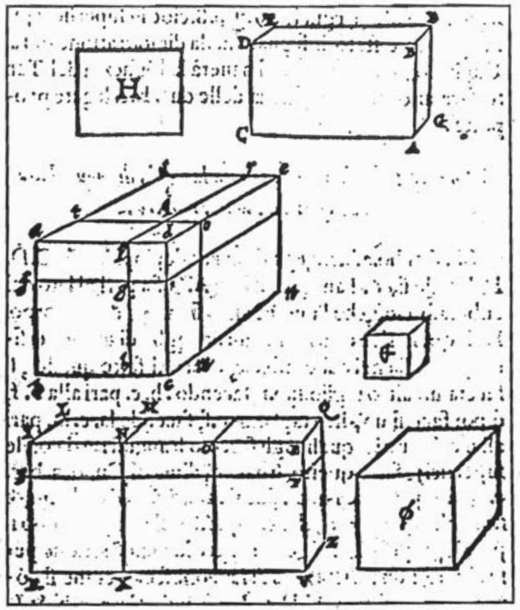
82 Il s'agit du cube élevé sur la base carrée de diagonale *sq*. Il n'est pas visible dans le cube *abe*.

83 Le texte donne : "m.i.h", alors qu'il s'agit du cube élevé sur le carré de diagonale *mh* ; ce cube est d'ailleurs visible, puisqu'il s'agit de *pio*.

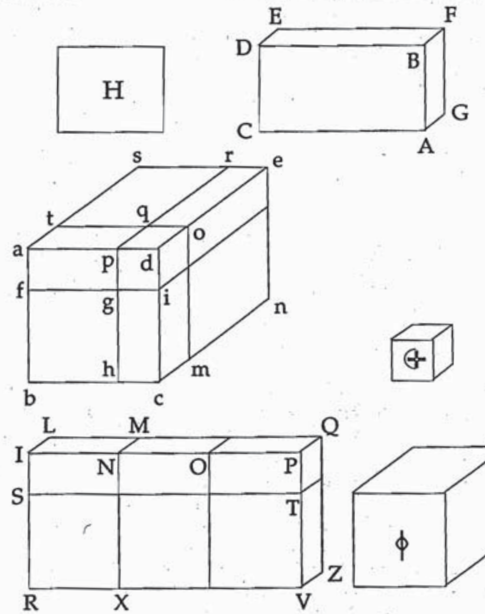
84 Le texte donne : "O" au lieu du symbole utilisé dans la figure.

85 Ce symbole, qui désigne un cube de côté ".i.d.", est un peu différent dans la figure, où il est d'ailleurs en position "couchée".

86 Le texte donne : "m.i.h" ; cf. la note ci-dessus.



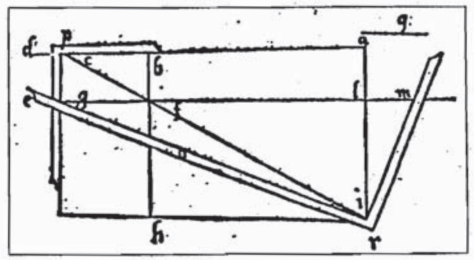
[Figure de la page 296.]



Le Cube [*mh*][87] sera [$1\overset{3}{\smile}$][88], et le Cube *sq* sera [égal à] 8 // p. 297 // divisés par [$1\overset{3}{\smile}$][89], et joints ensemble, ils font [1][90] $\overset{6}{\smile}$ p. 8 [le tout] divisé par [$1\overset{3}{\smile}$][91], et cela est égal au corps H, qui est [égal à] 20. On enlève le dénominateur, et on aura $1\overset{6}{\smile}$ plus 8 égaux à 20. $\overset{3}{\smile}$, qui, une fois résolue, la Quantité vaudra R.c. ⌊ 10 p. R.q. 92 ⌋, et cette quantité sera la [ligne] IL, et [pour] la [ligne] IN, qui a été posée [égale à] 2 divisés par $1\overset{1}{\smile}$, on divise 2 par R.c. ⌊ 10 p. R.q. 92 ⌋, il en advient toujours son résidu, à savoir R.c. ⌊ 10 m. R.q. 92 ⌋, et telle sera [la ligne] IN ; et du fait que [la ligne] IN est égale à la [ligne] *bh* et que [la ligne] IL est égale à la [ligne] *hc*, la [ligne] *bc* toute entière sera la valeur de la Quantité, c'est-à-dire [la valeur] du côté du cube *ace*, à savoir R.c. ⌊ 10 p. R.q. 92 ⌋ p. R.c. ⌊ 10 m. R.q. 92 ⌋ ; mais l'on doit avertir que, quand le corps H sera plus petit que la quatrième partie du cube *ace*, une telle résolution ne se pourra faire avec la coupe susdite ; par conséquent, comme il n'apparaît pas que cette résolution soit générale, j'ai poussé si loin l'investigation que j'ai trouvé une démonstration généralissime par les superficies planes ; cependant, puisqu'à chaque fois qu'interviennent les corps [solides], les lignes moyennes ne se peuvent trouver si ce n'est par voie d'instrument, il ne paraîtra alors étrange à personne si la démonstration présente la même difficulté, puisque, lorsqu'on ne l'avait pas, tout aussi vaine aura été l'invention de Platon et d'Architas de Tarente, comme de tant d'autres hommes de valeur, à vouloir doubler l'autel, ou encore un Cube (comme Barbaro en a amplement parlé dans le Commentaire à son [édition de] Vitruve[92]) ; donc, étant sous la protection de tant d'hommes de valeur, je ne me donnerai pas la peine de vouloir soutenir que cette démonstration ne peut se faire autrement qu'avec un instrument.

// p. 298 //

LIBRO [SECONDO.]

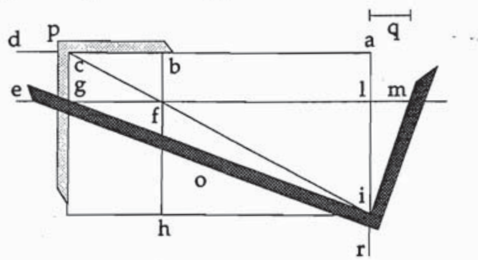


[Figure de la page 298.]

87 Le texte donne : "m.i.h" ; cf. la note ci-dessus.
88 Le texte donne : "1 cubo", mais il faut entendre "une Quantité au cube" puisque *gi* est égale à IL.
89 Le texte donne : "1 Cubo", mais il faut entendre "une Quantité au cube", car *sq* est égale à IN.
90 Le texte donne : "i".
91 Le texte donne : "un cubo", mais il faut entendre "une Quantité au cube", d'après ce qui précède.
92 Il s'agit de Daniele Barbaro (1513-1570), patriarche d'Aquilée, auteur de *La Pratica della Prospettiva...* (Venise, 1568), très inspirée de Piero della Francesca, d'Albrecht Dürer et de Federico Commandino. Il avait publié, en 1556, une traduction commentée du *De Architectura* de Vitruve.

Démonstration avec des surfaces planes
du [*Chapitre du*] *Cube égal à des Quantités et un nombre.*

Soit $1\,\overset{3}{\smile}$ égal à $6\,\overset{1}{\smile}$ p. 4, et soit *q* l'unité. On tire *me* et l'on fait [en sorte] que *ml* soit égale à la [ligne] *q*, donc qu'elle soit [égale à] 1, et *lf* [égale à] 6, soit le nombre des Quantités. Et sur ladite *lf*, on fait un parallélogramme [rectangle], qui soit [égal à] 4 en surface, c'est-à-dire autant que le nombre ; ce sera le parallélogramme [rectangle] *abf*. Ensuite, on prolonge la [ligne] *ab* jusqu'en *d* et [la ligne] *al* jusqu'en *r*. On prend alors deux équerres, dont l'une est posée par l'angle sur la ligne de *r* et dont l'un des bras touche l'extrémité *m*. On hausse ou on abaisse cette équerre jusqu'à ce que, une ligne étant tracée depuis l'angle de l'équerre et passant par l'extrémité *f*, vienne à rencontrer *bd* en un endroit tel que, mettant la seconde équerre avec son angle audit lieu de rencontre et un bras sur la [ligne] *da*, elle vienne à couper le bras de l'autre équerre sur la ligne *fe*. Ceci fait, je dis que la ligne allant du point *l* à l'angle de l'équerre est la valeur de la Quantité, et je le prouve de la manière suivante. Supposons d'abord que l'on ait élevé ou abaissé l'équerre en telle façon que, traçant de *i* la [ligne] *if* jusqu'en *c*, le bras de l'équerre *p* s'entrecoupe avec l'autre équerre en // p. 299 // *g* sur la ligne *ge*. Ceci étant fait, je dis que la ligne *li* est la valeur de la Quantité. En effet, la [ligne] *li* étant $1\,\overset{1}{\smile}$, et *ml* [égale à] 1, la [ligne] *lg* sera $1\,\overset{2}{\smile}$, parce que *ml* par [*lg*][93] vaut autant que *li* par elle-même (du fait que l'angle *i* est droit). Le parallélogramme [rectangle] *ilg* sera [$1\,\overset{3}{\smile}$][94], et le parallélogramme [rectangle] *ilf* sera $6\,\overset{1}{\smile}$ parce que *il* est $1\,\overset{1}{\smile}$ et *lf* [égal à] 6. Le parallélogramme [rectangle] *hfg* sera [égal à] 4, car il est égal au parallélogramme [rectangle] *alf* qui était [égal à] 4. Comme *ilg* est tout ensemble $6\,\overset{1}{\smile}$ et 4 et que, par l'autre raison, il est prouvé qu'il est $1\,\overset{3}{\smile}$, en conséquence, $1\,\overset{3}{\smile}$ sera égal à $6\,\overset{1}{\smile}$ p. 4, et la [ligne] *il* sera $1\,\overset{1}{\smile}$. Selon la résolution enseignée, la [ligne] *li* sera [égale à] R.q. 3 p. 1, la [ligne] *lg* sera [égale à] 4 p. R.q. 12, la [ligne] *fg* sera [égale à] R.q. 12 m. 2, le parallélogramme [rectangle] *ilg* sera [égal à] R.q. 108 p. 10, et le parallélogramme [rectangle] *ilf* sera R.q. 108 p. 6 puisque la ligne *il* est [égale à] R.q. 3 p. 1 et la [ligne] *lf* [égale à] 6. Le parallélogramme [rectangle] *hfg* est [égal à] 4 ; ce qui, joint ensemble à R.q. 108 p. 6, fait R.q. 108 p. 10, qui est égal au cube *ilg* (comme cela fut proposé).



93 Le texte donne : "l.m".
94 Le texte donne : "un cubo", mais il faut entendre "une Quantité au cube", d'après ce qui précède.

GIRARD

Quand les ② sont esgales à ① ⓪

Par exemple soit 5 ② esgale à 18 ① + 72.

la moitié du nombre des ① est	+ 9
son quarré	+ 81
auquel adjousté le produit de 5 fois + 72 qui est	+ 360
la somme	+ 441
sa √ est	+ 21
lequel adjousté, & osté du premier en l'ordre	30
viendra	— 12

Chacun desquels divisé par le 5 viendra 6 aussi — $\frac{12}{5}$ valeurs de 1 ①

Et ainsi faut-il faire des autres deux accidens de ceste premiere equation : Notez aussi, que la racine de 441 est + 21 aussi — 21 ; mais au lieu de ceste difficulté, là on fera une addition & soubstraction, ou se trouvent 30, ou — 12, autrement on n'eust eu besoin que d'adjouster.

Notez aussi qu'où les ⓪ sont moins, il y a plus de solutions par + qu'autrement, & ce en toutes les equations : Or les solutions par — ne se doivent obmettre.

Finalement quand quelques ② sont esgales à ① — ⓪, il se peut faire que l'equation seroit impossible, comme si 1 ② estoit esgale à 6 ① — 25, alors la valeur de 1 ① seroit inexpliquable, assavoir 3 + √ — 16 ou 3 — √ — 16, ce qui peut arriver seulement aux equations là où le ⓪ est —, & qui sont ambigues, c'est à dire qui reçoivent plus d'une solution par + : & ainsi s'entendra des autres equations.

Quant à l'ambiguité des equations, on choisit la solution la plus commode, si on ne les veut accepter toutes.

On doit aussi recercher toutes les solutions, pource qu'elles donnent plus d'intelligence de ce qu'on cerche, car par exemple, si 1 ② est esgale à 16 ① — 28, on en peut faire une question, disant : il y a deux nombres dont la somme est 16, & leur produit 28 : (la maniere & la raison que cest une telle question, se verra cy apres) ceux-là seront 2 & 14, & chacun est la valeur de 1 ①, & n'en y a pas d'avantage.

Quand 1 ③ est esgale à ① & ⓪

Icy se trouvent les autheurs fort empeschez, & pour dire la verité en chose fort difficile, & pour ne faire trop de discours entrons en la maniere ordinaire restituée.

Soit

Soit 1 ③ esgale à 6 ① + 40

le $\frac{1}{3}$ du 6 est 2	$\frac{1}{2}$ est 20
son cube 8	son □ est 400
	ostez 8
	392

sa √ est √ 392

lequel adjousté à 20 & soubstraict de 20, viendra $\begin{cases} 20 + \sqrt{392} \\ 20 — \sqrt{392} \end{cases}$

la racine cubicque de chacun est $\begin{cases} 2 + \sqrt{2} \\ 2 — \sqrt{2} \end{cases}$

la somme est 4 pour la valeur de 1 ①

Voila donc la valeur de 1 ① en perfection, or tout ainsi comme il y a des binomes comme les 4^e, 5^e & 6^e, desquels on ne peut extraire la racine quarrée qu'en posant devant la marque √ bino. comme il a esté dit cy dessus, aussi y a-il des binomes desquels on ne peut autrement extraire la racine cubicque qu'en apposant une marque & enseigne au devant, comme ∝ bino. sans qu'il y ait de l'imperfection en cela, non plus qu'à la racine de 5, donnant pour solution √ 5.

Or la racine cubicque d'un binome estant extraicte, comme nous en avons donné une reigle cy dessus, il s'ensuit de là, qu'on pourra tousjours resoudre ceste equation, horsmis là où on ne pourra oster le Cube du tiers du nombre des ①, du quarré de la moitié des ⓪, & quand cela arrivera, on fera comme s'ensuit.

Reigle pour resoudre l'equation de 1 ③ esgale à ① + ⓪ lors que le cube du tiers du nombre de ① est majeur au quarré de la moitié des ⓪ par l'aide des tables de Sinus.

Soit 1 ③ esgale à 13 ① + 12

Le tiers du nombre des ① est $4\frac{1}{3}$	la moitié du ⓪ est 6
sa √ est en disme 6 ⓪ 20816 ④	le raid 100000
leur produit est 9,0203 ④, diviseur	leur produit 600000, dividende

Or

Or ayant ainſi un dividende & diviſeur, on aura un quotient 66515

Sinus de		41 deg.	41′.	37″.
adjouſtez y par reigle		180		
	ſomme	221.	41.	37
	ſon tiers	73.	53.	52
	ſon ſinus	96078		
	ſon double	192156		
	multiplié par ☞	20816 (4)		
	viendra	400000		

lequel diviſé par le raid 100000
viendra 4 la valeur de 1 (1) principale

Car il y a encor deux valeurs qui ſont chacune faite par —; parquoy appliquant (1) à la valeur trouvée 4, & ledit 4 diviſant l'(0) donné 12: viendra 3, donnant le ſigne — à chacun, puis par reigle

1 (2) eſgale à — 4 (1) — 3

les valeurs feront — 1 & — 3

$$\text{Donc les 3 valeurs requiſes feront}\begin{cases}4\\ -3\\ -1\end{cases}$$

[...]

Fermat

Je veux par ma méthode *couper la ligne* AC (*fig.* 18) *donnée en telle sorte au point* B, *que le solide compris soubs le quarré*

Fig. 18.

de AB *et la ligne* BC *soit le plus grand* de tous les solides descrits de mesme sorte, en coupant AC en quelque autre point que ce soit .

Posons en notes que la ligne AC s'appelle B et la ligne AB inconnue A, BC sera $B - A$. Il faudra donc que le solide $Aq.$ in $B - Ac.$ satisface à la question.

Prenons derechef au lieu de A, $A + E$; le solide qui se fera du quarré de $A + E$ et de $B - A - E$ sera :

$$B \text{ in } Aq. + B \text{ in } Eq. + B \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis}$$
$$- Ac. - A \text{ in } Eq. \text{ ter} - Aq. \text{ in } E \text{ ter} - Ec.$$

Je le compare avec le premier solide

$$Aq. \text{ in } B - Ac.,$$

comme s'ils estoient esgaux, bien qu'en effect ils ne le soient pas, et i'ay appellé en mon escrit latin cette sorte de comparaison *adæqualitatem* comme Diophante l'appelle, car le mot grec παρισότης dont il se sert, peut estre ainsy traduit . Cela fait de ces deux solides, j'en oste ce qu'ils ont de commun, qui est

$$B \text{ in } Aq. - Ac.;$$

après quoy il ne reste rien plus d'un costé; et de l'autre il reste

$$B \text{ in } Eq. + B \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis} - A \text{ in } Eq. \text{ ter} - Aq. \text{ in } E \text{ ter} - Ec.$$

Il faut donc comparer les homogènes qui sont marquéz du signe + avec ceux qui sont marquéz du signe —, et faire derechef comparaison *adæqualitatem* entre

$$B \text{ in } Eq. + B \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis} \quad \text{d'un costé,}$$

et

$$A \text{ in } Eq. \text{ ter} + Aq. \text{ in } E \text{ ter} + Ec. \quad \text{de l'autre.}$$

Diuisons le tout par E; la comparaison *adæqualitatem* sera entre

$$B \text{ in } E + B \text{ in } A \text{ bis} \quad \text{et} \quad A \text{ in } E \text{ ter} + Aq. \text{ ter} + Eq.$$

Cette diuision estant faite, si tous les homogènes sont diuisibles par E, il faudra derechef faire la diuision par E, iusques à ce qu'il se treuve quelqu'un des homogènes qui ne puisse pas estre diuisé par E, c'est-à-dire, à parler comme Viète , *quod non adficiatur ab E*. Mais parce qu'en nostre exemple nous treuvons que la diuision ne se peut pas plus refaire, il en faut demeurer là.

Cela fait, i'efface de tous les deux costéz tous les homogènes *quæ adficiuntur ab E*; reste

$$\text{d'un costé} \quad B \text{ in } A \text{ bis}, \quad \text{et de l'autre} \quad Aq. \text{ ter},$$

entre lesquels il ne faut plus faire, comme auparavant, des comparaisons feintes et *adæquales*, mais une vraye équation. Diuisons le tout par A, donc

$$B \text{ bis} \quad \text{sera égal à} \quad A \text{ ter}$$

et

$$B \text{ sera à } A \quad \text{comme} \quad 3 \text{ à } 2.$$

Reuenons à nostre question et diuisons AC au point B en sorte que

$$\text{AC soit à AB} \quad \text{comme} \quad 3 \text{ à } 2,$$

ie dis que le solide du quarré AB en BC sera le plus grand de tous ceux qui peuvent semblablement estre descris sur la ligne AC en quelque autre section que ce soit.

R. DESCARTES

LA GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

Des problesmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles & des lignes droites.

Tous les Problesmes de Geometrie se peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'est besoin par aprés que de connoistre la longeur de quelques lignes droites, pour les construire.

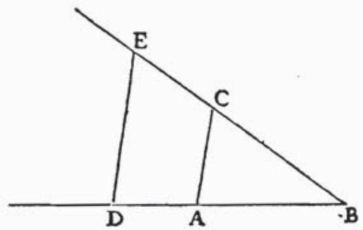
Commēt le calcul d'Arithmetique se rapporte aux operations de Geometrie.

Et comme toute l'Arithmetique n'est composée, que de quatre ou cinq operations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Diuision, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne espece de Diuision : Ainsi n'a-t'on autre chose a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a estre connuës, que leur en adiouster d'autres, ou en oster, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement estre prise a discretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatriesme, qui soit à l'vne de ces deux, comme l'autre est a l'vnité, ce qui est le mesme que la Multiplication; oubien en trouuer vne quatriesme, qui soit a l'vne de ces deux, comme l'vnité

 est

est a l'autre, ce qui est le mesme que la Diuision; ou enfin trouuer vne, ou deux, ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'vnité, & quelque autre ligne; ce qui est le mesme que tirer la racine quarrée, ou cubique, &c. Et ie ne craindray pas d'introduire ces termes d'Arithmetique en la Geometrie, affin de me rendre plus intelligibile.

La Multiplication.

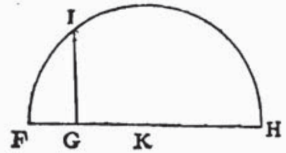


Soit par exemple AB l'vnité, & qu'il faille multiplier BD par BC, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer DE parallele a CA, & BE est le produit de cete Multiplication.

La Diuision.

Oubien s'il faut diuiser BE par BD, ayant ioint les poins E & D, ie tire AC parallele a DE, & BC est le produit de cete diuision.

l'Extraction de la racine quarrée.



Ou s'il faut tirer la racine quarrée de GH, ie luy adiouste en ligne droite FG, qui est l'vnité, & diuisant FH en deux parties esgales au point K, du centre K ie tire le cercle FIH, puis esleuant du point G vne ligne droite iusques à I, à angles droits sur FH, c'est GI la racine cherchée. Ie ne dis rien icy de la racine cubique, ny des autres, à cause que i'en parleray plus commodement cy aprés.

Commēt on peut

Mais souuent on n'a pas besoin de tracer ainsi ces ligne gnes sur le papier, & il suffist de les designer par quelques lettres, chascune par vne seule. Comme pour adiouster la ligne B D a G H, ie nomme l'vne a & l'autre b, & escris $a + b$; Et $a -- b$, pour soustraire b d'a; Et ab, pour les multiplier l'vne par l'autre; Et $\frac{a}{b}$, pour diuiser a par b; Et aa, ou $\overset{2}{a}$, pour multiplier a par soy mesme; Et $\overset{3}{a}$, pour le multiplier encore vne fois par a, & ainsi a l'infini; Et $\sqrt{\overset{2}{a} + \overset{2}{b}}$, pour tirer la racine quarrée d'$\overset{2}{a} + \overset{2}{b}$; Et $\sqrt{C.\, \overset{3}{a} -- \overset{3}{b} + abb}$, pour tirer la racine cubique d'$\overset{3}{a} -- \overset{3}{b} + abb$, & ainsi des autres.

vser de chiffres en Geometrie.

Où il est a remarquer que par $\overset{2}{a}$ ou $\overset{3}{b}$ ou semblables, ie ne conçoy ordinairement que des lignes toutes simples, encore que pour me seruir des noms vsités en l'Algebre, ie les nomme des quarrés ou des cubes, &c.

Il est aussy a remarquer que toutes les parties d'vne mesme ligne, se doiuent ordinairement exprimer par autant de dimensions l'vne que l'autre, lorsque l'vnité n'est point determinée en la question, comme icy $\overset{3}{a}$ en contient autant qu'abb ou $\overset{3}{b}$ dont se compose la ligne que i'ay nommée $\sqrt{C.\, \overset{3}{a} -- \overset{3}{b} + abb}$: mais que ce n'est pas de mesme lorsque l'vnité est determinée, a cause qu'elle peut estre sousentendue par tout ou il y a trop ou trop peu de dimensions: comme s'il faut tirer la racine cubique de $aabb -- b$, il faut penser que la quantité $aabb$ est diuisée vne fois par l'vnité, & que l'autre quantité b est multipliée deux fois par la mesme.

 Au

Au reste affin de ne pas manquer a se souuenir des noms de ces lignes, il en faut tousiours faire vn registre separé, à mesure qu'on les pose ou qu'on les change, escriuant par exemple.

A B $\propto$ 1, c'est a dire, A B esgal à 1.

G H $\propto a$

BD $\propto b$, &c.

Commēt il faut venir aux Equatiōs qui seruent a resoudre les problesmes.

Ainsi voulant resoudre quelque problesme, on doit d'abord le considerer comme desia fait, & donner des noms a toutes les lignes, qui semblent necessaires pour le construire, aussy bien a celles qui sont inconnuës, qu'aux autres. Puis sans considerer aucune difference entre ces lignes connuës, & inconnuës, on doit parcourir la difficulté, selon l'ordre qui monstre le plus naturellement de tous en qu'elle sorte elles dependent mutuellement les vnes des autres, iusques a ce qu'on ait trouué moyen d'exprimer vne mesme quantité en deux façons: ce qui se nomme vne Equation; car les termes de l'vne de ces deux façons sont esgaux a ceux de l'autre. Et on doit trouuer autant de telles Equations, qu'on a supposé de lignes, qui estoient inconnuës. Oubien s'il ne s'en trouue pas tant, & que nonobstant on n'omette rien de ce qui est desiré en la question, cela tesmoigne qu'elle n'est pas entierement determinée. Et lors on peut prendre a discretion des lignes connuës, pour toutes les inconnuës ausqu'elles ne correspond aucune Equation. Aprés cela s'il en reste encore plusieurs, il se faut seruir par ordre de chascune des Equations qui restent aussy, soit en la considerant toute seule, soit en la comparant auec les autres, pour expliquer chascune de ces lignes inconnuës; & faire ainsi

ainsi en les demeslant, qu'il n'en demeure qu'vne seule, esgale a quelque autre, qui soit connuë, oubien dont le quarré, ou le cube, ou le quarré de quarré, ou le sursolide, ou le quarré de cube, &c. soit esgal a ce, qui se produist par l'addition, ou soustraction de deux ou plusieurs autres quantités, dont l'vne soit connuë, & les autres soient composées de quelques moyennes proportionnelles entre l'vnité, & ce quarré, ou cube, ou quarré de quarré, &c. multipliées par d'autres connuës. Ce que i'escris en cete sorte.

$z \propto b$. ou

$z^2 \propto -a z + bb$. ou

$z^3 \propto + a z^2 + bbz - c^3$. ou

$z^4 \propto a z^3 - c^3 z + d^4$. &c.

C'est a dire, z, que ie prens pour la quantité inconnuë, est esgalé a b, ou le quarré de z est esgal au quarré de b moins a multiplié par z. ou le cube de z est esgal à a multiplié par le quarre de z plus le quarré de b multiplié par z moins le cube de c. & ainsi des autres.

Et on peut tousiours reduire ainsi toutes les quantités inconnuës à vne seule, lorsque le Problesme se peut construire par des cercles & des lignes droites, ou aussy par des sections coniques, ou mesme par quelque autre ligne qui ne soit que d'vn ou deux degrés plus composée. Mais ie ne m'areste point a expliquer cecy plus en detail, a cause que ie vous osterois le plaisir de l'apprendre de vous mesme, & l'vtilité de cultiuer vostre esprit en vous y exerceant, qui est a mon auis la principale, qu'on puisse

 tirer

tirer de cete science. Aussy que ie n y remarque rien de si difficile, que ceux qui seront vn peu versés en la Geometrie commune, & en l'Algebre, & qui prendront garde a tout ce qui est en ce traité, ne puissent trouuer.

C'est pourquoy ie me contenteray icy de vous auertir, que pourvû qu'en demeslant ces Equations on ne manque point a se seruir de toutes les diuisions, qui seront possibles, on aura infalliblement les plus simples termes, ausquels la question puisse estre reduite.

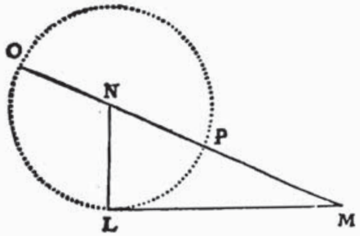
Quels sont les problesmes plans

Et que si elle peut estre resolue par la Geometrie ordinaire, c'est a dire, en ne se seruant que de lignes droites & circulaires tracées sur vne superficie plate, lorsque la derniere Equation aura esté entierement demeslée, il n'y restera tout au plus qu'vn quarré inconnu, esgal a ce qui se produist de l'Addition, ou soustraction de sa racine multipliée par quelque quantité connue, & de quelque autre quantité aussy connue

Comment ils se resoluent.

Et lors cete racine, ou ligne inconnue se trouue aysement. Car si i'ay par exemple

$z^2 \propto a z + bb$

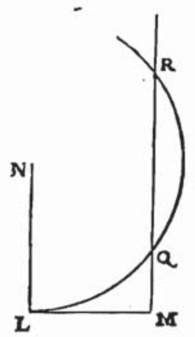


ie fais le triangle rectangle N L M, dont le costé L M est esgal à b racine quarrée de la quantité connue bb, & l'autre L N est $\frac{1}{2} a$, la moitié de l'autre quantité connue, qui estoit multipliée par z que ie suppose estre la ligne inconnue. puis prolongeant M N la baze de ce triangle,

angle, iusques a O, en sorte qu'N O soit esgale a N L, la toute O M est z la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cete sorte

$$z \infty \tfrac{1}{2} a + \sqrt{\tfrac{1}{4} aa + bb}.$$

Que si iay $yy \infty - ay + bb$, & qu'y soit la quantité qu'il faut trouuer, ie fais le mesme triangle rectangle N L M, & de sa baze M N i'oste N P esgale a N L, & le reste P M est y la racine cherchée. De façon que iay $y \infty - \tfrac{1}{2} a + \sqrt{\tfrac{1}{4} aa + bb}$. Et tout de mesme si i'auois $x^4 \infty - a x^2 + b^2$. P M seroit x^2. & i'aurois $x \infty \sqrt{- \tfrac{1}{2} a + \sqrt{\tfrac{1}{4} aa + bb}}$: & ainsi des autres.



Enfin si i'ay

$$z^2 \infty az - bb:$$

ie fais N L esgale à $\tfrac{1}{2} a$, & L M esgale à b cõme deuãt, puis, au lieu de ioindre les poins M N, ie tire M Q R parallele a L N. & du centre N par L ayant descrit vn cercle qui la couppe aux poins Q & R, la ligne cherchée z est M Q, oubiẽ M R, car en ce cas elle s'exprime en deux façons, a sçauoir $z \infty \tfrac{1}{2} a + \sqrt{\tfrac{1}{4} aa - bb}$, & $z \infty \tfrac{1}{2} a - \sqrt{\tfrac{1}{4} aa - bb}$.

Et si le cercle, qui ayant son centre au point N, passe par le point L, ne couppe ny ne touche la ligne droite M Q R, il n'y a aucune racine en l'Equation, de façon qu'on peut assurer que la construction du problesme proposé est impossible.

Au

Au reste ces mesmes racines se peuuent trouuer par vne infinité d'autres moyens, & i'ay seulement veulu mettre ceux cy, comme fort simples, affin de faire voir qu'on peut construire tous les Problesmes de la Geometrie ordinaire, sans faire autre chose que le peu qui est compris dans les quatre figures que i'ay expliquées. Ce que ie ne croy pas que les anciens ayent remarqué. car autrement ils n'eussent pas pris la peine d'en escrire tant de gros liures, ou le seul ordre de leurs propositions nous fait connoistre qu'ils n'ont point eu la vraye methode pour les trouuer toutes, mais qu'ils ont seulement ramassé celles qu'ils ont rencontrées.

[...]

LIVRE SECOND

DE LA NATURE DES LIGNES COURBES.

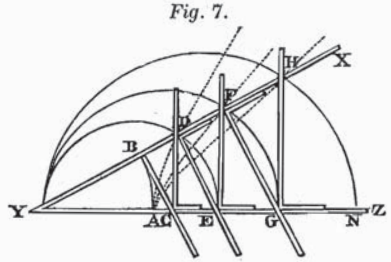
Quelles sont les lignes courbes qu'on peut recevoir en géométrie.

Les anciens ont fort bien remarqué qu'entre les problèmes de géométrie, les uns sont plans, les autres solides et les autres linéaires, c'est-à-dire que les uns peuvent être construits en ne traçant que des lignes droites et des cercles; au lieu que les autres ne le peuvent être, qu'on n'y emploie pour le moins quelque section conique; ni enfin les autres, qu'on n'y emploie quelque autre ligne plus composée. Mais je m'étonne de ce qu'ils n'ont point outre cela distingué divers degrés entre ces lignes plus composées, et je ne saurois comprendre pourquoi ils les ont nommées mécaniques plutôt que géométriques. Car de dire que c'ait été à cause qu'il est besoin de se servir de quelque machine pour les décrire, il faudroit rejeter par même raison les cercles et les lignes droites, vu qu'on ne les décrit sur le papier qu'avec un compas et une règle, qu'on peut aussi nommer des machines. Ce n'est pas non plus à cause que les instruments qui servent à les tracer, étant plus composés que la règle et le compas, ne peuvent être si justes; car il faudroit pour cette raison les rejeter des mécaniques, où la justesse des ouvrages qui sortent de la main est désirée, plutôt que de la géométrie, où c'est seulement la justesse du raisonnement qu'on recherche, et qui peut sans doute être aussi parfaite touchant ces lignes que touchant les autres. Je ne dirai pas aussi que ce soit à cause qu'ils n'ont pas voulu augmenter le nombre de leurs demandes, et qu'ils se sont contentés qu'on leur accordât qu'ils pussent joindre deux points donnés par une ligne droite, et décrire un cercle d'un centre donné qui passât par un point donné; car ils n'ont point fait de

scrupule de supposer outre cela, pour traiter des sections coniques, qu'on pût couper tout cône donné par un plan donné. Et il n'est besoin de rien supposer pour tracer toutes les lignes courbes que je prétends ici d'introduire, sinon que deux ou plusieurs lignes puissent être mues l'une par l'autre, et que leurs intersections en marquent d'autres; ce qui ne me paroît en rien plus difficile. Il est vrai qu'ils n'ont pas aussi entièrement reçu les sections coniques en leur géométrie, et je ne veux pas entreprendre de changer les noms qui ont été approuvés par l'usage; mais il est, ce me semble, très clair que, prenant comme on fait pour géométrique ce qui est précis et exact, et pour mécanique ce qui ne l'est pas, et considérant la géométrie comme une science qui enseigne généralement à connoître les mesures de tous les corps, on n'en doit pas plutôt exclure les lignes les plus composées que les plus simples, pourvu qu'on les puisse imaginer être décrites par un mouvement continu, ou par plusieurs qui s'entre-suivent, et dont les derniers soient entièrement réglés par ceux qui les précèdent; car par ce moyen on peut toujours avoir une connoissance exacte de leur mesure. Mais peut-être que ce qui a empêché les anciens géomètres de recevoir celles qui étoient plus composées que les sections coniques, c'est que les premières qu'ils ont considérées, ayant par hasard été la spirale, la quadratrice et semblables, qui n'appartiennent véritablement qu'aux mécaniques, et ne sont point du nombre de celles que je pense devoir ici être reçues, à cause qu'on les imagine décrites par deux mouvements séparés, et qui n'ont entre eux aucun rapport qu'on puisse mesurer exactement; bien qu'ils aient après examiné la conchoïde, la cissoïde, et quelque peu d'autres qui en sont, toutefois à cause qu'ils n'ont peut-être pas assez remarqué leurs propriétés, ils n'en ont pas fait plus d'état que des premières; ou bien c'est que, voyant qu'ils ne connoissoient encore que peu de choses touchant les sections coniques, et qu'il leur en restoit même beaucoup, touchant ce qui se peut faire avec la règle et le compas, qu'ils ignoroient, ils ont cru ne devoir point entamer de matière plus difficile. Mais pourceque j'espère que dorénavant ceux qui auront l'adresse de se servir du calcul géométrique ici proposé, ne trouveront pas assez de quoi s'arrêter touchant les problèmes plans ou solides, je crois qu'il est à propos que je les invite à d'autres recherches, où ils ne manqueront jamais d'exercice.

Voyez les lignes AB, AD, AF et semblables *(fig. 7)*, que je suppose avoir été décrites par l'aide de l'instrument YZ, qui est composé de plusieurs

Fig. 7.



règles tellement jointes que celle qui est marquée YZ étant arrêtée sur la ligne AN, on peut ouvrir et fermer l'angle XYZ, et que lorsqu'il est tout fermé, les points B, C, D, E, F, G, H sont tous assemblés au point A; mais qu'à mesure qu'on l'ouvre, la règle BC, qui est jointe à angles droits avec XY au point B, pousse vers Z la règle CD, qui coule sur YZ en faisant toujours des angles droits avec elle; et CD pousse DE, qui coule tout de même sur YX en demeurant parallèle à BC; DE pousse EF, EF pousse FG, celle-ci pousse GH, et on en peut concevoir une infinité d'autres qui se poussent consécutivement en même façon, et dont les unes fassent toujours les mêmes angles avec YX et les autres avec YZ. Or, pendant qu'on ouvre ainsi l'angle XYZ, le point B décrit la ligne AB, qui est un cercle; et les autres points D, F, H, où se font les intersections des autres règles, décrivent d'autres lignes courbes AD, AF, AH, dont les dernières sont par ordre plus composées que la première, et celle-ci plus que le cercle; mais je ne vois pas ce qui peut empêcher qu'on ne conçoive aussi nettement et aussi distinctement la description de cette première que du cercle, ou du moins que des sections coniques; ni ce qui peut empêcher qu'on ne conçoive la seconde, et la troisième, et toutes les autres qu'on peut décrire, aussi bien que la première; ni par conséquent qu'on ne les reçoive toutes en même façon pour servir aux spéculations de géométrie.

[...]

LIVRE TROISIÈME

DE LA CONSTRUCTION DES PROBLÈMES QUI SONT SOLIDES OU PLUS QUE SOLIDES.

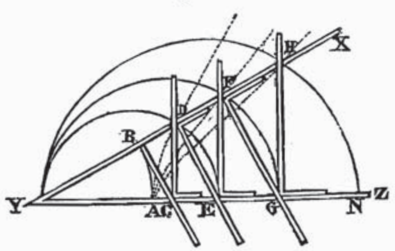
De quelles lignes courbes on peut se servir en la construction de chaque problème.

Encore que toutes les lignes courbes qui peuvent être décrites par quelque mouvement régulier doivent être reçues en la géométrie, ce n'est pas à dire qu'il soit permis de se servir indifféremment de la première qui se rencontre pour la construction de chaque problème, mais il faut avoir soin de choisir toujours la plus simple par laquelle il soit possible de le résoudre. Et même il est à remarquer que par les plus simples on ne doit pas seulement entendre celles qui peuvent le plus aisément être décrites, ni celles qui rendent la construction ou la démonstration du problème proposé plus facile, mais principalement celles qui sont du plus simple genre qui puisse servir à déterminer la quantité qui est cherchée.

Exemple touchant l'invention de plusieurs moyennes proportionnelles.

Comme, par exemple, je ne crois pas qu'il y ait aucune façon plus facile

Fig. 25.



pour trouver autant de moyennes proportionnelles qu'on veut, ni dont la

démonstration soit plus évidente, que d'y employer les lignes courbes qui se décrivent par l'instrument XYZ *(fig. 25)* ci-dessus expliqué. Car, voulant trouver deux moyennes proportionnelles entre YA et YE, il ne faut que décrire un cercle dont le diamètre soit YE, et pourceque ce cercle coupe la courbe AD au point D, YD est l'une des moyennes proportionnelles cherchées, dont la démonstration se voit à l'œil par la seule application de cet instrument sur la ligne YD; car, comme YA ou YB, qui lui est égale, est à YC, ainsi YC est à YD, et YD à YE.

Tout de même pour trouver quatre moyennes proportionnelles entre YA et YG, ou pour en trouver six entre YA et YN, il ne faut que tracer le cercle YFG qui, coupant AF au point F, détermine la ligne droite YF qui est l'une de ces quatre proportionnelles; ou YHN qui, coupant AH au point H, détermine YH l'une des six; et ainsi des autres.

Mais pourceque la ligne courbe AD est du second genre, et qu'on peut trouver deux moyennes proportionnelles par les sections coniques qui sont du premier; et aussi pourcequ'on peut trouver quatre ou six moyennes proportionnelles par des lignes qui ne sont pas de genres si composés que sont AF et AH, ce seroit une faute en géométrie que de les y employer. Et c'est une faute aussi, d'autre côté, de se travailler inutilement à vouloir construire quelque problème par un genre de lignes plus simple que sa nature ne permet.

De la nature des équations

Or, afin que je puisse ici donner quelques règles pour éviter l'une et l'autre de ces deux fautes, il faut que je die quelque chose en général de la nature des équations, c'est-à-dire des sommes composées de plusieurs termes partie connus et partie inconnus dont les uns sont égaux aux autres, ou plutôt qui, considérés tous ensemble, sont égaux à rien: car ce sera souvent le meilleur de les considérer en cette sorte.

Combien il peut y avoir de racines en chaque équation.

Sachez donc qu'en chaque équation, autant que la quantité inconnue a de dimensions, autant peut-il y avoir de diverses racines, c'est-à-dire de valeurs de cette quantité; car, par exemple, si on suppose x égale à 2, ou bien $x - 2$ égal à rien; et derechef $x = 3$, ou bien $x - 3 = 0$; en multipliant ces deux équations

$$x - 2 = 0, \quad \text{et} \quad x - 3 = 0,$$

l'une par l'autre, on aura

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

ou bien

$$x^2 = 5x - 6,$$

qui est une équation en laquelle la quantité x vaut 2 et tout ensemble vaut 3. Que si derechef on fait

$$x - 4 = 0,$$

et qu'on multiplie cette somme par

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

on aura

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0,$$

qui est une autre équation en laquelle x, ayant trois dimensions, a aussi trois valeurs, qui sont 2, 3 et 4.

Quelles sont les fausses racines.

Mais souvent il arrive que quelques unes de ces racines sont fausses ou moindres que rien; comme si on suppose que x désigne aussi le défaut d'une quantité qui soit 5, on a

$$x + 5 = 0,$$

qui, étant multiplié par

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0,$$

fait

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$

pour une équation en laquelle il y a quatre racines, à savoir trois vraies qui sont 2, 3, 4, et une fausse qui est 5.

Comment on peut diminuer le nombre des dimensions d'une équation lorsqu'on connoît quelqu'une de ses racines.

Et on voit évidemment de ceci que la somme d'une équation qui contient plusieurs racines peut toujours être divisée par un binôme composé de la quantité inconnue moins la valeur de l'une des vraies racines, laquelle que ce soit, ou plus la valeur de l'une des fausses; au moyen de quoi on diminue d'autant ses dimensions.

Comment on peut examiner si quelque quantité donnée est la valeur d'une racine.

Et réciproquement que si la somme d'une équation ne peut être divisée par un binôme composé de la quantité inconnue + ou — quelque autre

quantité, cela témoigne que cette autre quantité n'est la valeur d'aucune de ses racines. Comme cette dernière

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$

peut bien être divisée par $x - 2$, et par $x - 3$, et par $x - 4$, et par $x - 5$, mais non point par x + ou — aucune autre quantité; ce qui montre qu'elle ne peut avoir que les quatre racines 2, 3, 4 et 5.

[. . .]

[...]

Comment on peut ôter le second terme d'une équation.

Or par cette façon de changer la valeur des racines sans les connoître on peut faire deux choses qui auront ci-après quelque usage. La première est qu'on peut toujours ôter le second terme de l'équation qu'on examine, à savoir en diminuant les vraies racines de la quantité connue de ce second terme divisée par le nombre des dimensions du premier, si l'un de ces deux termes étant marqué du signe +, l'autre est marqué du signe —; ou bien en l'augmentant de la même quantité, s'ils ont tous deux le signe + ou tous deux le signe —. Comme pour ôter le second terme de la dernière équation qui est

$$y^4 + 16y^3 + 71y^2 - 4y - 420 = 0,$$

ayant divisé 16 par 4, à cause des quatre dimensions du terme y^4, il vient derechef 4; c'est pourquoi je fais $z - 4 = y$, et j'écris

$$\begin{array}{l} z^4 - 16z^3 + 96z^2 - 256z + 256 \\ \quad + 16z^3 - 192z^2 + 768z - 1024 \\ \qquad\qquad + 71z^2 - 568z + 1136 \\ \qquad\qquad\qquad\quad - 4z + 16 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - 420 \\ \hline z^4 \qquad - 25z^2 - 60z - 36 = 0 \end{array}$$

où la vraie racine qui étoit 2 est 6, à cause qu'elle est augmentée de 4; et les fausses, qui étoient 5, 6 et 7, ne sont plus que 1, 2 et 3, à cause qu'elles sont diminuées chacune de 4.

Tout de même si on veut ôter le second terme de

$$x^4 - 2ax^3 + (2a^2 - c^2)\,x^2 - 2a^3x + a^4 = 0,$$

pourceque divisant $2a$ par 4 il vient $\frac{1}{2}a$, il faut faire $z + \frac{1}{2}a = x$, et écrire

$$\begin{array}{l} z^4 + 2az^3 + \frac{3}{2}a^2z^2 + \frac{1}{2}a^3z + \frac{1}{16}a^4 \\ \quad - 2az^3 - 3a^2z^2 - \frac{3}{2}a^3z - \frac{1}{4}a^4 \\ \qquad\qquad + 2a^2z^2 + 2a^3z + \frac{1}{2}a^4 \\ \qquad\qquad - \quad c^2z^2 - ac^2z - \frac{1}{4}a^2c^2 \\ \qquad\qquad\qquad\quad - 2a^3z - a^4 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + a^4 \\ \hline z^4 + \left(\frac{1}{2}a^2 - c^2\right)z^2 - (a^3 + ac^2)\,z + \frac{5}{16}a^4 - \frac{1}{4}a^2c^2 = 0 \end{array}$$

et si on trouve après la valeur de z, en lui ajoutant $\frac{1}{2}a$ on aura celle de x.

[...]

[· · ·]

Au reste, tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement imaginaires, c'est-à-dire qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation, mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui corresponde à celles qu'on imagine; comme encore qu'on en puisse imaginer trois en celle-ci, *Que les racines tant vraies que fausses peuvent être réelles ou imaginaires.*

$$x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0,$$

il n'y en a toutefois qu'une réelle qui est 2, et pour les deux autres, quoiqu'on les augmente ou diminue, ou multiplie en la façon que je viens d'expliquer, on ne sauroit les rendre autres qu'imaginaires.

La réduction des équations cubiques, lorsque le problème est plan. Or quand, pour trouver la construction de quelque problème, on vient à une équation en laquelle la quantité inconnue a trois dimensions, premièrement, si les quantités connues qui y sont contiennent quelques nombres rompus, il les faut réduire à d'autres entiers par la multiplication tantôt expliquée; et s'ils en contiennent de sourds, il faut aussi les réduire à d'autres rationnaux autant qu'il sera possible, tant par cette même multiplication que par divers autres moyens qui sont assez faciles à trouver. Puis examinant par ordre toutes les quantités qui peuvent diviser sans fraction le dernier terme, il faut voir si quelqu'une d'elles, jointe avec la quantité inconnue par le signe + ou —, peut composer un binôme qui divise toute la somme; et si cela est, le problème est plan, c'est-à-dire il peut être construit avec la règle et le compas; car, ou bien la quantité connue de ce binôme est la racine cherchée, ou bien l'équation étant divisée par lui se

réduit à deux dimensions, en sorte qu'on en peut trouver après la racine par ce qui a été dit au premier livre.

Par exemple, si on a

$$y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0,$$

le dernier terme qui est 64 peut être divisé sans fraction par 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64; c'est pourquoi il faut examiner par ordre si cette équation ne peut point être divisée par quelqu'un des binômes $y^2 - 1$ ou $y^2 + 1$, $y^2 - 2$ ou $y^2 + 2$, $y^2 - 4$, etc.; et on trouve qu'elle peut l'être par $y^2 - 16$ en cette sorte:

$$\begin{array}{rrrrl}
+\,y^6 & -\;\;8y^4 & -\,124y^2 & -\,64 & = 0 \\
-\,y^6 & -\;\;8y^4 & -\;\;4y^2 & -\,16 & \\
\hline
0 & -\,16y^4 & -\,128y^2 & & \\
 & -\,16 & -\;\;16 & & \\
\hline
 & +\;\;y^4 & +\;\;8y^2 & +\;\;4 & = 0.
\end{array}$$

La façon de diviser une équation par un binôme qui contient sa racine. Je commence par le dernier terme, et divise — 64 par — 16, ce qui fait + 4 que j'écris dans le quotient; puis je multiplie + 4 par $+ y^2$, ce qui fait $+ 4y^2$; c'est pourquoi j'écris $- 4y^2$ en la somme qu'il faut diviser, car il y faut toujours écrire le signe + ou — tout contraire à celui que produit la multiplication; et joignant $- 124y^2$ avec $- 4y^2$, j'ai $- 128y^2$ que je divise derechef par — 16, et j'ai $+ 8y^2$ pour mettre dans le quotient; et en le multipliant par y^2, j'ai $- 8y^4$ pour joindre avec le terme qu'il faut diviser, qui est aussi $- 8y^4$; et ces deux ensemble font $- 16y^4$ que je divise par — 16, ce qui fait $+ y^4$ pour le quotient et $- y^6$ pour joindre avec $+ y^6$, ce qui fait 0 et montre que la division est achevée. Mais s'il étoit resté quelque quantité, ou bien qu'on n'eût pu diviser sans fraction quelqu'un des termes précédents, ou eût par là reconnu qu'elle ne pouvoit être faite.

Tout de même si on a

$$y^6 + \left.\begin{array}{r} a^2 \\ -2c^2 \end{array}\right\} y^4 - \left.\begin{array}{r} a^4 \\ +c^4 \end{array}\right\} y^2 - \left.\begin{array}{r} a^6 \\ -2a^4c^2 \\ -a^2c^4 \end{array}\right\} = 0,$$

le dernier terme se peut diviser sans fraction par a, a^2, a^2+c^2, a^3+ac^2, et semblables; mais il n'y en a que deux qu'on ait besoin de considérer, à savoir a^2 et a^2+c^2, car les autres, donnant plus ou moins de dimensions dans le quotient qu'il n'y en a en la quantité connue du pénultième terme, empêcheroient que la division ne s'y pût faire. Et notez que je ne compte ici les dimensions de y^6 que pour trois, à cause qu'il n'y a point de y^5, ni de y^3, ni de y en toute la somme. Or en examinant le binôme $y^2-a^2-c^2=0$, on trouve que la division se peut faire par lui en cette sorte:

$$\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} +y^6+\;a^2 \\ -y^6-2c^2 \end{array}\right\} y^4 \left.\begin{array}{l} -a^4 \\ +c^4 \end{array}\right\} y^2 \left.\begin{array}{l} -a^6 \\ -2a^4c^2 \\ -a^2c^4 \\ \hline -a^2-c^2 \end{array}\right\} = 0 \\
\quad\left.\begin{array}{l} 0-2a^2 \\ +\;c^2 \end{array}\right\} y^4 \left.\begin{array}{l} -a^4 \\ -a^2c^2 \end{array}\right\} y^2 \\
\quad -a^2-c^2 \quad -a^2-c^2 \\
\hline
+y^4 \quad \left.\begin{array}{l} +2a^2 \\ -\;c^2 \end{array}\right\} y^2 \left.\begin{array}{l} +a^4 \\ +a^2c^2 \end{array}\right\} = 0,
\end{array}$$

ce qui montre que la racine cherchée est a^2+c^2, et la preuve en est aisée à faire par la multiplication.

Quels problèmes sont solides lorsque l'équation est cubique.

Mais lorsqu'on ne trouve aucun binôme qui puisse ainsi diviser toute la somme de l'équation proposée, il est certain que le problème qui en dépend est solide; et ce n'est pas une moindre faute après cela de tâcher à le construire sans y employer que des cercles et des lignes droites, que ce seroit d'employer des sections coniques à construire ceux auxquels on n'a besoin que de cercles: car enfin tout ce qui témoigne quelque ignorance s'appelle faute.

La réduction des équations qui ont quatre dimensions, lorsque le problème est plan. Et quels sont ceux qui sont solides.

Que si on a une équation dont la quantité inconnue ait quatre dimensions, il faut en même façon, après en avoir ôté les nombres sourds et rompus, s'il y en a, voir si on pourra trouver quelque binôme qui divise toute la somme en le composant de l'une des quantités qui divisent sans fraction le dernier terme. Et si on en trouve un, ou bien la quantité connue de ce binôme est la racine cherchée, ou du moins, après cette division, il ne reste en l'équation que trois dimensions, ensuite de quoi il faut derechef l'examiner en la même sorte. Mais lorsqu'il ne se trouve point de tel binôme, il faut, en

augmentant ou diminuant la valeur de la racine, ôter le second terme de la somme en la façon tantôt expliquée, et après la réduire à une autre qui ne contienne que trois dimensions; ce qui se fait en cette sorte: au lieu de

$$+x^4 \ldots px^2 \ldots qx \ldots r=0,$$

il faut écrire

$$+y^6 \ldots 2py^4+(p^2 \ldots 4r)\,y^2-q^2=0.$$

Et pour les signes $+$ ou $-$ que j'ai omis, s'il y a eu $+p$ en la précédente équation, il faut mettre en celle-ci $+2p$, ou s'il y a eu $-p$, il faut mettre $-2p$; et au contraire s'il y a eu $+r$, il faut mettre $-4r$, ou s'il y a eu $-r$, il faut mettre $+4r$; et soit qu'il y ait eu $+q$ ou $-q$, il faut toujours mettre $-q^2$ et $+p^2$, au moins si on suppose que x^4 et y^6 sont marqués du signe $+$, car ce seroit tout le contraire si on y supposoit le signe $-$.

Par exemple, si on a

$$+x^4-4x^2-8x+35=0,$$

il faut écrire en son lieu

$$y^6-8y^4-124y^2-64=0,$$

car la quantité que j'ai nommée p étant -4, il faut mettre $-8y^4$ pour $2py^4$; et celle que j'ai nommée r étant 35, il faut mettre $(16-140)\,y^2$, c'est-à-dire $-124y^2$ au lieu de $(p^2-4r)y^2$; et enfin q étant 8, il faut mettre -64 pour $-q^2$.

Tout de même, au lieu de

$$+x^4-17x^2-20x-6=0,$$

il faut écrire

$$+y^6-34y^4+313y^2-400=0;$$

car 34 est double de 17, et 313 en est le carré joint au quadruple de 6, et 400 est le carré de 20.

Tout de même aussi au lieu de

$$+z^4+\left(\frac{1}{2}a^2-c^2\right)z^2-(a^3+ac^2)\,z-\frac{5}{16}a^4-\frac{1}{4}a^2c^2=0,$$

il faut écrire

$$y^6 + (a^2 - 2c^2)\, y^4 + (c^4 - a^4)\, y^2 - a^6 - 2a^4c^2 - a^2c^4 = 0;$$

car p est $\frac{1}{2}a^2 - c^2$, et p^2 est $\frac{1}{4}a^4 - a^2c^2 + c^4$, et $4r$ est $-\frac{5}{4}a^4 + a^2c^2$, et enfin $-q^2$ est $-a^6 - 2a^4c^2 - a^2c^4$.

Après que l'équation est ainsi réduite à trois dimensions, il faut chercher la valeur de y^2 par la méthode déjà expliquée; et si elle ne peut être trouvée, on n'a point besoin de passer outre, car il suit de là infailliblement que le problème est solide. Mais si on la trouve, on peut diviser par son moyen la précédente équation en deux autres, en chacune desquelles la quantité inconnue n'aura que deux dimensions et dont les racines seront les mêmes que les siennes; à savoir, au lieu de

$$+ x^4 \ldots px^2 \ldots qx \ldots r = 0,$$

il faut écrire ces deux autres

$$+ x^2 - yx + \frac{1}{2}y^2 \ldots \frac{1}{2}p \ldots \frac{q}{2y} = 0,$$

et

$$+ x^2 + yx + \frac{1}{2}y^2 \ldots \frac{1}{2}p \ldots \frac{q}{2y} = 0.$$

Et pour les signes + et — que j'ai omis, s'il y a $+p$ en l'équation précédente, il faut mettre $+\frac{1}{2}p$ en chacune de celles-ci, et $-\frac{1}{2}p$ s'il y a en l'autre $-p$; mais il faut mettre $+\frac{q}{2y}$ en celle où il y a $-yx$, et $-\frac{q}{2y}$ en celle où il y a $+yx$, lorsqu'il y a $+q$ en la première; et au contraire, s'il y a $-q$, il faut mettre $-\frac{q}{2y}$ en celle où il y a $-yx$, et $+\frac{q}{2y}$ en celle où il y a $+yx$. Ensuite de quoi il est aisé de connoître toutes les racines de l'équation proposée, et par conséquent de construire le problème dont elle contient la solution, sans y employer que des cercles et des lignes droites.

Par exemple, à cause que faisant

$$y^6 - 34y^4 + 313y^2 - 400 = 0$$

pour

$$x^4 - 17x^2 - 20x - 6 = 0,$$

on trouve que y^2 est 16, on doit, au lieu de cette équation

$$+ x^4 - 17x^2 - 20x - 6 = 0,$$

écrire ces deux autres

$$+ x^2 - 4x - 3 = 0,$$

et

$$+ x^2 + 4x + 2 = 0,$$

car y est 4, $\frac{1}{2}y^2$ est 8, p est 17, et q est 20, de façon que

$$+\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} \text{ fait } -3, \text{ et } +\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} \text{ fait } +2.$$

Et tirant les racines de ces deux équations, on trouve toutes les mêmes que si on les tiroit de celle où est x^4, à savoir, on en trouve une vraie qui est $\sqrt{7} + 2$, et trois fausses qui sont

$$\sqrt{7} - 2, \quad 2 + \sqrt{2}, \quad \text{et} \quad 2 - \sqrt{2}.$$

Ainsi ayant

$$x^4 - 4x^2 - 8x + 35 = 0,$$

pourceque la racine de

$$y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0$$

est derechef 16, il faut écrire

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

et

$$x^2 + 4x + 7 = 0.$$

Car ici

$$+\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} \text{ fait } 5, \text{ et } +\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} \text{ fait } 7.$$

Et pourcequ'on ne trouve aucune racine, ni vraie ni fausse, en ces deux dernières équations, on connoît de là que les quatre de l'équation dont elles procèdent sont imaginaires, et que le problème pour lequel on l'a trouvée est plan de sa nature, mais qu'il ne sauroit en aucune façon être construit, à cause que les quantités données ne peuvent se joindre.

[. . .]

CCCXXV*

DESCARTES A ELISABETH.

[Egmond du Hoef, novembre 1643.]

Texte de Clerselier, tome III, lettre 80, p. 461-465.

« *A M. la Princesse Elizabeth, etc. Touchant le Probleme : trois cercles estant donnez, trouuer le quatriéme qui touche les trois* », dit *Clerselier, sans donner de date. Mais la réponse d'Elisabeth est datée du 21 novembre, lettre CCCXXVII ci-après; d'autre part, nous savons, par une lettre du 21 octobre, la CCCXX*e *ci-avant (p. 26, l. 24), qu'à cette date la princesse avait le problème en mains. La* *présente a donc été écrite dans l'intervalle de ces deux dates, et il est plausible de la rapprocher plutôt du 21 novembre.*

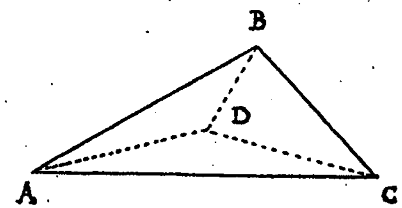
Madame,

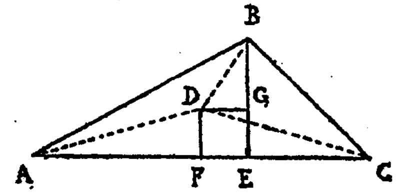
Ayant ſceu de Monſieur de Pollot que Voſtre Alteſſe a pris la peine de chercher la queſtion des trois cercles, & qu'elle a trouué le moyen de la ſoudre, en ne ſuppoſant qu'vne quantité inconnuë, i'ay penſé que mon deuoir m'obligeoit de mettre icy la raiſon pourquoy i'en auois propoſé pluſieurs, & de quelle façon ie les demeſle.

I'obſerue touſiours, en cherchant vne queſtion de Geometrie, que les lignes, dont ie me ſers pour la trouuer, ſoient paralleles, ou s'entrecouppent à angles droits, le plus qu'il eſt poſſible; & ie ne conſidere point d'autres Theoremes, ſinon que les coſtez des triangles ſemblables ont ſemblable proportion entr'eux, & que, dans les triangles rectangles, le quarré de la baſe eſt égal aux deux quarrez des coſtez. Et ie ne crains point de ſuppoſer pluſieurs quantitez inconnuës, pour reduire la queſtion à tels termes, qu'elle ne depende que de ces deux Theoremes; au contraire, i'aime mieux en ſuppoſer plus que moins. Car, par ce moyen, ie voy plus clairement tout ce que ie fais, & en les demeſlant ie trouue mieux les plus courts chemins, & m'exempte de multiplications ſuperfluës; au lieu que, ſi l'on tire d'autres lignes, & qu'on ſe ſerue d'autres Theoremes, bien qu'il puiſſe arriuer, par hazard, que le chemin qu'on trouuera ſoit plus court que le mien, toutesfois il arriue quaſi touſiours le contraire. Et on ne voit point ſi bien ce qu'on fait, ſi

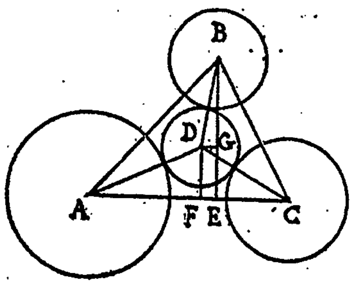
ce n'eſt qu'on ait la demonſtration du Theoreme dont on ſe ſert fort preſente en l'eſprit; & en ce cas on trouue, quaſi touſiours, qu'il depend de la conſideration de quelques triangles, qui ſont ou rectangles, ou ſemblables entr'eux, & ainſi on retombe dans le chemin que ie tiens.

Par exemple, ſi on veut chercher cette queſtion des trois cercles, par l'aide d'vn Theoreme qui enſeigne à trouuer l'aire d'vn triangle par ſes trois coſtez, on n'a beſoin de ſuppoſer qu'vne quantité inconnuë. Car ſi A, B, C ſont les centres des trois cercles donnez, & D le centre du cherché, les trois coſtez du triangle ABC ſont donnez, & les trois lignes AD, BD, CD ſont compoſées des trois rayons des cercles donnez, ioints au rayon du cercle cherché, ſi bien que, ſuppoſant x pour ce rayon, on a tous les coſtez des triangles ABD, ACD, BCD; & par conſequent on peut auoir leurs aires, qui, iointes enſemble, ſont égales à l'aire du triangle donné ABC; & on peut, par cette équation, venir à la connoiſſance du rayon x, qui ſeul eſt requis pour la ſolution de la queſtion. Mais ce chemin me ſemble conduire à tant de multiplications ſuperfluës, que ie ne voudrois pas entreprendre de les demeſler en trois mois. C'eſt pourquoy, au lieu des deux lignes obliques AB & BC, ie mene les trois perpendiculaires BE,





DG, DF, & poſant trois quantitez inconnuës, l'vne pour DF, l'autre pour DG, & l'autre pour le rayon du cercle cherché, i'ay tous les coſtez des trois triangles rectangles ADF, BDG, CDF, qui me donnent trois équations, pour ce qu'en chacun d'eux le quarré de la baſe eſt égal aux deux quarrez des coſtez.



Apres auoir ainſi fait autant d'équations que i'ay ſuppoſé de quantitez inconnuës, ie conſidere ſi, par chaque équation, i'en puis trouuer vne en termes aſſez ſimples; & ſi ie ne le puis, ie taſche d'en venir à bout, en ioignant deux ou pluſieurs équations par l'addition ou ſouſtraction; & enfin, lors que cela ne ſuffit pas, i'examine ſeulement s'il ne ſera point mieux de changer les termes en quelque façon. Car, en faiſant cét examen auec addreſſe, on rencontre aiſément les plus courts chemins, & on en peut eſſayer vne infinité en fort peu de temps.

Ainſi, en cét exemple, ie ſuppoſe que les trois baſes des triangles rectangles font[a]

$$AD \infty a + x,$$
$$BD \infty b + x,$$
$$CD \infty c + x,$$

et, faiſant $AE \infty d$, $BE \infty e$, $CE \infty f$,

$$DF \text{ ou } GE \infty y, \; DG \text{ ou } FE \infty z,$$

a. Clerselier emploie, comme signe d'égalité, les deux barres verticales, ||, au lieu du signe ∞, uſité par Descartes.

i'ay pour les coſtez des meſmes triangles :

$$AF \infty d - z \;\&\; FD \infty y,$$
$$BG \infty e - y \;\&\; DG \infty z,$$
$$CF \infty f + z \;\&\; FD \infty y.$$

Puis, faiſant le quarré de chacune de ces baſes égal au quarré des deux coſtez, i'ay les trois équations ſuiuantes :

$$aa + 2ax + xx \infty dd - 2dz + zz + yy,$$
$$bb + 2bx + xx \infty ee - 2ey + yy + zz,$$
$$cc + 2cx + xx \infty ff + 2fz + zz + yy,$$

& ie voy que, par l'vne d'elles toute ſeule, ie ne puis trouuer aucune des quantitez inconnuës, ſans en tirer la racine quarrée, ce qui embarraſſeroit trop la queſtion. C'eſt pourquoy ie viens au ſecond moyen, qui eſt de ioindre deux équations enſemble, & i'apperçois incontinent que, les termes xx, yy & zz eſtant ſemblables en toutes trois, ſi i'en oſte vne d'vne autre, laquelle ie voudray, ils s'effaceront, & ainſi ie n'auray plus de termes inconnus que x, y & z tous ſimples. Ie voy auſſi que, ſi i'oſte la ſeconde de la premiere ou de la troiſiéme, i'auray tous ces trois termes x, y & z; mais que, ſi i'oſte la premiere de la troiſiéme, ie n'auray que x & z. Ie choiſis donc ce dernier chemin, & ie trouue

$$cc + 2cx - aa - 2ax \infty ff + 2fz - dd + 2dz,$$

ou bien $$z \infty \frac{cc - aa + dd - ff + 2cx - 2ax}{2d + 2f},$$

ou bien $$\tfrac{1}{2}d - \tfrac{1}{2}f + \frac{cc - aa + 2cx - 2ax}{2d + 2f}.$$

Puis, oftant la feconde équation de la premiere ou de la troifiéme (car l'vn reuient à l'autre), & au lieu de z mettant les termes que ie viens de trouuer, i'ay par la premiere & la feconde :

$$aa + 2ax - bb - 2bx \infty dd - 2dz - ee + 2ey,$$

ou bien
$$2ey \infty ee + aa + 2ax - bb - 2bx - dd + dd - df + \frac{ccd - aad + 2cdx - 2adx}{d + f}$$

ou bien
$$y \infty \tfrac{1}{2} e - \frac{bb}{2e} - \frac{bx}{e} - \frac{df}{2e} + \frac{ccd + aaf + 2cdx + 2afx}{2ed + 2ef}.$$

Enfin, retournant à l'vne des trois premieres équations, & au lieu d'y ou de z mettant les quantitez qui leur font égales, & les quarrez de ces quantitez pour yy & zz, on trouue vne équation où il n'y a que x & xx inconnus ; de façon que le Probleme eft plan, & il n'eft plus befoin de paffer outre. Car le refte ne fert point pour cultiuer ou recréer l'efprit, mais feulement pour exercer la patience de quelque calculateur laborieux. Mefme i'ay peur de m'eftre rendu icy ennuyeux à Voftre Alteffe, pour ce que ie me fuis arrefté à écrire des chofes qu'elle fçauoit fans doute mieux que moy, & qui font faciles, mais qui font neantmoins les | clefs de mon Algebre. Ie la fupplie tres humblement de croire que c'eft la deuotion que i'ay à l'honorer, qui m'y a porté, & que ie fuis,

Madame,

De V. A.

Le tres-humble & tres-obeïffant
feruiteur, DESCARTES.

Newton

LA MÉTHODE DES FLUXIONS.

I. J'AI observé que les Géometres modernes ont la plupart négligé la Synthese des anciens, & qu'ils se sont appliqués principalement à cultiver l'Analyse; cette Methode les a mis en état de surmonter tant d'obstacles, qu'ils ont épuisé toutes les Spéculations de la Géometrie, à l'exception de la Quadrature des Courbes & de quelques autres matieres semblables, qui ne sont point encore discutées; cela joint à l'envie de faire plaisir aux jeunes Géometres, m'a engagé à composer le Traité suivant, dans lequel j'ai tâché de reculer encore les limites de l'Analyse, & de perfectionner la science des Lignes Courbes.

II. La grande conformité qui se trouve dans les Opérations litterales de l'Algebre, & dans les Opérations numeriques de l'Arithmetique; cette ressemblance ou analogie, qui seroit parfaite, si les Caracteres n'étoient pas differens, les premiers étant généraux & indéfinis, & les autres particuliers & définis, devoit naturellement nous conduire à en faire usage; & je ne puis qu'être étonné de ce que personne, à moins que vous ne vouliez excepter M. *Mercator*, *de Quadratura Hyperbolæ*, n'a songé à appliquer à l'Algebre la doctrine des Fractions Decimales, puisque cette application ouvre la route pour arriver à des découvertes plus importantes & plus difficiles. Mais, puisqu'en effet cette doctrine reduite en especes doit avoir avec l'Algebre la même relation que la doctrine des Nombres Decimaux se trouve avoir avec l'Arithmetique ordinaire, il suffit de sçavoir l'Arithmetique & l'Algebre, & d'observer la correspondance qui doit être entre les Fractions Decimales & les Termes Algebriques continués à l'infini, pour faire les Opérations de l'Addition, Soustraction, Multiplication, Division & Extraction de Racines dans cette nouvelle façon de calcul. Car comme dans les Nombres les places à droite diminuent en raison Decimale, ou Soudecuple, il en est respectivement de même dans les especes, lorsque les Termes sont disposés en Progression uniforme continuée à l'infini, suivant l'ordre des dimensions d'un Nominateur ou Dénominateur quelconque; & comme les Fractions Decimales ont l'avantage de transformer en quelque façon toutes les Fractions ordinaires & tous les Radicaux en Nombres entiers, de sorte que, lorsque ces Fractions & ces Nombres sourds sont reduits en Decimales, ils peuvent être traités comme des Nombres entiers; de même les suites infinies ont l'avantage de reduire à la classe des Quantités simples toutes les especes de Termes compliqués, tels que les Fractions dont les Dénominateurs sont des Quantités complexes, les Racines des Quantités composées ou des Equations affectées, & d'autres semblables; c'est-à-dire qu'elles donnent la commodité de pouvoir les exprimer par une suite infinie de Fractions, dont les Numerateurs & les Dénominateurs sont des Termes simples, ce qui applanit des difficultés, qui sous la forme ordinaire, auroient paru insurmontables. Je vais donc commencer par faire voir comment ces Reductions doivent se faire, ou ce qui est la même chose, comment une Quantité composée quelconque peut être reduite à des Termes simples, dans les cas sur-tout où la Methode de calculer ne se présente pas d'abord; j'appliquerai ensuite cette Analyse à la solution des Problêmes.

III. La Reduction par la Division & par l'Extraction des Racines se concevra clairement par les exemples suivans, en comparant les façons d'opérer en Nombres & en Especes.

Exemples de Reduction par la Division.

IV. La Fraction $\frac{aa}{b+x}$ étant proposée, Divises aa par $b+x$ de la maniere qui suit.

$$b+x)\,a^2+o\left(\frac{aa}{b}-\frac{aax}{b^2}+\frac{aax^2}{b^3}-\frac{aax^3}{b^4}+\frac{aax^4}{b^5},\ \&c.\right.$$

$$aa+\frac{aax}{b}$$

$$o-\frac{aax}{b}+o$$

$$-\frac{aax}{b}-\frac{aax^2}{b^2}$$

$$o+\frac{a^2x^2}{b^2}+o$$

$$+\frac{a^2x^2}{b^2}+\frac{a^2x^3}{b^3}$$

$$o-\frac{a^2x^3}{b^3}+o$$

$$-\frac{a^2x^3}{b^3}-\frac{a^2x^4}{b^4}$$

$$o+\frac{a^2x^4}{b^4},\ \&c.$$

Le Quotient est donc $\frac{aa}{b}-\frac{a^2x}{b^2}+\frac{a^2x^2}{b^3}-\frac{a^2x^3}{b^4}+\frac{a^2x^4}{b^5}$, &c. laquelle suite étant continuée à l'infini $=\frac{aa}{b+x}$. ou si l'on fait x le premier Terme du Diviseur de cette façon, $x+b\,(aa+o$, alors le Quotient sera $\frac{aa}{x}-\frac{aab}{x^2}+\frac{aab^2}{x^3}-\frac{aab^3}{x^4}$, &c. ce que l'on trouvera par la même maniere que ci-dessus.

V. De même la Fraction $\frac{1}{1+xx}$, se reduira à $1-x^2+x^4-x^6+x^8$, &c. ou bien à $x^{-2}-x^{-4}+x^{-6}-x^{-8}$, &c.

VI. Et la Fraction $\frac{2x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}-3x}$, se reduira à $2x^{\frac{1}{2}}-2x+7x^{\frac{3}{2}}-13x^2+34x^{\frac{5}{2}}$, &c.

VII. Il convient ici d'obſerver que je me ſers de x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, x^{-4}, &c. au lieu de $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^4}$, &c. de $x^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{3}{2}}$, $x^{\frac{5}{2}}$, $x^{\frac{1}{3}}$, $x^{\frac{2}{3}}$, &c. au lieu de $\sqrt{x}$, $\sqrt{x^3}$, $\sqrt{x^5}$, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[3]{x^2}$, & de $x^{-\frac{1}{2}}$, $x^{-\frac{2}{3}}$, $x^{-\frac{1}{4}}$, &c. au lieu de $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$, &c. Et cela par regle d'Analogie, comme on peut le concevoir par des Progreſſions Géometriques ſemblables à celles-ci, x^3, $x^{\frac{5}{2}}$, x^2, $x^{\frac{3}{2}}$, x, x^0 ou 1, $x^{-\frac{1}{2}}$, x^{-1}, $x^{-\frac{3}{2}}$, x^{-2}, &c.

VIII. Ainſi au lieu de $\frac{aa}{x} - \frac{aab}{x^2} + \frac{aab^2}{x^5}$, &c. on peut écrire $aax^{-1} - aabx^{-2} + aab^2x^{-5}$, &c.

IX. Et au lieu de $\sqrt{aa-xx}$, on peut écrire $\overline{aa-xx}|^{\frac{1}{2}}$, & $\overline{aa-xx}|^{2}$, au lieu du Quarré de $aa-xx$, & $\overline{\frac{abb-y^3}{by+yy}}\Big|^{\frac{1}{3}}$ au lieu de $\sqrt[3]{\frac{ab^2-y^3}{by+yy}}$, & ainſi des autres.

X. Ainſi il convient aſſez de diſtinguer les Puiſſances en Affirmatives, Négatives ; Entieres & Rompuës.

L' Hôpital

ANALYSE DES INFINIMENT PETITS.

PREMIERE PARTIE.

DU CALCUL DES DIFFERENCES.

SECTION PREMIERE.

Où l'on donne les regles de ce calcul.

DÉFINITION I.

ON appelle quantités *variables* celles qui augmentent ou diminuent continuellement; & au contraire quantités *constantes* celles qui demeurent les mêmes pendant que les autres changent. Ainsi dans une parabole les appliquées & les coupées sont des quantités variables, au lieu que le parametre est une quantité constante.

A

DÉFINITION II.

La portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminuë continuellement, en est appellée la *Différence*. Soit par exemple une ligne courbe quelconque *AMB*, qui ait pour axe ou diametre la ligne *AC*, & pour une de ses appliquées la droite *PM*; & soit une autre appliquée *pm* infiniment proche de la premiere. Cela posé, si l'on mene *MR* parallele à *AC*; les cordes *AM*, *Am*; & qu'on décrive du centre *A*, de l'intervalle *AM* le petit arc de cercle *MS*: *Pp* sera la différence de *AP*, *Rm* celle de *PM*, *Sm* celle de *AM*, & *Mm* celle de l'arc *AM*. De même le petit triangle *MAm* qui a pour base l'arc *Mm*, sera la différence du segment *AM*; & le petit espace *MPpm*, celle de l'espace compris par les droites *AP*, *PM*, & par l'arc *AM*.

FIG. I.

COROLLAIRE.

1. Il est évident que la différence d'une quantité constante est nulle ou zero: ou (ce qui est la même chose) que les quantités constantes n'ont point de différence.

AVERTISSEMENT.

On se servira dans la suite de la note ou caracteristique d *pour marquer la différence d'une quantité variable que l'on exprime par une seule lettre; & pour éviter la confusion, cette note* d *n'aura point d'autre usage dans la suite de ce calcul. Si l'on nomme par exemple les variables* AP, x; PM, y; AM, z; *l'arc* AM, u; *l'espace mixtiligne* APM, s; *& le segment* AM, t: dx *exprimera la valeur de* Pp, dy *celle de* Rm, dz *celle de* Sm, du *celle du petit arc* Mm, ds *celle du petit espace* MPpm, *&* dt *celle du petit triangle mixtiligne* MAm.

I. DEMANDE OU SUPPOSITION.

2. On demande qu'on puisse prendre indifferemment l'une pour l'autre deux quantités qui ne different entr'elles que d'une quantité infiniment petite: ou (ce qui est la même

chose) qu'une quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une autre quantité infiniment moindre qu'elle, puisse être considérée comme demeurant la même. On demande par exemple qu'on puisse prendre *Ap* pour *AP*, *pm* pour *PM*, l'espace *Apm* pour l'espace *APM*, le petit espace *MPpm* pour le petit rectangle *MPpR*, le petit secteur *AMm* pour le petit triangle *AMS*, l'angle *pAm* pour l'angle *PAM*, &c.

II. DEMANDE OU SUPPOSITION.

3. On demande qu'une ligne courbe puisse être considérée comme l'assemblage d'une infinité de lignes droites, chacune infiniment petite: ou (ce qui est la même chose) comme un poligône d'un nombre infini de côtés, chacun infiniment petit, lesquels déterminent par les angles qu'ils font entr'eux, la courbure de la ligne. On demande par exemple que la portion de courbe *Mm* & l'arc de cercle *MS* puissent être considérés comme des lignes droites à cause de leur infinie petitesse, en sorte que le petit triangle *mSM* puisse être censé rectiligne.

AVERTISSEMENT.

On suppose ordinairement dans la suite que les dernieres lettres de l'alphabet, z, y, x, *&c. marquent des quantités variables; & au contraire que les premieres* a, b, c, *&c. marquent des quantités constantes: de sorte que* x *devenant* x + dx; y, z, *&c. deviennent* y + dy, z + dz, *&c.* **Et* a, b, c, *&c. demeurent les mesmes* a, b, c, *&c.* * Art. 1.

PROPOSITION I.

Problême.

4. Prendre *la différence de plusieurs quantités ajoûtées ensemble, ou soustraites les unes des autres.*

Soit $a + x + y - z$ dont il faut prendre la différence. Si l'on suppose que x soit augmentée d'une portion infiniment petite; c'est-à-dire qu'elle devienne $x + dx$; y de-

Art. 1. viendra alors $y+dy$; & z, $z+dz$; pour la constante a,*elle demeurera la même a: de sorte que la quantité proposée $a+x+y-z$ deviendra $a+x+dx+y+dy-z-dz$; & sa différence, que l'on trouvera en la retranchant de cette derniere, sera $dx+dy-dz$. Il en est ainsi des autres; ce qui donne cette régle.

REGLE I.

Pour les quantités ajoûtées, ou soustraites.

On prendra la différence de chaque terme de la quantité proposée, & retenant les mêmes signes, on en composera une autre quantité qui sera la différence cherchée.

PROPOSITION II.

Problême.

5. PRENDRE *la différence d'un produit fait de plusieurs quantités multipliées les unes par les autres.*

1°. La différence de xy est $ydx+xdy$. Car y devient $y+dy$ lors que x devient $x+dx$, & partant xy devient alors $xy+ydx+xdy+dxdy$ qui est le produit de $x+dx$ par $y+dy$, & sa différence sera ydx
Art. 2. $+xdy+dxdy$, c'est-à-dire* $ydx+xdy$: puisque $dxdy$ est une quantité infiniment petite par rapport aux autres termes ydx, & xdy; car si l'on divise par exemple ydx & $dxdy$ par dx, on trouve d'une part y, & de l'autre dy qui en est la différence, & par conséquent infiniment moindre qu'elle. D'où il suit que la différence du produit de deux quantités est égale au produit de la différence de la premiere de ces quantités par la seconde, plus au produit de la différence de la seconde par la premiere.

2°. La différence de xyz est $yzdx+xzdy+xydz$. Car en considérant le produit xy comme une seule quantité, il faudra, comme l'on vient de prouver, prendre le produit de sa différence $ydx+xdy$ par la seconde z (ce qui donne $yzdx+xzdy$) plus le produit de la différence dz

de la seconde z par la premiere xy (ce qui donne $xydz$); & partant la différence de xyz sera $yzdx+xzdy+xydz$.

3°. La différence de $xyzu$ est $uyzdx+uxzdy+uxydz+xyzdu$. Ce qui se prouve comme dans le cas précédent en regardant le produit xyz comme une seule quantité. Il en est ainsi des autres à l'infini, d'où l'on forme cette régle.

REGLE II.

Pour les quantités multipliées.

La différence du produit de plusieurs quantités multipliées les unes par les autres, est égale à la somme des produits de la différence de chacune de ces quantités par le produit des autres.

Ainsi la différence de ax est $xo+adx$, c'est-à-dire adx. Celle de $\overline{a+x} \times \overline{b-y}$ est $bdx-ydx-ady-xdy$.

PROPOSITION III.

Problême.

6. PRENDRE *la différence d'une fraction quelconque.*

La différence de $\frac{x}{y}$ est $\frac{ydx-xdy}{yy}$. Car supposant $\frac{x}{y}=z$, on aura $x=yz$, & comme ces deux quantitez variables x & yz doivent toûjours être égales entr'elles, soit qu'elles augmentent ou diminuent, il s'ensuit que leur différence, c'est-à-dire leurs accroissemens ou diminutions seront aussi égales entr'elles; & partant*on aura $dx=ydz$ ** Art. 5.*
$+zdy$, & $dz=\frac{dx-zdy}{y}=\frac{ydx-xdy}{yy}$ en mettant pour z sa valeur $\frac{x}{y}$. Ce qu'il falloit, &c. d'où l'on forme cette regle.

REGLE III.

Pour les quantités divisées, ou pour les fractions.

La différence d'une fraction quelconque est égale au produit de la difference du numerateur par le dénominateur, moins le produit de la difference du dénominateur par le numerateur : le tout divisé par le quarré du dénominateur.

Ainsi la difference de $\frac{a}{x}$ sera $\frac{-adx}{xx}$, celle de $\frac{x}{a+x}$ sera $\frac{adx}{aa+2ax+xx}$.

PROPOSITION IV.

Problême.

7. PRENDRE *la difference d'une puissance quelconque parfaite ou imparfaite d'une quantité variable.*

Il est nécessaire afin de donner une régle générale qui serve pour les puissances parfaites & imparfaites, d'expliquer l'analogie qui se rencontre entre leurs exposans.

Si l'on propose une progression geométrique dont le premier terme soit l'unité, & le second une quantité quelconque x, & qu'on dispose par ordre sous chaque terme son exposant, il est clair que ces exposans formeront une progression arithmetique.

Prog. geom. $1, x, xx, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7$, &c.
Prog. arith. $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, &c.

Et si l'on continuë la progression geométrique au dessous de l'unité, & l'arithmetique au dessous de zero, les termes de celle-cy seront les exposans de ceux ausquels ils répondent dans l'autre. Ainsi -1 est l'exposant de $\frac{1}{x}$, -2 celuy de $\frac{1}{xx}$, &c.

Prog. geom. $x, 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{xx}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4}$, &c.
Prog. arith. $1, 0, -1, -2, -3, -4$, &c.

Mais si l'on introduit quelque nouveau terme dans la progression geométrique, il faudra pour avoir son exposant, en introduire un semblable dans l'arithmetique.

Ainsi $\sqrt{x}$ aura pour exposant $\frac{1}{2}$: $\sqrt[3]{x}$, $\frac{1}{3}$: $\sqrt[5]{x^4}$, $\frac{4}{5}$: $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$, $-\frac{3}{2}$: $\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$, $-\frac{5}{3}$: $\frac{1}{\sqrt{x^7}}$, $-\frac{7}{2}$: &c. de sorte que ces expres-

sions $\sqrt{x}$ & $x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{x}$ & $x^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[5]{x^4}$ & $x^{\frac{4}{5}}$, $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ & $x^{-\frac{3}{2}}$, &c. ne signifient que la même chose.

Prog. geom. $1, \sqrt{x}, x.\ 1, \sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{xx}, x.\ 1, \sqrt[5]{x}, \sqrt[5]{xx}, \sqrt[5]{x^3}, \sqrt[5]{x^4}, x.$
Prog. arith. $0, \frac{1}{2}, 1.\ 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1.\ 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1.$
Prog. geom. $\frac{1}{x}, \frac{1}{\sqrt{x^3}}, \frac{1}{xx}.\ \frac{1}{x}, \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}, \frac{1}{xx}.\ \frac{1}{x^3}, \frac{1}{\sqrt{x^7}}, \frac{1}{x^4}.$
Prog. arith. $-1, -\frac{3}{2}, -2.\ -1, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, -2.\ -3, -\frac{7}{2}, -4.$

Où l'on voit que de même que $\sqrt{x}$ est moyenne geométrique entre 1 & x, de même aussi $\frac{1}{2}$ est moyenne arithmetique entre leurs exposans zero & 1 : & de même que $\sqrt[3]{x}$ est la premiere des deux moyennes geométriquement proportionnelles entre 1 & x, de même aussi $\frac{1}{3}$ est la premiere des deux moyennes arithmetiquement proportionnelles entre leurs exposans zero & 1 : & il en est ainsi des autres. Or il suit de la nature de ces deux progressions.

1°. Que la somme des exposans de deux termes quelconques de la progression geométrique sera l'exposant du terme qui en est le produit. Ainsi x^{4+3} où x^7 est le produit de x^3 par x^4, & $x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$ où $x^{\frac{5}{6}}$ est le produit de $x^{\frac{1}{2}}$ par $x^{\frac{1}{3}}$, & $x^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}$ où $x^{-\frac{2}{15}}$ est le produit de $x^{-\frac{1}{3}}$ par $x^{\frac{1}{5}}$, &c. De même $x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}$ où $x^{\frac{2}{3}}$ est le produit de $x^{\frac{1}{3}}$ par luy même, c'est-à-dire son quarré, & x^{+2+2+2} où x^6 est le produit de x^2 par x^2 par x^2, c'est-à-dire son cube, & $x^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}$ ou $x^{-\frac{4}{3}}$ est la quatriéme puissance de $x^{-\frac{1}{3}}$, & il en est ainsi des autres puissances. D'où il est évident que le double, le triple, &c. de l'exposant d'un terme quelconque de la progression geométrique est l'exposant du quarré, du cube, &c. de ce terme ; & partant que la moitié, le tiers, &c. de l'exposant d'un terme quelconque de la progression geométrique sera l'exposant de la racine quarrée, cubique, &c. de ce terme.

2°. Que la difference des exposans de deux termes quelconques de la progression geométrique sera l'exposant du quotient de la division de ces termes. Ainsi $x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}}$ sera l'exposant du quotient de la division de $x^{\frac{1}{2}}$ par $x^{\frac{1}{3}}$, & $x^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} = x^{-\frac{7}{12}}$ sera l'exposant du quotient de la division de $x^{-\frac{1}{3}}$ par $x^{\frac{1}{4}}$; où l'on voit que c'est la même chose de multiplier $x^{-\frac{1}{3}}$ par $x^{-\frac{1}{4}}$ que de diviser $x^{-\frac{1}{3}}$ par $x^{\frac{1}{4}}$. Il en est ainsi des autres. Ceci bien entendu, il peut arriver deux différens cas.

Premier cas lorsque la puissance est parfaite, c'est-à-dire lorsque son exposant est un nombre entier. La différence de xx est $2xdx$, de x^3 est $3xxdx$, de x^4 est $4x^3dx$, &c. Car le quarré de x n'étant autre chose que le produit de x par x, sa différence* sera $xdx + xdx$, c'est-à-dire $2xdx$. De même le cube de x n'étant autre chose que le produit de x par x par x, sa différence* sera $xxdx + xxdx + xxdx$, c'est-à-dire $3xxdx$; & comme il en est ainsi des autres puissances à l'infini, il s'ensuit que si l'on suppose que m marque un nombre entier tel que l'on voudra, la différence de x^m sera $mx^{m-1}dx$.

* Art. 5.

Si l'exposant est négatif, on trouvera que la différence de x^{-m} ou de $\frac{1}{x^m}$ sera $\frac{-mx^{m-1}dx}{x^{2m}} = -mx^{-m-1}dx$.

Second cas, lorsque la puissance est imparfaite, c'est-à-dire lorsque son exposant est un nombre rompu. Soit proposé de prendre la différence de $\sqrt[n]{x^m}$ ou $x^{\frac{m}{n}}$ ($\frac{m}{n}$ exprime un nombre rompu quelconque) on supposera $x^{\frac{m}{n}} = z$, & en élevant chaque membre à la puissance n on aura $x^m = z^n$, & en prenant les différences comme l'on vient d'expliquer dans le premier cas, on trouvera $mx^{m-1}dx = nz^{n-1}dz$, & $dz = \frac{mx^{m-1}dx}{nz^{n-1}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx$, ou $\frac{m}{n}dx\sqrt[n]{x^{m-n}}$, en mettant à la place de nz^{n-1} sa valeur $nx^{m-\frac{m}{n}}$. Si l'exposant est négatif, on trouvera que la différence de $x^{-\frac{m}{n}}$ ou de $\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$ sera $\frac{-\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx}{x^{\frac{2m}{n}}} = -\frac{m}{n}x^{-\frac{m}{n}-1}dx$.

Ce

Ce qui donne cette regle générale.

REGLE IV.

Pour les puissances parfaites ou imparfaites.

La différence d'une puissance quelconque parfaite ou imparfaite d'une quantité variable, est égale au produit de l'exposant de cette puissance, par cette même quantité élevée à une puissance moindre d'une unité, & multipliée par sa différence.

Ainsi si l'on suppose que m exprime tel nombre entier ou rompu que l'on voudra, soit positif, soit négatif, & x une quantité variable quelconque, la différence de x^m sera toûjours $mx^{m-1}dx$.

EXEMPLES.

La différence du cube de $ay - xx$, c'est-à-dire de $\overline{ay - xx}^3$, est $3 \times \overline{ay - xx}^2 \times \overline{ady - 2xdx} = 3a^3yydy - 6aaxxydy + 3ax^4dy - 6aayyxdx + 12ayx^3dx - 6x^5dx$.

La différence de $\sqrt{xy + yy}$ ou de $\overline{xy + yy}^{\frac{1}{2}}$, est $\frac{1}{2} \times \overline{xy + yy}^{-\frac{1}{2}} \times \overline{ydx + xdy + 2ydy}$, ou $\frac{ydx + xdy + 2ydy}{2\sqrt{xy + yy}}$. Celle de $\sqrt{a^4 + axyy}$ ou de $\overline{a^4 + axyy}^{\frac{1}{2}}$, est $\frac{1}{2} \times \overline{a^4 + axyy}^{-\frac{1}{2}} \times \overline{ayydx + 2axydy}$, ou $\frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{a^4 + axyy}}$. Celle de $\sqrt[3]{ax + xx}$, ou de $\overline{ax + xx}^{\frac{1}{3}}$, est $\frac{1}{3} \times \overline{ax + xx}^{-\frac{2}{3}} \times \overline{adx + 2xdx}$, ou $\frac{adx + 2xdx}{3\sqrt[3]{\overline{ax + xx}^2}}$.

La différence de $\sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}$ ou de $\overline{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}^{\frac{1}{2}}$, est $\frac{1}{2} \times \overline{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}^{-\frac{1}{2}} \times \overline{adx + 2xdx + \frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{a^4 + axyy}}}$, ou $\frac{adx + 2xdx}{2\sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}} + \frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{a^4 + axyy} \times 2\sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}}$.

Art. 7. 6. La différence de $\frac{\sqrt[3]{ax+xx}}{\sqrt{xy+yy}}$ sera selon cette regle* & celle des fractions $\frac{\frac{adx+2xdx}{3\sqrt[3]{ax+xx}^2}\times\sqrt{xy+yy}\ \frac{-ydx-xdy-2ydy}{2\sqrt{xy+yy}}\times\sqrt[3]{ax+xx}}{xy+yy}$.

REMARQUE.

8. Il est à propos de bien remarquer que l'on a toûjours supposé en prenant les différences, qu'une des variables x croissant, les autres y, z, &c. croissoient aussi; c'est-à-dire que les x devenant $x+dx$, les y, z, &c. devenoient $y+dy$, $z+dz$, &c. C'est-pourquoy s'il arrive que quelques-unes diminüent pendant que les autres croissent, il en faudra regarder les différences comme des quantités négatives par rapport à celles des autres qu'on suppose croître, & changer par-conséquent les signes des termes où les différences de celles qui diminüent se rencontrent. Ainsi si l'on suppose que les x croissant, les y & les z diminüent, c'est-à-dire que les x devenant $x+dx$, les y & les z deviennent $y-dy$ & $z-dz$, & que l'on veüille prendre la différence du produit xyz; il faudra changer
Art. 5. dans la différence $xydz+xzdy+yzdx$ trouvée*, les signes des termes où dy & dz se rencontrent: ce qui donne $yzdx-xydz-xzdy$ pour la différence cherchée.

SECTION II.

Usage du calcul des différences pour trouver les Tangentes de toutes sortes de lignes courbes.

DÉFINITION.

SI l'on prolonge un des petits côtés Mm du poligone Fig. 2.
qui compose * une ligne courbe; ce petit côté ainsi * Art. 3.
prolongé sera appellé la *Tangente* de la courbe au point M ou m.

PROPOSITION I.

Problême.

9. SOIT *une ligne courbe* AM *telle que la relation de la coupée* AP *à l'appliquée* PM, *soit exprimée par une équation quelconque, & qu'il faille du point donné* M *sur cette courbe mener la tangente* MT. Fig. 3.

Ayant mené l'appliquée MP, & supposé que la droite MT qui rencontre le diametre au point T, soit la tangente cherchée; on concevra une autre appliquée mp infiniment proche de la premiere, avec une petite droite MR parallele à AP. Et en nommant les données AP, x; PM, y; (donc Pp ou $MR = dx$, & $Rm = dy$.) les triangles semblables mRM & MPT donneront $mR(dy).RM(dx :: MP(y).PT = \frac{ydx}{dy}$. Or par le moyen de la différence de l'équation donnée, on trouvera une valeur de dx en termes qui seront tous affectés par dy, laquelle étant multipliée par y & divisée par dy, donnera une valeur de la soutangente PT en termes entiérement connus & délivrés des différences, laquelle servira à mener la tangente cherchée MT.

REMARQUE.

10. LORSQUE le point T tombe du côté opposé au point A origine des x, il est clair que x croissant, y dimi- Fig. 4.

* Art. 8. nüe, & qu'il faut changer par-conſequent * dans la différence de l'équation donnée les ſignes de tous les termes où dy ſe rencontre : autrement la valeur de dx en dy ſeroit négative ; & partant auſſi celle de $PT\ (\frac{ydx}{dy})$. Il eſt mieux cependant, pour ne ſe point embaraſſer, de prendre toûjours la différence de l'équation donnée par les regles que l'on a preſcrites * ſans y rien changer ; car s'il arrive à la fin de l'opération que la valeur de PT ſoit poſitive, il s'enſuivra qu'il faudra prendre le point T du même côté que le point A origine des x, comme l'on a ſuppoſé en faiſant le calcul : & au contraire ſi elle eſt négative, il le faudra prendre du côté oppoſé. Ceci s'éclaircira par les exemples ſuivans.

* Sect. 1.

EXEMPLE I.

Fig. 3.

11. 1°. Si l'on veut que $ax = yy$ exprime la relation de AP à PM ; la courbe AM ſera une parabole qui aura pour paramétre la droite donnée a, & l'on aura en prenant de part & d'autre les différences, $adx = 2ydy$, & $dx = \frac{2ydy}{a}$ & $PT\ (\frac{ydx}{dy}) = \frac{2yy}{a} = 2x$ en mettant pour yy ſa valeur ax. D'où il ſuit que ſi l'on prend PT double de AP, & qu'on mene la droite MT, elle ſera tangente au point M. Ce qui étoit propoſé.

Fig. 4.

2°. Soit l'équation $aa = xy$ qui exprime la nature de l'hyperbole entre les aſymptotes. On aura en prenant les différences $xdy + ydx = 0$, & partant $PT\ (\frac{ydx}{dy}) = -x$. D'où il ſuit que ſi l'on prend $PT = PA$ du côté oppoſé au point A, & qu'on mene la droite MT, elle ſera la tangente en M.

3°. Soit l'équation générale $y^m = x$ qui exprime la nature de toutes les paraboles à l'infini lorſque l'expoſant m marque un nombre poſitif entier ou rompu, & de toutes les hyperpoles lorſqu'il marque un nombre négatif. On aura en prenant les différences $my^{m-1}dy = dx$, & partant $PT\ (\frac{ydx}{dy}) = my^m = mx$ en mettant pour y^m ſa valeur x.

Si $m = \frac{3}{2}$, l'équation ſera $y^3 = axx$ qui exprime la nature d'une des paraboles cubiques, & la ſoutangente $PT = \frac{3}{2}x$. Si $m = -2$, l'équation ſera $a^3 = xyy$ qui exprime la nature de l'une des hyperboles cubiques, & la ſoutangente $PT = -2x$. Il en eſt ainſi des autres.

Pour mener dans les paraboles la tangente au point A origine des x, il faut chercher quelle doit être la raiſon de dx à dy en ce point ; car il eſt viſible que cette raiſon étant connuë, l'angle que la tangente fait avec l'axe où le diametre, ſera auſſi déterminé. On a dans cet exemple $dx.\ dy :: my^{m-1}.\ 1$. D'où l'on voit que y étant zero en A, la raiſon de dy à dx doit y être infiniment grande lorſque m ſurpaſſe 1, & infiniment petite lorſqu'elle eſt moindre : c'eſt-à-dire que la tangente en A doit être parallele aux appliquées dans le premier cas, & ſe confondre avec le diametre dans le ſecond.

EXEMPLE II.

12. Soit une ligne courbe AMB telle que $AP \times PB$ Fig. 5.
$(x \times \overline{a-x}).\ \overline{PM}^2\ (yy) :: AB\ (a).\ AD\ (b)$. Donc $\frac{ayy}{b} = ax - xx$, & en prenant les différences, $\frac{2aydy}{b} = adx - 2xdx$, d'où l'on tire $PT\ (\frac{ydx}{dy}) = \frac{2ayy}{ab - 2bx} = \frac{2ax - 2xx}{a - 2x}$, en mettant pour $\frac{ayy}{b}$ ſa valeur $ax - xx$; & $PT - AP$ ou $AT = \frac{ax}{a - 2x}$.

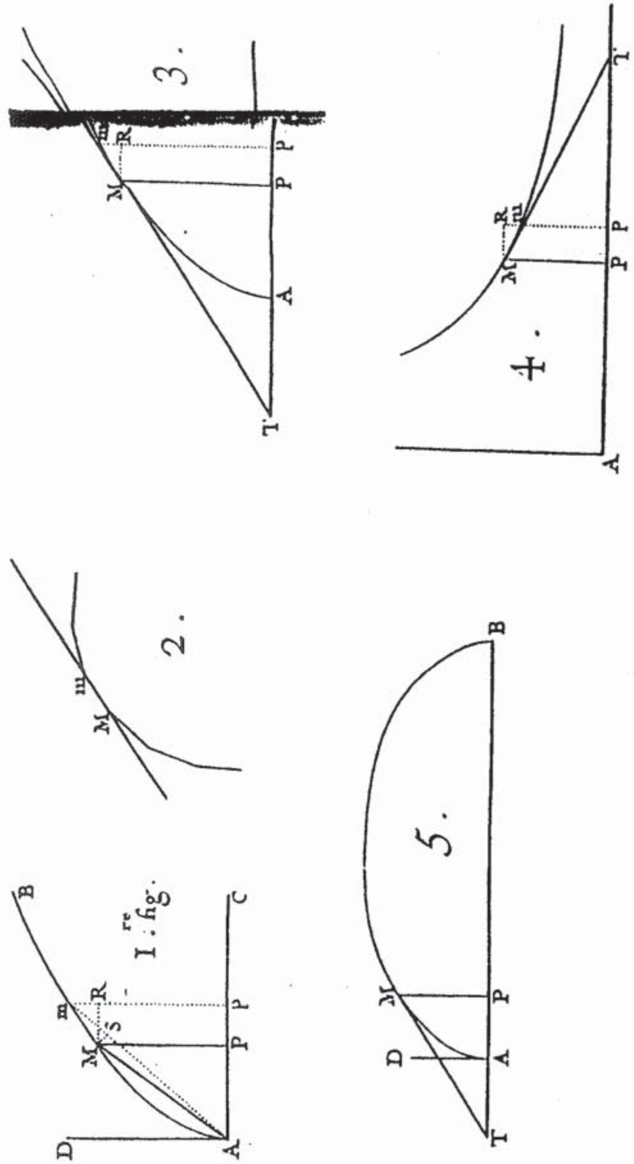
Suppoſant à préſent que $\overline{AP}^3 \times \overline{PB}^2\ (x^3 \times \overline{a-x}^2).\ \overline{PM}^5\ (y^5) :: AB\ (a).\ AD\ (b)$, on aura $\frac{ay^5}{b} = x^3 \times \overline{a-x}^2$, & en prenant les differences $\frac{5ay^4dy}{b} = 3xxdx \times \overline{a-x}^2 - \overline{2adx + 2xdx} \times x^3$, d'où l'on tire $\frac{ydx}{dy} = \frac{5x^3 \times \overline{a-x}^2}{3xx \times \overline{a-x}^2 - \overline{2a+2x} \times x^3} = \frac{5x \times \overline{a-x}}{3a - 3x - 2x}$ ou $\frac{5ax - 5xx}{3a - 5x}$ & $AT = \frac{2ax}{3a - 5x}$.

Et généralement si l'on veut que m marque l'exposant de la puissance de AP, & n celuy de la puissance de PB, on aura $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times \overline{a-x}^n$ qui est une équation générale pour toutes les ellipses à l'infini, dont la différence est $\frac{\overline{m+n}\,ay^{m+n-1}dy}{b} = mx^{m-1}dx \times \overline{a-x}^n - n\overline{a-x}^{n-1}dx \times x^m$, d'où l'on tire (en mettant pour $\frac{ay^{m+n}}{b}$ sa valeur $x^m \times \overline{a-x}^n$)

$$PT\left(\frac{ydx}{dy}\right) = \frac{\overline{m+n}\,x^m \times \overline{a-x}^n}{mx^{m-1} \times \overline{a-x}^n - n\overline{a-x}^{n-1} \times x^m} = \frac{\overline{m+n} \times x \times \overline{a-x}}{ma-x-nx},$$

ou $PT = \frac{\overline{m+n} \times \overline{ax-xx}}{ma-m-nx}$, & $AT = \frac{nax}{ma-m-nx}$.

[...]



G. W. Leibniz

Specimen novum analy[...]
infiniti circa summa[...]

[" Aperçu d'une nouvelle a[...]
la science de l'infini appl[...]
sommes et aux quadratu[...]

Acta eruditorum , mai

* *
*

nfinitésimal entre les *Différences* et les
é qu'en Algèbre entre les *Puissances* et les
Algèbre, science générale de la quantité
t d'*extraire les racines* des expressions, il
ii, de *trouver les sommes* des séries [20] ; or
de termes continûment croissants, élément
sont autres que des quadratures, autrement
la valeur des racines ne fait apparaître que
racines sont *pures*, mais lorsqu'elles
...es avec une certaine puissance dans l'expression qui en donne la valeur, elles sont *affectées* ; de la même manière, les expressions à sommer ou bien sont purement et simplement données, ou bien renferment elles-mêmes la somme cherchée [21], par exemple $dy = \frac{yxdx}{ax + yy}$ faisant intervenir la somme inconnue y dans le dy qu'il faut sommer. Dans les deux cas le problème délicat (problème que les notions en usage ne permettent pas de

résoudre) consiste à ramener les expressions affectées à des expressions pures, c'est-à-dire s'agissant du calcul infinitésimal, *ramener les équations différentielles* de degré quelconque (différentielles, différentio-différentielles, etc.) *à des quadratures*, et ainsi, en postulant ces dernières, à déterminer une courbe à partir d'une propriété de ses *tangentes* ou de ses *osculations* de tous ordres. Quant aux quadratures à leur tour, il serait essentiel, *c'est ce que je vais faire*, d'en ramener les plus complexes à d'autres plus simples. Voilà en quoi consiste l'analyse Tétragonistique dans laquelle j'ai fait, au bout de longues années, quelques progrès. Car à peine avais-je découvert ma Quadrature Arithmétique, en réduisant la quadrature du cercle à une quadrature rationnelle et en remarquant que la somme $\int \frac{dx}{1 + xx}$ dépend de la quadrature du cercle [22], j'ai très vite observé qu'une fois réduites à la sommation d'une expression rationnelle, toutes les quadratures peuvent du même coup se ramener en définitive à certains types de sommation très simples. Je vais montrer grâce à un procédé de Décomposition d'un genre nouveau pourquoi il doit toujours en être ainsi. Ce procédé consiste à *convertir un produit de facteurs en une Somme*, c'est-à-dire à transformer une fraction ayant un dénominateur de degré aussi élevé qu'on veut, égal à un produit de racines, en une somme de fractions ne possédant que des dénominateurs simples. Je nomme ici *rationnelle* toute quantité ou expression dans laquelle l'indéterminée, par exemple ici x, apparaît hors de tout radical [23], indépendamment du fait que les constantes soient rationnelles ou sourdes.

Soit une quelconque expression finie rationnelle :

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma xx + \partial x^3 + \ldots}{\lambda + \mu x + \xi xx + \pi x^3 + \ldots}$$

Une fois ôtés les termes non fractionnaires, je prétends pouvoir montrer qu'une telle expression est égale à une somme de fractions ayant pour Numérateur une constante, ne faisant pas intervenir x, et un dénominateur simple, c'est-à-dire toutes de la forme $\frac{a}{x + b}$. Voici comment nous pouvons y parvenir. Grâce à l'Algèbre je suppose connus, de quelque manière que ce soit, les diviseurs simples de toute expression rationnelle non fractionnaire, car ils ne sont ni plus ni

moins que les racines qu'on obtiendrait en considérant la formule comme une équation. Par exemple l'expression $xx - \frac{ax}{b} + ab$, a pour diviseurs $x - a$ et $x - b$ [24], et si cette formule était une équation, c'est-à-dire égale à 0, ces deux racines seraient elles-mêmes égales à 0, x vaudrait donc a ou b [25]. Ainsi en admettant la résolution Algébrique des équations, nous disposons des diviseurs des formules ; mon Analyse infinitésimale suppose l'Analyse Algébrique comme le supérieur suppose l'inférieur [26]. Soit au dénominateur l'expression :

$\pi x^3 + \xi xx + \mu x + \lambda$, ou une autre plus élevée ; en la divisant au besoin par π nous obtiendrons $x^3 + \frac{\xi}{\pi} xx + \frac{\mu}{\pi} x + \frac{\lambda}{\pi}$. Supposons que ses diviseurs soient $x + b$, $x + c$, $x + d$ etc. que j'appelle en abrégé *l*, m, n etc. Nous pourrons donc décomposer la fraction de départ

$$\frac{\frac{\alpha}{\pi} + \frac{\beta x}{\pi} + \frac{\gamma xx}{\pi} + \frac{\partial x}{\pi}}{x^3 + \frac{\xi}{\pi} xx + \frac{\mu}{\pi} x + \frac{\lambda}{\pi}}$$

en les fractions suivantes $\frac{\alpha:\pi}{lmn} + \frac{\beta x:\pi}{lmn} + \frac{\gamma xx:\pi}{lmn} + \frac{\partial x^3:\pi}{lmn}$.

Or je dis qu'elles peuvent toutes se réduire à une fraction semblable à la première $\frac{\alpha:\pi}{lmn}$. Commençons par décomposer celle-ci, je montrerai ensuite comment les autres s'y ramènent.

En négligeant la constante du Numérateur, qui ne change rien aux sommations, tâchons de décomposer les fractions $\frac{1}{lm}$, $\frac{1}{lmn}$, $\frac{1}{lmnp}$

etc., et plus généralement $\frac{1}{lmnpq}$, avec comme je l'ai dit, $l = x + b$, $m = x + c$, $n = x + d$, $p = x + e$, $q = x + f$, ainsi de suite. Cela posé, j'ai obtenu, comme chacun pourra aisément le démontrer en faisant le calcul [27] :

$$\frac{1}{lm} = \frac{1}{(c-b)l} + \frac{1}{(b-c)m}$$

$$\frac{1}{lmn} = \frac{1}{(c-b)(d-b)l} + \frac{1}{(b-c)(d-c)m} + \frac{1}{(b-d)(c-d)n}$$

$$\frac{1}{lmnp} = \frac{1}{(c-b)(d-b)(e-b)l} + \frac{1}{(b-c)(d-c)(e-c)m} + \frac{1}{(b-d)(c-d)(e-d)n} + \frac{1}{(b-e)(c-e)(d-e)p}$$

et ainsi de suite. En effet la progression uniforme et régulière à l'infini saute aux yeux. Il suffit de traiter par exemple le premier cas, et chacun pourra s'en convaincre aisément en en faisant l'essai :

$$\frac{1}{(c-b)l} + \frac{1}{(-b-c)m} = \frac{bm - cm + cl - bl}{2bc - bb - cclm}.$$

En remplaçant alors au numérateur l et m par leurs valeurs $x + b$ et $x + c$, il viendra :

$bm - cm + cl - bl = bx + bc - cx - cc + cx + cb - bx - bb =$ (puisque les termes où figure l'indéterminée x s'éliminent)

$2bc - bb - cc$; nous aurons donc :

$$\frac{bm - cm + cl - bl}{(2bc - bb - cc)lm} = \frac{2bc - bb - cc}{(2bc - bb - cc)lm} = \frac{1}{lm}$$ comme je l'avançais. Je dois à présent ramener toutes les Fractions $\frac{x}{lmn\ldots}$, $\frac{xx}{lmn\ldots}$, $\frac{x^3}{lmn\ldots}$ dont le numérateur n'est pas une constante, à des fractions ayant un numérateur du même type que $\frac{a}{lmn}$. J'ai donc trouvé les *Règles universelles pour réduire les Fractions à Numérateurs non constants ne comportant pas de valeurs entières de la variable, à des Fractions à numérateur constant.*

$l = x + b$, $m = x + c$, $n = x + d$, $p = x + e \ldots$

$$\frac{x}{l\ldots} = \frac{1}{\ldots} - \frac{b}{l\ldots}$$

$$\frac{xx}{lm\ldots} = \frac{1}{\ldots} - \frac{b+c}{m} + \frac{bb}{lm\ldots}$$

$$\frac{x^3}{lmn} = \frac{1}{\ldots} - \frac{b+c+d}{n\ldots} + \frac{bb+cc+bc}{mn\ldots} - \frac{b^3}{lmn\ldots}$$

$$\frac{x^4}{lmnp\ldots} = \frac{1}{\ldots} - \frac{(b+c+d+e)}{p\ldots} + \frac{(bb+cc+dd+bc+bd+cd)}{np\ldots} - \frac{b^3+c^3+bbc+bcc}{mnp\ldots} + \frac{b^4}{lmnp\ldots}$$

Les points … représentent les lettres manquantes, nous pouvons donc quand il le faut les remplacer par celles-ci. Par exemple si $\frac{x}{l\ldots}$ est mis pour $\frac{x}{lmn}$, au lieu de $\frac{x}{l\ldots} = \frac{1}{\ldots} - \frac{b}{l\ldots}$ nous aurons

$$\frac{x}{lmn} = \frac{1}{mn} - \frac{b}{lmn}.$$

Séries donnant les Règles pour décomposer les fractions à Numérateur non constant, comportant des valeurs entières de la variable, en leurs valeurs entières et en Fractions à Numérateur constant.

$$\frac{xx}{l} = x - b + \frac{bb}{l}$$

$$\frac{x^3}{lm} = x - \frac{b+c}{l} + \frac{bb+cc+bc}{m} - \frac{b^3}{lm}$$

$$\frac{x^4}{lmn} = x - \frac{b+c+d}{l} + \frac{bb+cc+dd+bc+bd+cd}{n} - \frac{b^3+c^3+bcc+bbc}{mn} + \frac{b^4}{lmn}$$

$$\frac{x^3}{l} = xx - bx + bb - \frac{b^3}{l}$$

$$\frac{x^4}{lm} = xx - \frac{b+c}{l}x + \frac{bb+cc+bc}{l} - \frac{b^3+c^3+bcc+bbc}{m} + \frac{b^4}{lm}$$

La progression à l'infini dans chaque série et des séries entre elles est évidente, surtout si nous les disposons en colonnes. Dans chaque terme, le Numérateur constant est la Formule complète de toutes les combinaisons de lettres pour un degré déterminé, formule d'autant plus simple qu'elle n'est assortie d'aucun coefficient. Ainsi bb+cc+dd+bd+bc+cd est la formule complète du second degré, formée des lettres b, c, d, sans coefficients, elle est donc égale à la somme de leurs carrés et de leurs produits, qui est une constante.

Si nous voulons remplacer l, m, n, p etc. par leurs valeurs x + b, x + c, x + d, x + e, etc. les Théorèmes précédents demeurent valables, comme le montrent les exemples suivants :

$$\frac{1}{x^4 + bx^3 + bcxx + bcdx + bcde} \qquad \text{est égal à :}$$
$$\begin{array}{ccc} c & bd & bce \\ d & be & bde \\ e & cd & cde \\ & ce & \\ & de & \end{array}$$

$$\frac{1}{(c-b)(d-b)(e-b)(x+b)} + \frac{1}{(b-c)(d-c)(e-c)(x+c)} + \frac{1}{(b-d)(c-d)(e-d)(x+d)} + \frac{1}{(b-e)(c-e)(d-e)(x+e)}$$

Et $\dfrac{x^3}{x^4 + bx^3 + bcxx + bcdx + bcde}$ est égal à :

$$\begin{array}{ccc} c & bd & bce \\ d & be & bde \\ e & cd & cde \\ & ce & \\ & de & \end{array}$$

$$\frac{1}{x+e} - \frac{b+c+d}{xx+dx+de} + \frac{bb+cc+bc}{x^3+cxx+cdx+cde}$$
$$\begin{array}{ccc} e & d & ce \\ & e & de \end{array}$$

$$-\frac{b^3}{x^4 + bx^3 + bcxx + bcdx + bcde}$$
$$\begin{array}{ccc} c & bd & bce \\ d & be & bde \\ e & cd & cde \\ & ce & \\ & de & \end{array}$$

Resterait, mais ce serait trop long ici, à décomposer chaque fraction semblable à celle du deuxième exemple, à l'exprimer à son tour en fractions simples, semblables à celles du premier, et à donner ainsi une nouvelle série de Théorèmes exprimant les fractions du type $\frac{x}{lmnp}$, $\frac{xx}{lmnp}$, $\frac{x^3}{lmnp}$ en une somme de fractions simples, comme nous l'avons fait pour $\frac{1}{lmnp}$.

Tout ceci montre donc bien que nous pouvons décomposer n'importe quelle Fraction Rationnelle en Fractions rationnelles simples à Numérateur constant, rationnelles s'entend par rapport à la variable x qui ne doit pas apparaître sous un radical. Ainsi, si nous devions décomposer une fraction comme $\frac{2xx + x\sqrt{2} + \sqrt{5}}{xx + 2x + \sqrt{3}}$, ou l'une des fractions simples apparaissant au cours de cette décomposition, par exemple $\frac{\sqrt{2}}{x+\sqrt{3}}$, nous les considérons dans une Analyse de ce type comme des fractions rationnelles, puisque l'Analyse des sommations ne se soucie pas des irrationalités qui n'enveloppent pas les variables. Ce en quoi la réduction des grandeurs irrationnelles en rationnelles est ici plus aisée que dans le Calcul *Diophantien* des Nombres Figurés. Il en résulte que même si les Racines sont irrationnelles, pourvu qu'elles soient réelles et non imaginaires, lorsqu'on fait la somme de Séries Numériques rationnelles de degré déterminé, c'est-à-dire où la variable n'apparaît pas dans l'exposant, nous pouvons toujours nous ramener à une somme de nombres en progression Harmonique ou de leurs puissances. Ou encore, lorsque ces dernières s'éliminent, nous parvenons à une constante, c'est-à-dire à une somme absolue, ou du moins à une série de termes non fractionnaires que nous pouvons toujours sommer au moyen de termes rationnels de degré déterminé [28], en considérant une partie finie de la série [29]. Par ailleurs, lorsque nous sommons des séries d'ordonnées rationnelles, autrement dit dans les quadratures de Figures algébriques rationnelles, nous pouvons toujours tout ramener, lorsque les racines sont réelles, à la Quadrature de l'Hyperbole. Par conséquent (pour traiter d'abord ce cas), dans la sommation des séries Numériques, le problème revient à faire la somme de tous les $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{yy}$ ou $\frac{1}{y^3}$ etc., avec $y = x + e$, $x + 2$, $x + \sqrt{3}$ ou autre. Car si x vaut 1, 2, 3 etc. et si e représente la constante 2, la série des nombres $\frac{1}{x+e}$ c'est-à-dire la série des $\frac{1}{y}$ sera $\frac{1}{1+2}$, $\frac{1}{2+2}$, $\frac{1}{3+2}$, $\frac{1}{4+2}$ etc. Si au contraire x vaut 1, 3, 5, 7 etc., et la constante e $\sqrt{3}$, la série de tous les $\frac{1}{y}$ sera alors $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$, $\frac{1}{3+\sqrt{3}}$, $\frac{1}{5+\sqrt{3}}$, $\frac{1}{7+\sqrt{3}}$ etc., c'est-à-dire que si x et y sont en progression Arithmétique, naturelle ou non, les $\frac{1}{y}$ seront en progression harmonique et donc $\int\frac{dy}{y}$ sera une somme de Nombres en progression

Harmonique, tandis que $\int\frac{dy}{yy}$ et $\int\frac{dy}{y^3}$ etc. seront les sommes de termes d'une progression Harmonique élevés à une certaine puissance. Tels sont les résultats obtenus lorsqu'il s'agit de sommer des séries numériques rationnelles de degré déterminé, finies ou éventuellement infinies, et que l'expression fractionnaire ne comporte que des racines réelles. Or, même si une série Harmonique comportant une infinité de termes est également de grandeur infinie, et par conséquent ne peut être sommée (à l'inverse des séries de termes harmoniques élevés à une puissance) [30], il peut arriver que la différence entre deux séries en progression harmonique même infinies, constitue une quantité finie. Et, ce que je trouve remarquable, lorsque nous tombons sur une somme tout achevée, sans avoir à sommer ni termes harmoniques ni leurs puissances, mon analyse permet d'éliminer les séries harmoniques ou autres séries plus incommodes, et de faire apparaître directement la somme. Prenons par exemple la série

$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}$ etc. en totalité à l'infini, c'est-à-dire $\int\frac{dx}{xx-1}$ avec x = 2, 3, 4 etc., et ici dx = 1, nous pouvons en faire la somme. Dans les séries Numériques en effet les différences sont assignables. En appliquant la règle que j'ai donnée $\frac{1}{xx-1}$ (qui est de la forme $\frac{1}{lm}$ avec $l = x + 1$ et $m = x - 1$, donc b égal à 1 et c à -1), sera

$$\frac{1}{-2(x+1)}+\frac{1}{2(x-1)} \text{ soit } \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right);$$

or $\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}$ est égal à $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\text{ etc.}\right)$ et $-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}$ est égal à $\frac{1}{2}\left(\ldots-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\text{ etc.}\right)$ par conséquent $\int\frac{dx}{xx-1}$ sera égal à $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$.

Nous obtiendrons finalement $\frac{3}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35}$ + etc. Je me souviens avoir déjà donné autrefois cette sommation en même temps que ma Quadrature Arithmétique. Une méthode semblable permet de découvrir les autres sommes de séries rationnelles de degré déterminé, décomposables en termes réels, ou de les ramener à des séries harmoniques et à leurs puissances. Je vais parler dans un instant de la décomposition imaginaire, tout aussi utile. Nous pouvons même souvent procéder de manière semblable pour les séries rationnelles de degré indéterminé.

Supposons à présent que x et y ne soient plus des termes discrets mais continus, c'est-à-dire non plus des nombres séparés par une distance assignable, mais des segments d'abscisse continûment croissants, élément par élément, autrement dit croissants par intervalles inassignables, de sorte que leur série constitue une figure. Il est clair que de la même façon, toutes les sommes de fractions rationnelles de degré constant, c'est-à-dire toutes les Quadratures de figures rationnelles Algébriques, à supposer que les *Racines* du dénominateur soient *réelles*, peuvent être soit établies complètement soit reconduites à la Quadrature de l'Hyperbole. Car en dehors des sommes de termes non fractionnaires comme $\int dx$, $\int xdx$, $\int xxdx$ etc., nous sommes conduits à des sommations simples, comme $\int \frac{dy}{y}$, $\int \frac{dy}{yy}$, $\int \frac{dy}{y^3}$ etc., avec $y = x + e$; or nous pouvons toujours calculer des quadratures telles que $\int \frac{dy}{yy}$, $\int \frac{dy}{y^3}$ etc., il ne subsiste donc plus que $\int \frac{dy}{y}$, soit la Quadrature de l'Hyperbole. Mais à vrai dire la Nature, mère des diversités éternelles, ou plutôt l'esprit Divin, sont trop jaloux de leur merveilleuse variété pour permettre qu'un seul et même modèle puisse dépeindre toutes choses. C'est pourquoi ils ont inventé cet expédient élégant et admirable, ce miracle de l'Analyse, prodige du monde des idées, objet presque amphibie entre l'Etre et le Non-être, que nous appelons racine imaginaire [31]. Ainsi chaque fois que le dénominateur

d'une Fraction Rationnelle admet des racines imaginaires, ce qui peut arriver de quantité de façons, l'Hyperbole dont on devrait connaître la Quadrature, deviendrait elle aussi imaginaire, et il n'y aurait aucun moyen de la construire. Mais toutes les Racines imaginaires possèdent leurs propres symétriques [32], car elles apparaissent lorsqu'on extrait une racine carrée, or toute extraction d'une racine carrée est double, et son signe $\sqrt[2]{\ldots}$ peut être précédé de + ou de – ; par conséquent lorsqu'on multiplie comme il faut deux racines imaginaires, on obtient un produit réel, qui sera ou bien le dénominateur lui-même, auquel cas (lorsque la fraction a été réduite à un numérateur constant et qu'on a éliminé par exemple le second terme dans l'Expression du dénominateur) [33] la quadrature ne peut pas être décomposée plus simplement, ou bien un diviseur réel du dénominateur, permettant de ramener la quadrature cherchée à une autre plus simple, de même type que celle du cercle. Soit par exemple la fraction $\frac{1}{x^4 - 1}$, les racines du dénominateur sont de toute évidence $x + 1$, $x - 1$, $x + \sqrt{-1}$, $x - \sqrt{-1}$, leur produit fait $x^4 - 1$, et en appliquant notre méthode :

$$+ \frac{1}{(-1-1)(+\sqrt{-1}-1)(-\sqrt{-1}-1)(x+1)}$$

$$+ \frac{1}{(+1+1)(+\sqrt{-1}+1)(-\sqrt{-1}+1)(x-1)}$$

$$+ \frac{1}{(+1-\sqrt{-1})(-1-\sqrt{-1})(-\sqrt{-1}-\sqrt{-1})(x+\sqrt{-1})}$$

$$+ \frac{1}{(+1+\sqrt{-1})(-1+\sqrt{-1})(+\sqrt{-1}+\sqrt{-1})(x-\sqrt{-1})} =$$

$$\frac{1}{x^4 - 1} =$$

$$- \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4\sqrt{-1}(x+\sqrt{-1})} - \frac{1}{4\sqrt{-1}(x-\sqrt{-1})}$$

où $\int\frac{dx}{x+1}$ et $\int\frac{dx}{x-1}$ ressortissent à la Quadrature de l'Hyperbole, tandis que $\int\frac{dx}{x\sqrt{-1}-1}$ et $\int\frac{dx}{x\sqrt{-1}+1}$ ne peuvent être rapportées qu'à une Hyperbole imaginaire. En regroupant entre elles autant de racines imaginaires qu'il le faut pour obtenir une expression réelle [34], c'est-à-dire ici en faisant la somme des deux dernières fractions, à savoir : $\frac{1}{4x\sqrt{-1}-4}-\frac{1}{4x\sqrt{-1}+4}$, nous obtiendrons $\frac{4(x\sqrt{-1}+1-x\sqrt{-1}+1)}{4(x\sqrt{-1}-1)4(x\sqrt{-1}+1)}$ soit $-\frac{1}{2(xx+1)}$. Si nous voulions de la même façon additionner $-\frac{1}{4(x+1)}$ et $\frac{1}{4(x-1)}$ nous obtiendrions $\frac{1}{2(xx-1)}$, et en additionnant $\frac{1}{2(xx-1)}-\frac{1}{2(xx+1)}$ nous retrouverions $\frac{1}{x^4-1}$ qui est donc égal à :

$\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{2(xx+1)}$. Il est donc clair que $\int\frac{dx}{x^4-1}$ et par suite $\int\frac{dx}{1-x^4}$ dépendent en même temps de la Quadrature de l'Hyperbole et de celle du Cercle. Il était déjà bien connu que $\int\frac{dx}{x-1}$ et $\int\frac{dx}{x+1}$, donc également $\int\frac{dx}{xx-1}$ se rattachaient à la Quadrature de l'Hyperbole ; mais je fus le premier à découvrir, en même temps que ma Quadrature Arithmétique, que $\int\frac{dx}{xx+1}$ se rapportait à la Quadrature du Cercle, j'en ai déduit le Théorème publié dans les commencements des Actes de Leipzig : si le diamètre a pour carré 1, l'Aire du Cercle est $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$ etc. Il résulte de tout ceci que lorsque le Dénominateur intervenant dans l'ordonnée a des diviseurs réels du premier degré de la forme x+e, toutes les quadratures de Figures Algébriques rationnelles peuvent se ramener à celle de l'Hyperbole, en revanche lorsque le dénominateur a des diviseurs réels

plans, c'est-à-dire du second degré (qui naturellement sont eux-mêmes dépourvus de racines réelles, sinon elles conduiraient à des quadratures directes), de la forme $xx + fx + ag$, ou, après élimination du second terme, $xx \pm ae$, la quadrature dépend de la Quadrature de l'Hyperbole, de celle du cercle, ou de l'une et l'autre.

Nous sommes donc logiquement conduits à la Question la plus importante : toutes les Quadratures rationnelles peuvent-elles se ramener à celle de l'Hyperbole et du Cercle, question qui dans l'Analyse que je suis en train de mener, peut se formuler ainsi : toute Equation Algébrique, autrement dit, toute expression réelle entière, rationnelle par rapport à l'indéterminée peut-elle se décomposer en diviseurs réels simples ou plans ? Or j'ai compris qu'en jugeant qu'il en va ainsi nous restreindrions abusivement les richesses de la nature. Par exemple en multipliant $\frac{1}{xx+aa\sqrt{-1}}$ par $\frac{1}{xx-aa\sqrt{-1}}$ nous obtiendrons $\frac{1}{x^4+a^4}$, le dénominateur a bien une expression réelle, mais en décomposant cette formule nous n'aboutissons pas à des diviseurs réels plans, car la décomposition de $xx\text{-}aa\sqrt{-1}$ est $x+a\sqrt{\sqrt{-1}}$ et $x-a\sqrt{\sqrt{-1}}$ et celle de $xx+aa\sqrt{-1}$ est $x+a\sqrt{-\sqrt{-1}}$ et $x-a\sqrt{-\sqrt{-1}}$. En multipliant

$x+a\sqrt{\sqrt{-1}},\ x-a\sqrt{\sqrt{-1}},\ x+a\sqrt{-\sqrt{-1}},\ x-a\sqrt{-\sqrt{-1}}$

nous retrouvons donc bien l'expression x^4+a^4, mais de quelque façon que nous combinions deux de ces quatre racines, nous ne pouvons jamais faire que leur produit donne une quantité réelle, soit un diviseur réel plan [35]. Ainsi mon analyse ne parvient à rattacher $\int\frac{dx}{x^4+a^4}$ ni à la quadrature du Cercle ni à celle de l'Hyperbole, et cette quadrature pose le principe d'une nouvelle quadrature originale. Néanmoins (je me rappelle avoir été déjà conduit à cette idée) tout comme la Quadrature de l'Hyperbole $\int\frac{dx}{x+a}$, c'est une chose bien connue, fournit les

Logarithmes, autrement dit la *Section du rapport*, et $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$ la *Section de l'Angle*, j'espère que nous pourrons continuer cette progression et établir à quels problèmes correspondent

$$\int \frac{dx}{x^4 + a^4}, \int \frac{dx}{x^8 + a^8}, \text{ etc.}$$

Notons en passant que les $\int \frac{x^{e-1}.dx}{x^{2e} \pm a^{2e}}$, par exemple $\int \frac{x.dx}{x^4 \pm a^4}$, $\int \frac{xx.dx}{x^6 \pm a^6}$ et $\int \frac{x^3.dx}{x^8 \pm a^8}$, ainsi de suite, dépendent de la Quadrature de Cercle si $\pm$ représente un +, et de la Quadrature de l'Hyperbole s'il représente un –; on le voit aisément quand on est familier du calcul différentiel, bien qu'on puisse également le déduire de l'Analyse que je viens d'exposer [36].

Pour l'essentiel il ne reste donc plus qu'à chercher si nous pouvons ramener, et de quelle manière, les Figures ayant des ordonnées irrationnelles à d'autres rationnelles, isométriques [37] (c'est-à-dire telles que la connaissance de la quadrature de l'une fournisse, directement ou par l'intermédiaire d'un rapport, la quadrature de l'autre) et les soumettre à mon Analyse. J'ai fait en cette voie de nombreuses tentatives, non sans résultats, néanmoins je n'oserais rien promettre de suffisamment général ni d'extraordinaire et à dire vrai je n'ai pas eu le temps de traiter la question comme elle le méritait. C'est la raison pour laquelle j'avais différé la publication de ma Méthode, jusqu'à ce que j'eusse le loisir de progresser davantage dans la réduction des sommations irrationnelles aux sommations rationnelles, et je réservais la totalité de cette théorie pour mon ouvrage sur la *Science de l'Infini*. Mais je me rendais compte que ce délai retardait les progrès de la science et que je ne pouvais toujours pas bien disposer de mon temps, j'ai donc préféré œuvrer à l'intérêt commun, avec l'espoir que d'autres étendraient les germes de ma nouvelle théorie et en récolteraient des fruits plus vermeils que moi, surtout s'ils s'attachaient plus sérieusement qu'on ne l'a fait jusqu'ici à développer

l'Algèbre *Diophantienne* [38], pratiquement abandonnée par les disciples de *Descartes* qui n'en distinguaient guère l'usage en Géométrie. Quant à moi, au contraire, je me souviens avoir plusieurs fois indiqué (ce qui pouvait paraître surprenant) que les progrès de notre Analyse infinitésimale sur le chapitre des quadratures, dépendaient en grande partie des progrès de l'Arithmétique que Diophante fut, si je ne m'abuse, le premier à aborder dans ses ouvrages. Et j'espère que ce que je viens d'exposer, en montrant pourquoi il fallait lui faire confiance, rendra plus convaincante mon exhortation à poursuivre en cette voie.

L. EULER : Text

INTRODUCTION

A

L'ANALYSE INFINITÉSIMALE.

LIVRE PREMIER,

CONTENANT l'Explication des diverses sortes de Fonctions, leur résolution en Facteurs & leur développement en Séries infinies; avec la théorie des Logarithmes, celle des Arcs de cercle, de leurs Sinus & de leurs Tangentes, & plusieurs autres Questions propres à faciliter l'étude de l'Analyse infinitésimale.

CHAPITRE PREMIER.

Des Fonctions en général.

1. *Une quantité constante est une quantité déterminée, qui conserve toujours la même valeur.*

Tels sont les nombres de toute espece, qui conservent constamment la valeur qu'ils ont une fois obtenue. Lorsqu'il s'agit de représenter ces sortes de quantités par des caractères, on se sert des premieres lettres de l'Alphabet a, b, c, &c. A la vérité, dans l'Analyse ordinaire qui n'a pour objet que des quantités déterminées, on désigne ordinairement celles qui sont connues par les premieres lettres de l'Alphabet, & celles qui ne le sont pas, par les dernieres; mais c'est une distinction à laquelle on a moins égard dans la haute Géométrie; on y envisage les quantités sous un autre aspect particulier, les unes étant conſidérées comme conſtantes, & les autres comme variables.

2. *Une quantité variable eſt une quantité indéterminée, ou, ſi l'on veut, une quantité univerſelle, qui comprend toutes les valeurs déterminées.*

Une valeur déterminée quelconque pouvant être exprimée en nombre, il s'enſuit qu'une quantité variable comprend tous les nombres de quelque nature qu'ils ſoient. Il en eſt de la quantité variable, comme du genre & de l'eſpece à l'égard des individus ; on peut la concevoir comme embraſſant toutes les quantités déterminées. Au reſte, on a coutume de repréſenter les quantités variables par les dernieres lettres de l'Alphabet z, y, x, &c.

3. *Une quantité variable devient déterminée, lorſqu'on lui attribue une valeur déterminée quelconque.*

Elle peut donc le devenir d'une infinité de manieres, puiſqu'on peut lui ſubſtituer tous les nombres imaginables. La ſignification d'une quantité variable ne peut être cenſée épuiſée, qu'autant qu'on aura conçu en ſa place toutes les valeurs déterminées. Ainſi une telle quantité comprend tous les nombres tant poſitifs que négatifs, les nombres entiers & fractionnaires, ceux qui ſont rationnels, irrationnels & tranſcendants ; on ne doit pas même en exclure zéro, ni les nombres imaginaires.

4. *Une fonction de quantité variable eſt une expreſſion analytique compoſée, de quelque maniere que ce ſoit, de cette même quantité & de nombres, ou de quantités conſtantes.*

Ainſi toute expreſſion analytique, qui outre la variable z contiendra des quantités conſtantes, eſt une fonction de z. Par exemple, $a + 3z$; $az - 4zz$; $az + b\sqrt{aa - zz}$; c^z; &c, ſont des fonctions de z.

5. *Une fonction de variable eſt donc auſſi une quantité variable.*

En effet, comme on peut mettre à la place de la variable toutes les valeurs déterminées, la fonction recevra elle-même

une infinité de valeurs, & il eſt impoſſible d'en concevoir aucune, dont elle ne ſoit ſuſceptible, puiſque la variable comprend même les valeurs imaginaires. Par exemple, quoique cette fonction $\sqrt{(9 - zz)}$ ne puiſſe donner un nombre plus grand que 3, tant qu'on mettra des nombres réels à la place de z ; cependant, en introduiſant pour z des nombres imaginaires, tels que $5\sqrt{-1}$, il n'eſt pas poſſible d'aſſigner une valeur déterminée, qui ne puiſſe être déduite de la formule $\sqrt{(9 - zz)}$. Au reſte, il n'eſt pas rare de rencontrer des expreſſions qui ne ſont que des fonctions apparentes ; car, quelque valeur qu'on donne à la variable, elles conſervent toujours la même valeur, comme z^0; 1^z; $\frac{aa - az}{a - z}$. Ces expreſſions, ſous la forme apparente de fonctions de variables, ſont réellement des quantités conſtantes.

6. *La principale différence des fonctions conſiſte dans la combinaiſon de la variable & des quantités conſtantes, qui les forment.*

Elle dépend donc des opérations par leſquelles les quantités peuvent être compoſées & combinées entr'elles. Ces opérations ſont l'Addition & la Souſtraction ; la Multiplication & la Diviſion ; l'Élévation aux Puiſſances & l'Extraction des Racines ; à quoi il faut ajouter encore la Réſolution des Équations. Outre ces opérations, qu'on appelle algébriques, il y en a pluſieurs autres qu'on nomme tranſcendantes : comme les exponentielles, les logarithmiques, & d'autres ſans nombre, que le Calcul Intégral fait connoître.

Diſtinguons cependant certaines eſpeces de fonctions ; ſavoir, les Multiples $2z$; $3z$; $\frac{3}{5}z$; az, &c. & les Puiſſances de z; comme z^2; z^3; $z^{\frac{1}{2}}$; z^{-1}; &c, quantités formées par une ſeule opération, & qui, comme celles qui réſultent de la combinaiſon de pluſieurs, ne laiſſent pas de porter de même le nom de fonctions.

7. *Les fonctions ſe diviſent en algébriques & en tranſcendantes ; les premieres ſont formées par des opérations algébriques*

ſeulement, & les dernieres ſuppoſent pour leur formation des opérations tranſcendantes.

Les multiples & les puiſſances de z ſont donc des fonctions algébriques, ainſi que toutes les expreſſions, qui n'admettent que les opérations algébriques, dont nous avons parlé; telle eſt la quantité $\frac{a + bz^n - c\sqrt{(2z - zz)}}{aaz - 3bz^3}$. Souvent les fonctions algébriques ne peuvent être repréſentées explicitement; telle feroit la fonction Z de z, ſi elle étoit exprimée par l'équation $Z^5 = azz\,Z^3 - bz^4\,Z^2 + cz^3\,Z - 1$. Car, quoique cette équation ne puiſſe être réſolue, il n'en eſt pas moins certain que Z eſt égal à une expreſſion compoſée de la variable z & de conſtantes, & que par conſéquent Z eſt une fonction quelconque de z. Pour avoir une fonction tranſcendante, il ne ſuffit pas qu'il entre dans ſon expreſſion une opération tranſcendante, il faut de plus qu'elle affecte la variable; car ſi elle n'affectoit que des conſtantes, la fonction n'en feroit pas moins cenſée algébrique. Par exemple, ſi c déſigne la circonférence d'un cercle, dont le rayon $= 1$, la quantité c ſera bien une quantité tranſcendante; cependant ces expreſſions $c + z$; cz^2; $4z^c$, &c. feront des fonctions algébriques de z. Car il importe peu de ſavoir ſi ces ſortes d'expreſſions z^c doivent être miſes au nombre des fonctions algébriques ou non. Il y a auſſi des Géomètres qui ont mieux aimé donner aux puiſſances de z, dont les expoſans étoient des nombres irrationnels, comme $z^{\sqrt{2}}$, le nom de fonctions interſcendantes, que celui de fonctions algébriques.

8. *Les fonctions algébriques ſe ſubdiviſent en rationnelles & en irrationnelles. Dan les dernieres la variable eſt affectée de radicaux, & dans les premieres elle n'en eſt point affectée.*

Par conſéquent, les fonctions rationnelles n'admettent pas d'autres opérations que l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, la Diviſion & l'Elévation aux Puiſſances, dont les expoſans ſont des nombres entiers; ainſi, les quantités $a + z$; $a - z$; az; $\frac{aa + zz}{a + z}$, $az^3 - bz^5$, &c. ſont des fonctions rationnelles de z; mais ces expreſſions $\sqrt{z}$; $a + \sqrt{(aa - zz)}$; $\sqrt[3]{(a - 2z + zz)}$; $\frac{aa - z\sqrt{(aa + zz)}}{a + z}$ en feront des fonctions irrationnelles.

Celles-ci ſe diviſent commodément en explicites & en implicites.

Les explicites ſont développées au moyen des radicaux; nous en avons donné des exemples, & les implicites dépendent de la réſolution des équations. Ainſi Z ſera une fonction irrationnelle implicite de z, ſi elle eſt repréſentée par cette équation $Z^7 = azZ^2 - bz^5$. En effet, on ne peut en tirer la valeur explicite de Z, même en admettant les ſignes radicaux, par la raiſon que l'Algébre n'eſt pas encore parvenue à ce degré de perfection.

9. *Les fonctions rationnelles enfin, ſe diviſent en entieres & en fractionnaires.*

Dans celles-là, il n'entre aucune puiſſance négative de la variable z, ni aucunes fractions qui renferment cette variable dans leurs dénominateurs; d'où il ſuit que les fonctions fractionnaires ſont celles qui ont des dénominateurs affectés de la variable z, ou dans leſquelles ſe rencontrent des expoſans négatifs de cette même variable. Ainſi la formule générale des fonctions entieres ſera $a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 +$ &c. Car on ne peut imaginer aucune fonction entiere de z, qui ne ſoit renfermée dans cette expreſſion. Quant aux fonctions fractionnaires, comme pluſieurs fractions peuvent toujours être réduites à une ſeule, elles ſeront compriſes dans la formule

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + \&c.}{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \zeta z^5 + \&c.}$$

Remarquez ici que les quantités conſtantes a, b, c, d, &c. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. ſoit qu'on les ſuppoſe poſitives ou négatives, entieres ou fractionnaires, rationnelles ou irrationnelles, &

même tranſcendantes, ne changent point la nature des fonctions.

10. *Il faut enſuite remarquer principalement la diviſion des fonctions en uniformes & en multiformes.*

La fonction uniforme eſt celle qui n'obtient qu'une ſeule valeur déterminée, quelque valeur déterminée qu'on donne à la variable z. La fonction multiforme eſt celle qui, pour chaque valeur déterminée qu'on met à la place de la variable, donne pluſieurs valeurs déterminées. Toutes les fonctions rationnelles ſoit entieres, ſoit fractionnaires, ſont des fonctions uniformes, parce que ces ſortes d'expreſſions, quelque ſoit le nombre qu'on ſubſtitue à la variable, n'obtiennent qu'une ſeule valeur; mais les fonctions irrationnelles ſont toutes multiformes, à cauſe de l'ambiguité des ſignes radicaux, & de la double valeur qu'ils indiquent. Il y a auſſi parmi les fonctions tranſcendantes des fonctions uniformes & multiformes, on peut même admettre des fonctions infinitiformes; tel ſeroit l'arc de cercle qui répondroit au ſinus z, car il y a une infinité d'arcs circulaires qui ont tous le même ſinus. Dans ce qui ſuit nous ſuppoſerons que les lettres P, Q, R, S, T, &c. repréſentent chacune des fonctions uniformes de z.

[...]

CHAPITRE IV.

Du développement des Fonctions en Séries infinies.

59. La formule $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ &c, en ne prenant qu'un nombre fini de termes, ne peut repréſenter ni les fonctions fractionnaires, ni les fonctions irrationnelles de z; néanmoins on cherche ordinairement pour les exprimer une ſuite de même forme, qu'on ſuppoſe compoſée d'une infinité de termes. D'ailleurs une ſemblable ſérie, quoique infinie, paroît plus propre à faire connoître la nature des fonctions tranſcendantes. En effet, ſi la nature d'une fonction entiere eſt bien déterminée, lorſque cette fonction eſt développée ſuivant les différentes puiſſances de z, & ramenée par conſéquent à la forme $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ &c; la même forme paroît auſſi la plus propre à repréſenter à l'eſprit le caractere de toutes les

autres fonctions, quoique le nombre des termes de la ſuite ſoit infini. Au reſte, il eſt évident qu'une fonction non entiere de z ne peut être repréſentée par un nombre fini de termes de cette ſorte: $A + Bz + Cz^2 +$ &c; car ſi elle pouvoit l'être, elle ſeroit par cela même une fonction entiere; & ſi quelqu'un doutoit qu'elle pût être exprimée par une telle ſérie d'un nombre infini de termes, le développement même de chaque fonction ne lui laiſſera aucun doute; mais pour plus de généralité, outre les puiſſances de z, qui ont des expoſans poſitifs & entiers, on doit admettre des puiſſances quelconques. Ainſi il ne reſtera aucun doute, que toute fonction de z ne puiſſe être transformée en une ſérie infinie de cette forme: $Az^{\alpha} + Bz^{\beta} + Cz^{\gamma} + Dz^{\delta}$, les expoſans α, β, γ, δ, &c. exprimant des nombres quelconques.

60. *On ſait qu'au moyen d'une diviſion continue, la fraction* $\frac{a}{\alpha + \beta z}$ *ſe réſout en cette ſuite infinie:* $\frac{a}{\alpha} - \frac{a\beta z}{\alpha^2} + \frac{a\beta^2 z^2}{\alpha^3} - \frac{a\beta^3 z^3}{\alpha^4} + \frac{a\beta^4 z^4}{\alpha^5} -$ *&c, laquelle se nomme une progreſſion géométrique, parce que chaque terme a un rapport conſtant* $1 : \frac{\beta z}{\alpha}$, *avec celui qui le ſuit.*

Il y a une autre maniere de trouver cette ſérie; c'eſt de la ſuppoſer d'avance, quoique inconnue, toute développée: car, ſoit $\frac{a}{\alpha + \beta z} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 +$ &c. Pour produire l'égalité, cherchons les coëfficiens A, B, C, D, &c; nous aurons $a = (\alpha + \beta z)(A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ &c.$)$ & après la multiplication faite, ...

$$a = \alpha A + \alpha Bz + \alpha Cz^2 + \alpha Dz^3 + \alpha Ez^4 + \text{\&c.}$$
$$+ \beta Az + \beta Bz^2 + \beta Cz^3 + \beta Dz^4 + \text{\&c.}$$

Par conſéquent nous devons avoir $a = \alpha A$, donc $A = \frac{a}{\alpha}$; il faudra enſuite égaler à zéro la ſomme des coëfficiens de chaque puiſſance de z; ce qui donnera les équations:

$\alpha B + \beta A = 0$
$\alpha C + \beta B = 0$
$\alpha D + \beta C = 0$
$\alpha E + \beta D = 0$
&c.

chaque coëfficient trouvé fera donc connoître facilement le ſuivant. Car ſi le coëfficient d'un terme quelconque $= P$, & le ſuivant $= Q$; on aura $\alpha Q + \beta P = 0$, ou $Q = -\frac{\beta P}{\alpha}$. Ainſi le premier terme $A = \frac{a}{\alpha}$, étant une fois déterminé, on en conclura les valeurs des lettres ſuivantes B, C, D, &c. qu'on trouvera les mêmes que celles que donne la diviſion. Au reſte, on voit à l'inſpection, que dans la ſérie trouvée pour $\frac{a}{\alpha + \beta z}$, le coëfficient de la puiſſance z^n ſera $= \mp \frac{a \cdot \beta^n}{\alpha^{n+1}}$, le ſigne $+$ ayant lieu lorſque n eſt un nombre pair, & le ſigne $-$ lorſque n eſt impair, ou ſi l'on veut, le coëfficient ſera $= \frac{a}{\alpha}\left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)^n$.

[...]

CHAPITRE VIII.

Des Quantités tranſcendantes qui naiſſent du Cercle.

126. Après la conſidération des logarithmes & des quantités exponentielles, vient celle des arcs de cercle, & de leurs ſinus & coſinus, tant parce qu'ils forment une autre eſpece de quantités tranſcendantes, que parce qu'ils dérivent des quantités logarithmiques mêmes & des quantités exponentielles, lorſqu'elles renferment des imaginaires, ce qu'on verra plus clairement ci-après.

Suppoſons donc le rayon du cercle ou le ſinus total $= 1$, il paroît aſſez clair que la circonférence de ce cercle ne peut être exprimée exactement en nombres rationnels *, mais on a trouvé par approximation la demi-circonférence de ce cercle = ...
3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651327230664709384446 +. Pour abréger j'écrirai π au lieu de ce nombre, de ſorte que $\pi =$ à la demi circonférence d'un cercle dont le rayon $= 1$; ou π ſera la longueur d'un arc de 180 degrés.

* Cette propoſition a été démontrée par Lambert, *Mémoires de Berlin*; mais on en trouvera une démonſtration plus ſimple dans les *Élémens de Géométrie* du C. Legendre, qui ont paru depuis peu.

127. Soit z un arc quelconque de cercle dont je ſuppoſe toujours le rayon $= 1$; on a coutume de conſidérer plus particuliérement les ſinus & coſinus de cet arc z. Pour repréſenter dans la ſuite le ſinus d'un arc z, j'écrirai $\mathit{ſin.}\ A.z$, ou ſimplement $\mathit{ſin.}\ z$. Et pour repréſenter le coſinus j'écrirai $\mathit{coſ.}\ A.\ z$, ou ſeulement $\mathit{coſ.}\ z$. Ainſi comme π exprime un arc de 180°, $\mathit{ſin.}\ 0\pi = 0$; $\mathit{coſ.}\ 0\pi = 1$; $\mathit{ſin.}\ \frac{1}{2}\pi = 1$; $\mathit{coſ.}\ \frac{1}{2}\pi = 0$; $\mathit{ſin.}\ \pi = 0$, $\mathit{coſ.}\ \pi = -1$; $\mathit{ſin.}\ \frac{3}{2}\pi = -1$, $\mathit{coſ.}\ \frac{3}{2}\pi = 0$; $\mathit{ſin.}\ 2\pi = 0$, & $\mathit{coſ.}\ 2\pi = 1$. Tous les ſinus & coſinus ſont donc renfermés dans les limites $+1$ & -1 Or $\mathit{coſ.}\ z = \mathit{ſin.}\ (\frac{1}{2}\pi - z)$ & $\mathit{ſin.}\ z = \mathit{coſ.}\ (\frac{1}{2}\pi - z)$; & $(\mathit{ſin.}\ z)^2 + (\mathit{coſ.}\ z)^2 = 1$. Outre ces dénominations il faut diſtinguer celles-ci : $\mathit{tang.}\ z$, qui déſigne la tangente de l'arc z, & $\mathit{cot.}\ z$, qui déſigne la cotangente de l'arc z; on ſait d'ailleurs que $\mathit{tang.}\ z = \frac{\mathit{ſin.}\ z}{\mathit{coſ.}\ z}$, & que $\mathit{cot.}\ z = \frac{\mathit{coſ}\ z}{\mathit{ſin.}\ z} = \frac{1}{\mathit{tang.}\ z}$. Tout cela eſt connu par la Trigonométrie.

[...]

132. Puisque $(\sin. z)^2 + (\cos. z)^2 = 1$, en décomposant en facteurs, on aura $(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z)(\cos. z - \sqrt{-1}. \sin. z) = 1$. Ces facteurs, quoique imaginaires, sont d'un grand usage dans la combinaison & dans la multiplication des arcs. En effet, cherchons le produit de ces facteurs $(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z)(\cos. y + \sqrt{-1}. \sin. y)$, nous trouverons $\cos. y. \cos. z - \sin. y. \sin. z + (\cos. y. \sin. z + \sin. y. \cos. z)\sqrt{-1}$; mais comme $\cos. y. \cos. z - \sin. y. \sin. z = \cos. (y+z)$, & $\cos. y. \sin. z + \sin. y. \cos. z = \sin. (y+z)$; nous obtiendrons ce produit $(\cos. y + \sqrt{-1}. \sin. y)$ $(\cos. z$

$+ \sqrt{-1}. \sin. z) = \cos. (y+z) + \sqrt{-1}. \sin. (y+z)$.

Semblablement

$(\cos. y - \sqrt{-1}. \sin. y)(\cos. z - \sqrt{-1}. \sin. z) = \cos. (y+z) - \sqrt{-1}. \sin. (y+z)$.

De même

$(\cos. x \pm \sqrt{-1}. \sin. x)(\cos. y \pm \sqrt{-1}. \sin. y)(\cos. z \pm \sqrt{-1}. \sin. z) = \cos. (x+y+z) \pm \sqrt{-1}. \sin. (x+y+z)$.

133. Il suit de-là que $(\cos. z \pm \sqrt{-1}. \sin. z)^2 = \cos. 2z \pm \sqrt{-1}. \sin. 2z$, & $(\cos. z \pm \sqrt{-1}. \sin z)^3 = \cos. 3z \pm \sqrt{-1}. \sin. 3z$; & qu'en général $(\cos. z \pm \sqrt{-1}. \sin. z)^n = \cos. nz \pm \sqrt{-1}. \sin. nz$: d'où nous tirerons à cause du double signe,

$$\cos. nz = \frac{(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z)^n + (\cos. z - \sqrt{-1}. \sin. z)^n}{2} \quad \&$$

$$\sin. nz = \frac{(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z)^n - (\cos. z - \sqrt{-1}. \sin. z)^n}{2\sqrt{-1}}$$

Donc en développant ces binomes en séries, nous aurons

$$\cos. nz = (\cos. z)^n - \frac{n.(n-1)}{1.\ 2}(\cos. z)^{n-2}(\sin z)^2 + \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}(\cos. z)^{n-4}(\sin. z)^4 - \ldots \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}(\cos. z)^{n-6}(\sin. z)^6 + \&c.$$

$$\& \sin. nz = \frac{n}{1}(\cos. z)^{n-1}\sin. z - \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}(\cos. z)^{n-3}(\sin. z)^3 + \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}(\cos. z)^{n-5}(\sin. z)^5 - \&c.$$

134. Soit z un arc infiniment petit, alors $\sin. z = z$, & $\cos. z = 1$; soit en même temps n un nombre infiniment grand, pour que l'arc nz soit d'une grandeur finie, pour que nz, par exemple, $= v$; à cause de $\sin. z = z = \frac{v}{n}$, on aura

$$\cos. v = 1 - \frac{v^2}{1.\ 2} + \frac{v^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4} - \frac{v^6}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6} + \&c. \ \&$$

$$\text{fin. } v = v - \frac{v^3}{1.2.3} + \frac{v^5}{1.2.3.4.5} - \frac{v^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{\&c.}$$

[...]

138. Suppoſons encore dans les formules précédentes (*art.* 133) l'arc z infiniment petit, & n un nombre infiniment grand i, afin d'obtenir pour iz une valeur finie v; nous aurons donc $nz = v$, & $z = \frac{v}{i}$, & par conſéquent $\sin. z = \frac{v}{i}$, & $\cos. z = 1$; ces ſubſtitutions faites donneront $\cos. v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i + \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2}$ & $\sin. v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i - \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2\sqrt{-1}}$. Or dans le Chapitre précédent, nous avons vu que $\left(1 + \frac{z}{i}\right)^i = e^z$, e déſignant la baſe des logarithmes hyperboliques; ayant donc écrit pour z, d'une part $+v\sqrt{-1}$ & d'une autre part $-v\sqrt{-1}$, on aura $\cos. v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$ & $\sin. v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$. On comprend par là comment les quantités exponentielles imaginaires ſe ramenent à des ſinus & à des coſinus d'arcs réels. On aura auſſi $e^{+v\sqrt{-1}} = \cos. v + \sqrt{-1} \sin. v$, & $e^{-v\sqrt{-1}} = \cos. v - \sqrt{-1} \sin. v$.

[...]