LU3HS011
Eléments d'histoire des mathématiques,
niveau L3

L'enseignant : David AUBIN (david.aubin@sorbonne-universite.fr)

– Fascicule 3 –

1. Joseph-Louis Lagrange, *Théorie des fonctions analytiques* (Paris, 1797 ; 2e éd 1813 = *Œuvres de Lagrange*, t. 9) : Partie I : chap. 1, p. 21-22 ; chap. II, p. 31-33.

2. Augustin-Louis Cauchy :
   - *Cours d'analyse de l'École polytechnique*, 1re partie : Analyse algébrique (Paris, 1821 = *Œuvres*, sér. II, t. 3), p. ii-v, 19, 37-39, 43-45 & 114-121.
   - *Résumé des leçons données à l'École polytechnique sur le calcul infinitésimal* (Paris, 1823 = *Œuvres*, sér. II, t. 4), p. v-vi, 9-12, 145-148.

3. Adrien-Marie Legendre, *Éléments de géométrie,* 12e éd. (Paris, 1823), avertissement, p. 20-23, 26-27 & planche de figures.

4. Charles Méray, « Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données », *Revue des sociétés savantes* 4 (1869), 280-289.

5. Nikolai Lobachevski, *Études géométriques sur la théorie des parallèles* (1840), trad. J. Houël (Paris, 1866), p. 9-22, 50-51.

6. Eugenio Beltrami, « Essai d'interprétation de la géométrie non euclidienne », trad. J. Houël, *Annales scientifiques de l'école normales supérieure* 6 (1869), p. 251-254, 260-262.

7. Richard Dedekind, « Continuité et nombres irrationnels » (1872), in Jean Dhombres, Amy Dahan-Dalmedico, Rudolf Bkouche, Christian Houzel & Michel Guillemot, *Mathématiques au fil des âges* (Paris : Gauthier-Villars, 1987), p. 145–149.

8. Hermann von Helmholtz, Les axiomes de la géométrie, *Revue des cours scientifiques* 7 (1870), p. 498-501.

9. Henri Poincaré, Les Géométries non euclidiennes, *La Science et l'hypothèse*, Flammarion, Paris, 1902, chapitre 3, p. 55-71.

10. Nicolas Bourbaki :
    - « L'architecture des mathématiques », in *Les Grands Courants de la pensée mathématique*, dir. François Le Lionnais (Paris, 1948), p. 35-47.
    - « Mode d'emploi de ce traité », in *Éléments de mathématique* (Paris : Hermann, 1940-), feuillet, 4 p.

THÉORIE

DES

FONCTIONS ANALYTIQUES,

CONTENANT

Les Principes du Calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies.

Par J. L. Lagrange, de l'Institut des Sciences, Lettres et Arts, et du Bureau des Longitudes; Membre du Sénat-Conservateur, Grand-Officier de la Légion-d'Honneur, et Comte de l'Empire.

NOUVELLE ÉDITION,

revue et augmentée par l'Auteur.

PARIS,

MME Ve COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

1813.

PREMIÈRE PARTIE.

EXPOSITION DE LA THÉORIE, AVEC SES PRINCIPAUX USAGES DANS L'ANALYSE.

CHAPITRE PREMIER.

DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE D'UNE FONCTION D'UNE VARIABLE LORSQU'ON ATTRIBUE UN ACCROISSEMENT A CETTE VARIABLE. FORMATION SUCCESSIVE DES TERMES DE LA SÉRIE. THÉORÈME IMPORTANT SUR LA NATURE DE CES SÉRIES.

1. Nous désignerons en général par la caractéristique f ou F, placée devant une variable, toute fonction de cette variable, c'est-à-dire toute quantité dépendante de cette variable et qui varie avec elle suivant une loi donnée. Ainsi $f(x)$ ou $F(x)$ désignera une fonction de la variable x; $f(x^2)$, $f(a+bx)$, ... désigneront des fonctions de x^2, de $a+bx$, .

Pour marquer une fonction de deux variables indépendantes, comme de x, y, nous écrirons $f(x, y)$, et ainsi des autres.

Lorsque nous voudrons employer d'autres caractéristiques pour marquer les fonctions, nous aurons soin d'en avertir.

Considérons donc une fonction $f(x)$ d'une variable quelconque x. Si à la place de x on y met $x+i$, i étant une quantité quelconque indéterminée, elle deviendra $f(x+i)$, et, par la théorie des séries, on pourra la développer en une série de cette forme

$$f(x)+pi+qi^2+ri^3+\ldots,$$

dans laquelle les quantités $p, q, r, \ldots$, coefficients des puissances de i, seront de nouvelles fonctions de x, dérivées de la fonction primitive $f(x)$ et indépendantes de l'indéterminée i.

[...]

CHAPITRE II.

FONCTIONS DÉRIVÉES; LEUR NOTATION ET LEUR ALGORITHME.

8. Nous avons vu que le développement de $f(x+i)$ donne naissance à différentes autres fonctions $p, q, r, \ldots$, toutes dérivées de la fonction principale $f(x)$, et nous avons donné la manière de trouver ces fonctions dans des cas particuliers. Mais, pour établir une théorie sur ces sortes de fonctions, il faut rechercher la loi générale de leur dérivation.

Pour cela, reprenons la formule générale

$$f(x+i) = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + \ldots,$$

et supposons que l'indéterminée x devienne $x+o$, o étant une quantité quelconque indéterminée et indépendante de i; il est visible que $f(x+i)$ deviendra $f(x+i+o)$, et l'on voit en même temps que l'on aurait le même résultat en mettant simplement $i+o$ à la place de i dans $f(x+i)$. Donc aussi, le résultat doit être le même, soit qu'on mette, dans la série $f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + \ldots$, $i+o$ à la place de i, soit qu'on y mette $x+o$ au lieu de x.

La première substitution donnera

$$f(x) + p(i+o) + q(i+o)^2 + r(i+o)^3 + \ldots,$$

savoir, en développant les puissances de $i+o$, et n'écrivant, pour plus de simplicité, que les deux premiers termes de chaque puissance, parce que la comparaison de ces termes suffira pour les déterminations dont nous avons besoin,

$$f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + si^4 + \ldots + po + 2qio + 3ri^2o + 4si^3o + \ldots.$$

Pour faire l'autre substitution, soient $f(x)+f'(x)o+\ldots$, $p+p'o+\ldots$, $q+q'o+\ldots$, $r+r'o+\ldots$ ce que deviennent les fonctions $f(x)$, p, q, r, ... en y mettant $x+o$ pour x et ne considérant dans le développement que les termes qui contiennent la première puissance de o; il est clair que la même formule deviendra

$$f(x)+pi+qi^2+ri^3+si^4+\ldots+f'(x)o+p'io+q'i^2o+r'i^3o+\ldots.$$

Comme ces deux résultats doivent être identiques quelles que soient les valeurs de i et de o, on aura, en comparant les termes affectés de o, de io, de i^2o, etc.,

$$p=f'(x),\quad 2q=p',\quad 3r=q',\quad 4s=r',\quad \ldots.$$

Maintenant, de même que $f'(x)$ est la première fonction dérivée de $f(x)$, il est clair que p' est la première fonction dérivée de p, que q' est la première fonction dérivée de q, r' la première fonction dérivée de r, et ainsi de suite. Donc, si, pour plus de simplicité et d'uniformité, on dénote par $f'(x)$ la première fonction dérivée de $f(x)$, par $f''(x)$ la première fonction dérivée de $f'(x)$, par $f'''(x)$ la première fonction dérivée de $f''(x)$, et ainsi de suite, on aura

$$p=f'(x),\qquad \text{et de là}\quad p'=f''(x);$$

donc

$$q=\frac{p'}{2}=\frac{f''(x)}{2},\quad \text{et de là}\quad q'=\frac{f'''(x)}{2};$$

donc

$$r=\frac{q'}{3}=\frac{f'''(x)}{2.3},\quad \text{et de là}\quad r'=\frac{f^{\text{IV}}(x)}{2.3};$$

donc

$$s=\frac{r'}{4}=\frac{f^{\text{IV}}(x)}{2.3.4},\quad s'=\frac{f^{\text{V}}(x)}{2.3.4};$$

et ainsi de suite.

Donc, substituant ces valeurs dans le développement de la fonction $f(x+i)$, on aura

$$f(x+i)=f(x)+f'(x)i+\frac{f''(x)}{2}i^2+\frac{f'''(x)}{2.3}i^3+\frac{f^{\text{IV}}(x)}{2.3.4}i^4+\ldots.$$

Cette nouvelle expression a l'avantage de faire voir comment les termes de la série dépendent les uns des autres, et surtout comment, lorsqu'on sait former la première fonction dérivée d'une fonction primitive quelconque, on peut former toutes les fonctions dérivées que la série renferme.

9. Nous appellerons la fonction $f(x)$ *fonction primitive* par rapport aux fonctions $f'(x)$, $f''(x)$, ... qui en dérivent, et nous appellerons celles-ci *fonctions dérivées* par rapport à celle-là. Nous nommerons de plus la première fonction dérivée $f'(x)$ *fonction prime*, la seconde fonction dérivée $f''(x)$ *fonction seconde*, la troisième fonction dérivée $f'''(x)$ *fonction tierce*, et ainsi de suite.

De la même manière, si y est supposée une fonction de x, nous dénoterons ses fonctions dérivées par y', y'', y''', ..., de sorte que, y étant une fonction primitive, y' sera sa fonction *prime*, y'' en sera la fonction *seconde*, y''' la fonction *tierce*, et ainsi de suite.

De sorte que, x devenant $x+i$, y deviendra

$$y+y'i+\frac{y''i^2}{2}+\frac{y'''i^3}{2.3}+\ldots.$$

Ainsi, pourvu qu'on ait un moyen d'avoir la fonction prime d'une fonction primitive quelconque, on aura, par la simple répétition des mêmes opérations, toutes les fonctions dérivées, et par conséquent tous les termes de la série qui résulte du développement de la fonction primitive.

Au reste, pour peu qu'on connaisse le Calcul différentiel, on doit voir que les fonctions dérivées y', y'', y''', ..., relatives à x, coïncident avec les expressions $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, ...

CAUCHY Texte a)

[...]

Quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre. Les raisons de cette espèce, quoique assez communément admises, sur-tout

dans le passage des séries convergentes aux séries divergentes, et des quantités réelles aux expressions imaginaires, ne peuvent être considérées, ce me semble, que comme des inductions propres à faire pressentir quelquefois la vérité, mais qui s'accordent peu avec l'exactitude si vantée des sciences mathématiques. On doit même observer qu'elles tendent à faire attribuer aux formules algébriques une étendue indéfinie, tandis que, dans la réalité, la plupart de ces formules subsistent uniquement sous certaines conditions, et pour certaines valeurs des quantités qu'elles renferment. En déterminant ces conditions et ces valeurs, et en fixant d'une manière précise le sens des notations dont je me sers, je fais disparaître toute incertitude ; et alors les différentes formules ne présentent plus que des relations entre les quantités réelles, relations qu'il est toujours facile de vérifier par la substitution des nombres aux quantités elles-mêmes. Il est vrai que, pour rester constamment fidèle à ces principes, je me suis vu forcé d'admettre plusieurs propositions qui paraîtront peut-être un peu dures au premier abord. Par exemple, j'énonce dans le chapitre VI, qu'*une série divergente n'a pas de somme;* dans le chapitre VII, qu'*une équation imaginaire est seulement la représentation symbolique de deux équations entre quantités réelles;* dans le chapitre IX, que, *si des constantes ou des variables comprises dans une fonction, après avoir été supposées réelles, deviennent imaginaires, la notation à l'aide de laquelle la fonction se trouvait exprimée, ne peut être conservée dans le calcul qu'en vertu d'une convention nouvelle propre à fixer le sens de cette notation dans la dernière hypothèse;* &c. Mais ceux qui liront mon ouvrage reconnaîtront,

je l'espère, que les propositions de cette nature, entraînant l'heureuse nécessité de mettre plus de précision dans les théories, et d'apporter des restrictions utiles à des assertions trop étendues, tournent au profit de l'analyse, et fournissent plusieurs sujets de recherches qui ne sont pas sans importance. Ainsi, avant d'effectuer la sommation d'aucune série, j'ai dû examiner dans quels cas les séries peuvent être sommées, ou, en d'autres termes, quelles sont les conditions de leur convergence; et j'ai, à ce sujet, établi des règles générales qui me paraissent mériter quelque attention.

[...]

[...]

On nomme quantité *variable* celle que l'on considère comme devant recevoir successivement plusieurs valeurs différentes les unes des autres. On désigne une semblable quantité par une lettre prise ordinairement parmi les dernières de l'alphabet. On appelle au contraire quantité *constante*, et l'on désigne ordinairement par une des premières lettres de l'alphabet toute quantité qui reçoit une valeur fixe et déterminée. Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres. Ainsi, par exemple, un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées. En Géométrie, la surface du cercle est la limite vers laquelle convergent les surfaces des polygones inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croît de plus en plus, etc.

Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable décroissent indéfiniment, de manière à s'abaisser au-dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un *infiniment petit* ou une quantité *infiniment petite*. Une variable de cette espèce a zéro pour limite.

Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable croissent de plus en plus, de manière à s'élever au-dessus de tout nombre donné, on dit que cette variable a pour limite l'*infini positif*, indiqué par le signe ∞, s'il s'agit d'une variable positive, et l'*infini négatif*, indiqué par la notation $-\infty$, s'il s'agit d'une variable négative. Les infinis positif et négatif sont désignés conjointement sous le nom de *quantités infinies*.

[...]

CHAPITRE II.

DES QUANTITÉS INFINIMENT PETITES OU INFINIMENT GRANDES, ET DE LA CONTINUITÉ DES FONCTIONS. VALEURS SINGULIÈRES DES FONCTIONS DANS QUELQUES CAS PARTICULIERS.

§ I. — *Des quantités infiniment petites et infiniment grandes.*

On dit qu'une quantité variable devient *infiniment petite*, lorsque sa valeur numérique décroît indéfiniment de manière à converger vers la limite zéro. Il est bon de remarquer à ce sujet qu'on ne doit pas confondre un décroissement constant avec un décroissement indéfini. La surface d'un polygone régulier circonscrit à un cercle donné décroît constamment à mesure que le nombre des côtés augmente, mais non pas indéfiniment, puisqu'elle a pour limite la surface du cercle. De même encore, une variable qui n'admettrait pour valeurs successives que les différents termes de la suite

$$\frac{2}{1},\quad \frac{3}{2},\quad \frac{4}{3},\quad \frac{5}{4},\quad \frac{6}{5},\quad \ldots,$$

prolongée à l'infini, décroîtrait constamment, mais non pas indéfiniment, puisque ses valeurs successives convergeraient vers la limite 1. Au contraire, une variable qui n'aurait pour valeurs successives que les différents termes de la suite

$$\frac{1}{4},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{6},\quad \frac{1}{5},\quad \frac{1}{8},\quad \frac{1}{7},\quad \ldots,$$

prolongée à l'infini, ne décroîtrait pas constamment, puisque la différence entre deux termes consécutifs de cette suite est alternativement positive et négative; et, néanmoins, elle décroîtrait indéfiniment, puisque sa valeur finirait par s'abaisser au-dessous de tout nombre donné.

On dit qu'une quantité variable devient *infiniment grande*, lorsque sa valeur numérique croît indéfiniment de manière à converger vers la limite ∞. Il est encore essentiel d'observer ici qu'on ne doit pas confondre une variable qui croît indéfiniment avec une variable qui croît constamment. La surface d'un polygone régulier inscrit à un cercle donné croît constamment, mais non pas indéfiniment, à mesure que le nombre des côtés augmente. Les termes de la suite naturelle des nombres entiers

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

croissent constamment et indéfiniment.

Les quantités infiniment petites et infiniment grandes jouissent de plusieurs propriétés, qui conduisent à la solution de questions importantes, et que je vais exposer en peu de mots.

Soit α une quantité infiniment petite, c'est-à-dire une variable dont la valeur numérique décroisse indéfiniment. Lorsque dans un même calcul on fait entrer les diverses puissances entières de α, savoir

$$\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \ldots,$$

ces diverses puissances sont respectivement désignées sous le nom d'infiniment petits du *premier*, du *second*, du *troisième ordre*, etc. En général, on appelle infiniment petit du premier ordre toute quantité variable dont le rapport avec α converge, tandis que la valeur numérique de α diminue, vers une limite finie différente de zéro; infiniment petit du second ordre toute quantité variable avec α, et dont le rapport avec α^2 converge vers une limite finie différente de zéro, etc. Cela posé, si l'on désigne par k une quantité finie différente de zéro, et par ε un nombre variable qui décroisse indéfiniment avec la valeur numérique de α, la forme générale des quantités infiniment petites du premier ordre sera

$$k\alpha \quad \text{ou du moins} \quad k\alpha(1 \pm \varepsilon);$$

la forme générale des quantités infiniment petites du second ordre

$$k\alpha^2 \quad \text{ou du moins} \quad k\alpha^2(1 \pm \varepsilon),$$
$$\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots;$$

enfin la forme générale des infiniment petits de l'ordre n (n représentant un nombre entier) sera

$$k\alpha^n \quad \text{ou du moins} \quad k\alpha^n(1 \pm \varepsilon).$$

On peut facilement établir, à l'égard de ces divers ordres de quantités infiniment petites, les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Si l'on compare l'un à l'autre deux infiniment petits d'ordres différents, pendant que tous les deux convergeront vers la limite zéro, celui qui est de l'ordre le plus élevé finira par obtenir constamment la plus petite valeur numérique.*

Démonstration. — Soient, en effet,

$$k\alpha^n(1 \pm \varepsilon), \quad k'\alpha^{n'}(1 \pm \varepsilon')$$

deux infiniment petits, l'un de l'ordre n, l'autre de l'ordre n', et supposons $n' > n$; le rapport entre le second de ces infiniment petits et le premier, savoir

$$\frac{k'}{k}\alpha^{n'-n}\frac{1 \pm \varepsilon'}{1 \pm \varepsilon},$$

convergera indéfiniment avec α vers la limite zéro, ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que la valeur numérique du second finit par devenir constamment inférieure à celle du premier.

[...]

§ II. — *De la continuité des fonctions.*

Parmi les objets qui se rattachent à la considération des infiniment petits, on doit placer les notions relatives à la continuité ou à la discontinuité des fonctions. Examinons d'abord sous ce point de vue les fonctions d'une seule variable.

Soit $f(x)$ une fonction de la variable x, et supposons que, pour chaque valeur de x intermédiaire entre deux limites données, cette fonction admette constamment une valeur unique et finie. Si, en partant d'une valeur de x comprise entre ces limites, on attribue à la variable x un accroissement infiniment petit α, la fonction elle-même recevra pour accroissement la différence

$$f(x+\alpha)-f(x),$$

qui dépendra en même temps de la nouvelle variable α et de la valeur de x. Cela posé, la fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites assignées à la variable x, fonction *continue* de cette variable, si, pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence

$$f(x+\alpha)-f(x)$$

décroît indéfiniment avec celle de α. En d'autres termes, *la fonction $f(x)$ restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.*

On dit encore que la fonction $f(x)$ est, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x, fonction continue de cette variable, toutes les fois qu'elle est continue entre deux limites de x, même très rapprochées, qui renferment la valeur dont il s'agit.

Enfin, lorsqu'une fonction $f(x)$ cesse d'être continue dans le voisinage d'une valeur particulière de la variable x, on dit qu'elle devient alors *discontinue* et qu'il y a pour cette valeur particulière *solution de continuité.*

D'après ces explications, il sera facile de reconnaître entre quelles limites une fonction donnée de la variable x est continue par rapport à cette variable. Ainsi, par exemple, la fonction $\sin x$, admettant pour chaque valeur particulière de la variable x une valeur unique et finie, sera continue entre deux limites quelconques de cette variable, attendu que la valeur numérique de $\sin(\frac{1}{2}\alpha)$, et par suite celle de la différence

$$\sin(x+\alpha) - \sin x = 2\sin(\tfrac{1}{2}\alpha)\cos(x+\tfrac{1}{2}\alpha),$$

décroissent indéfiniment avec celle de α, quelle que soit d'ailleurs la valeur finie que l'on attribue à x. En général, si l'on envisage sous le rapport de la continuité les onze fonctions simples que nous avons considérées ci-dessus (Chap. I, § II), savoir

$$a+x, \quad a-x, \quad ax, \quad \frac{a}{x}, \quad x^a, \quad A^x, \quad L(x),$$

$$\sin x, \quad \cos x, \quad \arcsin x, \quad \arccos x,$$

on trouvera que chacune de ces fonctions reste continue entre deux limites finies de la variable x, toutes les fois que, étant constamment réelle entre ces deux limites, elle ne devient pas infinie dans l'intervalle.

Par suite, chacune de ces fonctions sera continue dans le voisinage d'une valeur finie attribuée à la variable x, si cette valeur finie se trouve comprise :

Pour les fonctions

$$\left.\begin{array}{c} a+x \\ a-x \\ ax \\ A^x \\ \sin x \\ \cos x \end{array}\right\} \text{ entre les limites } x = -\infty, \quad x = +\infty;$$

Pour la fonction

$$\frac{a}{x} \left\{\begin{array}{lll} 1^\circ \text{ entre les limites } & x = -\infty, & x = 0, \\ 2^\circ \text{ entre les limites } & x = 0, & x = \infty; \end{array}\right.$$

Pour les fonctions

$$\left.\begin{array}{c} x^a \\ L(x) \end{array}\right\} \text{ entre les limites } x = 0, \qquad x = \infty;$$

enfin

Pour les fonctions

$$\left.\begin{array}{c} \arcsin x \\ \arccos x \end{array}\right\} \text{ entre les limites } x = -1, \qquad x = +1.$$

Il est bon d'observer que, dans le cas où l'on suppose $a = \pm m$ (m désignant un nombre entier), la fonction simple

$$x^a$$

est toujours continue dans le voisinage d'une valeur finie de la variable x, pourvu que cette valeur soit comprise :

$$\text{si } a = +m, \quad \text{entre les limites } \quad x = -\infty, \quad x = +\infty,$$

$$\text{si } a = -m, \left\{\begin{array}{l} \text{entre les limites } \quad x = -\infty, \quad x = 0 \\ \quad \text{ou bien} \\ \text{entre les suivantes } x = 0, \quad x = \infty. \end{array}\right.$$

Parmi les onze fonctions que l'on vient de citer, deux seulement deviennent discontinues pour une valeur de x comprise dans l'intervalle des limites entre lesquelles ces mêmes fonctions restent réelles. Les deux fonctions dont il s'agit sont

$$\frac{a}{x} \quad \text{et} \quad x^a \text{ (lorsque } a = -m\text{)}.$$

L'une et l'autre deviennent infinies, et par conséquent discontinues, pour $x = 0$.

[...]

CHAPITRE VI.

DES SÉRIES CONVERGENTES ET DIVERGENTES. RÈGLES SUR LA CONVERGENCE DES SÉRIES. SOMMATION DE QUELQUES SÉRIES CONVERGENTES.

§ I. — *Considérations générales sur les séries.*

On appelle *série* une suite indéfinie de quantités

$$u_0,\quad u_1,\quad u_2,\quad u_3,\quad \ldots$$

qui dérivent les unes des autres suivant une loi déterminée. Ces quantités elles-mêmes sont les différents termes de la série que l'on considère. Soit

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

la somme des n premiers termes, n désignant un nombre entier quelconque. Si, pour des valeurs de n toujours croissantes, la somme s_n s'approche indéfiniment d'une certaine limite s, la série sera dite *convergente*, et la limite en question s'appellera la *somme* de la série. Au contraire, si, tandis que n croît indéfiniment, la somme s_n ne s'approche d'aucune limite fixe, la série sera *divergente* et n'aura plus de somme. Dans l'un et l'autre cas, le terme qui correspond à l'indice n, savoir u_n, sera ce qu'on nomme le *terme général*. Il suffit que l'on donne ce terme général en fonction de l'indice n, pour que la série soit complètement déterminée.

L'une des séries les plus simples est la progression géométrique

$$1,\quad x,\quad x^2,\quad x^3,\quad \ldots,$$

qui a pour terme général x^n, c'est-à-dire la puissance $n^{\text{ième}}$ de la quantité x. Si dans cette série on fait la somme des n premiers termes, on trouvera

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x};$$

et, comme pour des valeurs croissantes de n, la valeur numérique de la fraction $\frac{x^n}{1-x}$ converge vers la limite zéro, ou croît au delà de toute limite, suivant qu'on suppose la valeur numérique de x inférieure ou supérieure à l'unité, on doit conclure que, dans la première hypothèse, la progression

$$1,\quad x,\quad x^2,\quad x^3,\quad \ldots$$

est une série convergente qui a pour somme $\frac{1}{1-x}$, tandis que, dans la seconde hypothèse, la même progression est une série divergente qui n'a plus de somme.

D'après les principes ci-dessus établis, pour que la série

$$(1)\qquad u_0,\quad u_1,\quad u_2,\quad \ldots,\quad u_n,\quad u_{n+1},\quad \ldots$$

soit convergente, il est nécessaire et il suffit que des valeurs croissantes de n fassent converger indéfiniment la somme

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

vers une limite fixe s; en d'autres termes, il est nécessaire et il suffit que, pour des valeurs infiniment grandes du nombre n, les sommes

$$s_n,\quad s_{n+1},\quad s_{n+2},\quad \ldots$$

diffèrent de la limite s, et par conséquent entre elles, de quantités infiniment petites. D'ailleurs, les différences successives entre la première somme s_n et chacune des suivantes sont respectivement déterminées par les équations

$$s_{n+1} - s_n = u_n,$$
$$s_{n+2} - s_n = u_n + u_{n+1},$$
$$s_{n+3} - s_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Donc, pour que la série (1) soit convergente, il est d'abord nécessaire que le terme général u_n décroisse indéfiniment, tandis que n augmente; mais cette condition ne suffit pas, et il faut encore que, pour des valeurs croissantes de n, les différentes sommes

$$u_n + u_{n+1},$$
$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

c'est-à-dire les sommes des quantités

$$u_n, \quad u_{n+1}, \quad u_{n+2}, \quad \ldots,$$

prises, à partir de la première, en tel nombre que l'on voudra, finissent par obtenir constamment des valeurs numériques inférieures à toute limite assignable. Réciproquement, lorsque ces diverses conditions sont remplies, la convergence de la série est assurée.

Prenons pour exemple la progression géométrique

$$(2) \qquad 1, \quad x, \quad x^2, \quad x^3, \quad \ldots.$$

Si la valeur numérique de x est supérieure à l'unité, celle du terme général x^n croîtra indéfiniment avec n, et cette seule remarque suffira pour constater la divergence de la série. La série sera encore divergente si l'on suppose $x = \pm 1$, parce qu'alors la valeur numérique du terme général x^n, se réduisant à l'unité, ne décroîtra pas indéfiniment pour des valeurs croissantes de n. Mais, si la valeur numérique de x est inférieure à l'unité, les sommes des termes de la série pris à partir de x^n en tel nombre que l'on voudra, savoir :

$$x^n,$$
$$x^n + x^{n+1} = x^n \frac{1-x^2}{1-x},$$
$$x^n + x^{n+1} + x^{n+2} = x^n \frac{1-x^3}{1-x},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

se trouvant toutes comprises entre les limites

$$x^n, \quad \frac{x^n}{1-x},$$

chacune d'elles deviendra infiniment petite pour des valeurs de n infiniment grandes; et par suite la série sera convergente, ce que l'on savait déjà.

Prenons pour second exemple la série numérique

$$(3) \qquad 1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n}, \quad \frac{1}{n+1}, \quad \ldots.$$

Le terme général de cette série, savoir $\frac{1}{n+1}$, décroît indéfiniment à mesure que n augmente, et cependant la série n'est pas convergente; car la somme faite du terme $\frac{1}{n+1}$ et de ceux qui le suivent jusqu'au terme $\frac{1}{2n}$ inclusivement, savoir

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n},$$

reste constamment supérieure, quel que soit n, au produit

$$n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2};$$

et par suite cette somme ne décroît pas indéfiniment pour des valeurs croissantes de n, ainsi que cela aurait lieu si la série était convergente. Ajoutons que, si l'on désigne par s_n la somme des n premiers termes de la série (3), et par 2^m la plus haute puissance de 2 renfermée dans $n+1$, on trouvera

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1} > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^m}\right),$$

et, *a fortiori*,

$$s_n > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{m}{2}.$$

On en conclura que la somme s_n croît indéfiniment avec le nombre entier m, et par conséquent avec n, ce qui est une nouvelle preuve de la divergence de la série.

Considérons encore la série numérique

$$(4)\qquad 1,\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{1.2},\ \frac{1}{1.2.3},\ \ldots,\ \frac{1}{1.2.3\ldots n},\ \ldots.$$

Les termes de cette série, qui occupent un rang supérieur à n, savoir

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n},\quad \frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)},\quad \frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)(n+2)},\quad \ldots,$$

seront respectivement inférieurs aux termes correspondants de la progression géométrique

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n},\quad \frac{1}{1.2.3\ldots n}\,\frac{1}{n},\quad \frac{1}{1.2.3\ldots n}\,\frac{1}{n^2},\quad \ldots.$$

Par suite, la somme des premiers termes pris en tel nombre que l'on voudra sera toujours inférieure à la somme des termes correspondants de la progression géométrique, qui est une série convergente, et à plus forte raison, à la somme de cette progression, c'est-à-dire à

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}\,\frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\,\frac{1}{n-1}.$$

Comme cette dernière somme décroît indéfiniment à mesure que n augmente, il en résulte que la série (4) est elle-même convergente. On est convenu de désigner par la lettre e la somme de cette série. En ajoutant les n premiers termes, on obtiendra, pour valeur approchée du nombre e,

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)};$$

et, d'après ce qu'on vient de dire, l'erreur commise sera inférieure au produit du $n^{\text{ième}}$ terme par $\frac{1}{n-1}$. Ainsi, par exemple, si l'on suppose $n=11$, on trouvera pour la valeur approchée de e

$$(5)\qquad e = 2,7182818\ldots;$$

et l'erreur commise dans cette hypothèse sera inférieure au produit

de la fraction $\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}$ par $\frac{1}{10}$, c'est-à-dire à $\frac{1}{36288000}$, en sorte qu'elle n'altérera pas la septième décimale.

Le nombre e, déterminé comme on vient de le dire, sera souvent employé dans la sommation des suites et dans le Calcul infinitésimal. Les logarithmes pris dans le système qui a ce nombre pour base s'appellent *népériens*, du nom de *Néper*, inventeur des logarithmes, ou *hyperboliques*, parce qu'ils servent à mesurer les diverses parties de l'aire comprise entre l'hyperbole équilatère et ses asymptotes.

On indique généralement la somme d'une série convergente par la somme de ses premiers termes suivie de points. Ainsi, lorsque la série

$$u_0,\quad u_1,\quad u_2,\quad u_3,\quad \ldots$$

est convergente, la somme de cette série est représentée par

$$u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots.$$

En vertu de cette convention, la valeur du nombre e se trouvera déterminée par l'équation

$$(6)\qquad e = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots;$$

et, si l'on considère la progression géométrique

$$1,\quad x,\quad x^2,\quad x^3,\quad \ldots,$$

on aura, pour des valeurs numériques de x inférieures à l'unité,

$$(7)\qquad 1+x+x^2+x^3+\ldots = \frac{1}{1-x}.$$

La série

$$u_0,\quad u_1,\quad u_2,\quad u_3,\quad \ldots$$

étant supposée convergente, si l'on désigne sa somme par s, et par s_n la somme de ses n premiers termes, on trouvera

$$s = u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}+u_n+u_{n+1}+\ldots = s_n+u_n+u_{n+1}+\ldots$$

et, par suite,

$$s-s_n = u_n+u_{n+1}+\ldots.$$

De cette dernière équation, il résulte que les quantités

$$u_n, \quad u_{n+1}, \quad u_{n+2}, \quad \ldots$$

formeront une nouvelle série convergente dont la somme sera équivalente à $s - s_n$. Si l'on représente cette même somme par r_n, on aura

$$s = s_n + r_n;$$

et r_n sera ce qu'on appelle le *reste* de la série (1) à partir du $n^{\text{ième}}$ terme.

Lorsque, les termes de la série (1) renfermant une même variable x, cette série est convergente, et ses différents termes fonctions continues de x, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à cette variable,

$$s_n, \quad r_n \quad \text{et} \quad s$$

sont encore trois fonctions de la variable x, dont la première est évidemment continue par rapport à x dans le voisinage de la valeur particulière dont il s'agit. Cela posé, considérons les accroissements que reçoivent ces trois fonctions, lorsqu'on fait croître x d'une quantité infiniment petite α. L'accroissement de s_n sera, pour toutes les valeurs possibles de n, une quantité infiniment petite; et celui de r_n deviendra insensible en même temps que r_n, si l'on attribue à n une valeur très considérable. Par suite, l'accroissement de la fonction s ne pourra être qu'une quantité infiniment petite. De cette remarque on déduit immédiatement la proposition suivante :

Théorème I. — *Lorsque les différents termes de la série (1) sont des fonctions d'une même variable x, continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x.*

En vertu de ce théorème, la somme de la série (2) devra rester fonction continue de la variable x, entre les limites $x = -1$, $x = 1$;

ce qu'on peut vérifier à l'inspection de la valeur de s donnée par l'équation

$$s = \frac{1}{1 - x}.$$

[...]

CAUCHY : Texte b)

AVERTISSEMENT.

CET ouvrage, entrepris sur la demande du Conseil d'instruction de l'École royale polytechnique, offre le résumé des Leçons que j'ai données à cette École sur le calcul infinitésimal. Il sera composé de deux volumes correspondans aux deux années qui forment la durée de l'enseignement. Je publie aujourd'hui le premier volume divisé en quarante Leçons, dont les vingt premières comprennent le calcul différentiel, et les vingt dernières une partie du calcul intégral. Les méthodes que j'ai suivies diffèrent à plusieurs égards de celles qui se trouvent exposées dans les ouvrages du même genre. Mon but principal a été de concilier la rigueur, dont je m'étais fait une loi dans mon *Cours d'analyse*, avec la simplicité qui résulte de la considération directe des quantités infiniment petites. Pour cette raison, j'ai cru devoir rejeter les développemens des fonctions en séries infinies, toutes les fois que les séries obtenues ne sont pas convergentes; et je me suis vu forcé de renvoyer au calcul intégral la formule de TAYLOR, cette formule ne pouvant plus être admise comme générale qu'autant que la série qu'elle renferme se trouve réduite à un nombre fini de termes, et complétée par une intégrale définie. Je n'ignore pas que l'illustre

auteur de la *Mécanique analytique* a pris la formule dont il s'agit pour base de sa théorie des *fonctions dérivées*. Mais, malgré tout le respect que commande une si grande autorité, la plupart des géomètres s'accordent maintenant à reconnaître l'incertitude des résultats auxquels on peut être conduit par l'emploi de séries divergentes, et nous ajouterons que, dans plusieurs cas, le théorème de TAYLOR semble fournir le développement d'une fonction en série convergente, quoique la somme de la série diffère essentiellement de la fonction proposée [*voyez* la fin de la 38.^{e} Leçon]. Au reste, ceux qui liront mon ouvrage, se convaincront, je l'espère, que les principes du calcul différentiel, et ses applications les plus importantes, peuvent être facilement exposés, sans l'intervention des séries.

Dans le calcul intégral, il m'a paru nécessaire de démontrer généralement d'existence des *intégrales* ou *fonctions primitives* avant de faire connaître leurs diverses propriétés. Pour y parvenir, il a fallu d'abord établir la notion d'*integrales prises entre des limites données* ou *intégrales définies*. Ces dernières pouvant être quelquefois infinies ou indéterminées, il était essentiel de rechercher dans quels cas elles conservent une valeur unique et finie.

[...]

TROISIÈME LEÇON.

Dérivées des Fonctions d'une seule Variable.

LORSQUE la fonction $y = f(x)$ reste continue entre deux limites données de la variable x, et que l'on assigne à cette variable une valeur comprise entre les deux limites dont il s'agit, un accroissement infiniment petit, attribué à la variable, produit un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même. Par conséquent, si l'on pose alors $\Delta x = i$, les deux termes du *rapport aux différences*

$$(1) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

seront des quantités infiniment petites. Mais, tandis que ces deux termes s'approcheront indéfiniment et simultanément de la limite zéro, le rapport lui-même pourra converger vers une autre limite, soit positive, soit négative. Cette limite, lorsqu'elle existe, a une valeur déterminée, pour chaque valeur particulière de x; mais elle varie avec x. Ainsi, par exemple, si l'on prend $f(x) = x^m$, m désignant un nombre entier, le rapport entre les différences infiniment petites sera

$$\frac{(x+i)^m - x^m}{i} = m x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} i + \ldots + i^{m-1}$$

et il aura pour limite la quantité mx^{m-1}, c'est-à-dire, une nouvelle fonction de la variable x. Il en sera de même en général; seulement, la forme de la fonction nouvelle qui servira de limite au rapport $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ dépendra de la forme de la fonction proposée $y = f(x)$. Pour indiquer cette dépendance, on donne à la nouvelle fonction le nom de *fonction dérivée*, et on la désigne, à l'aide d'un accent, par la notation

$$y' \quad \text{ou} \quad f'(x),$$

Dans la recherche des dérivées des fonctions d'une seule variable x, il est utile de distinguer les fonctions que l'on nomme *simples*, et que

l'on considère comme résultant d'une seule opération effectuée sur cette variable, d'avec les fonctions que l'on construit à l'aide de plusieurs opérations et que l'on nomme *composées*. Les fonctions simples que produisent les opérations de l'algèbre et de la trigonométrie [*voyez* la I.re partie du *Cours d'analyse*, ch. I.er] peuvent être réduites aux suivantes

$$a + x, \quad a - x, \quad a x, \quad \frac{a}{x}, \quad x^a, \quad A^x, \quad L(x),$$

$$\sin x, \quad \cos x, \quad \operatorname{arc} \sin x, \quad \operatorname{arc} \cos x,$$

A désignant un nombre constant, $a = \pm A$ une quantité constante, et la lettre L indiquant un logarithme pris dans le système dont la base est A. Si l'on prend une de ces fonctions simples pour y, il sera facile en général d'obtenir la fonction dérivée y'. On trouvera, par exemple,

pour $y = a + x$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(a+x+i)-(a+x)}{i} = 1$, $\quad y' = 1$;

pour $y = a - x$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(a-x-i)-(a-x)}{i} = -1$, $\quad y' = -1$;

pour $y = a x$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a(x+i) - a x}{i} = a$, $\quad y' = a$;

pour $y = \frac{a}{x}$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{a}{x+i} - \frac{a}{x}}{i} = -\frac{a}{x(x+i)}$, $\quad y' = -\frac{a}{x^2}$;

pour $y = \sin x$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{1}{2} i}{\frac{1}{2} i} \cos\left(x + \frac{1}{2} i\right)$, $y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$;

pour $y = \cos x$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin \frac{1}{2} i}{\frac{1}{2} i} \sin\left(x + \frac{1}{2} i\right)$, $y' = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

De plus, en posant $i = \alpha x$, $A^i = 1 + \beta$ et $(1+\alpha)^a = 1 + \gamma$, on trouvera

pour $y = L(x)$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{L(x+i) - L(x)}{i} = \frac{L(1+\alpha)}{\alpha x} = \frac{L(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{x}$, $\quad y' = \frac{L(e)}{x}$;

pour $y = A^x$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{A^{x+i} - A^x}{i} = \frac{A^i - 1}{i} A^x = \frac{A^x}{L(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}}$, $\quad y' = \frac{A^x}{L(e)}$;

pour $y = x^a$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+i)^a - x^a}{i} = \frac{(1+\alpha)^a - 1}{\alpha} x^{a-1} = \frac{L(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{L(1+\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}} a x^{a-1}$, $\quad y' = a x^{a-1}$.

Dans ces dernières formules, la lettre e désigne le nombre 2,718 ... qui sert de limite à l'expression $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$. Si l'on prend ce nombre pour base d'un système de logarithmes, on obtiendra les logarithmes *Népériens* ou *hyperboliques*, que nous indiquerons toujours à l'aide de la lettre l. Cela posé, on aura évidemment $l(e)=1$,

$$Le=\frac{Le}{LA}=\frac{le}{lA}=\frac{1}{lA};$$

et de plus on trouvera

$$\text{pour} \quad y=l(x), \quad y'=\frac{1}{x};$$
$$\text{pour} \quad y=e^x, \quad y'=e^x.$$

Les diverses formules qui précèdent étant établies seulement pour les valeurs de x auxquelles correspondent des valeurs réelles de y, on doit supposer x positive, dans celles de ces formules qui se rapportent aux fonctions $L(x)$, $l(x)$, et même à la fonction x^a, lorsque a désigne une fraction de dénominateur pair, ou un nombre irrationnel.

Soit maintenant z une seconde fonction de x, liée à la première $y=f(x)$ par la formule

$$(2) \qquad z=F(y).$$

z ou $F(fx)$ sera ce qu'on appelle une *fonction de fonction* de la variable x; et, si l'on désigne par Δx, Δy, Δz, les accroissemens infiniment petits et simultanés des trois variables x, y, z, on trouvera

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{F(y+\Delta y)-F(y)}{\Delta x}=\frac{F(y+\Delta y)-F(y)}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

puis, en passant aux limites,

$$(3) \qquad z'=y'.F'(y)=f'(x).\,F'(fx).$$

Par exemple, si l'on fait $z=ay$, et $y=l(x)$, on aura $z'=ay'=\frac{a}{x}$.

A l'aide de la formule (3), on déterminera facilement les dérivées des fonctions simples A^x, x^a, arc sin x, arc cos x, en supposant connues

celles des fonctions $L(x)$, $\sin x$, $\cos x$. On trouvera en effet

pour $y=A^x$, $L(y)=x$, $y'\frac{L(e)}{y}=1$, $y'=\frac{y}{L(e)}=A^x l(A)$;

pour $y=x^a$, $l(y)=al(x)$, $y'\frac{1}{y}=\frac{a}{x}$, $y'=a\frac{y}{x}=ax^{a-1}$;

pour $y=\text{arc}\sin x$, $\sin y=x$, $y'\cos y=1$, $y'=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

pour $y=\text{arc}\cos x$, $\cos y=x$, $y'\times-\sin y=1$, $y'=\frac{-1}{\sin y}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

De plus, les dérivées des fonctions composées

$$A^y, \quad e^y, \quad \frac{1}{y}$$

étant respectivement, en vertu de la formule (3),

$$y'A^y l(A), \quad y'e^y, \quad -\frac{y'}{y^2},$$

les dérivées des suivantes

$$A^{B^x}, \quad e^{e^x}, \quad \text{séc}\, x=\frac{1}{\cos x}, \quad \text{coséc}\, x=\frac{1}{\sin x}$$

deviendront

$$A^{B^x} B^x l(A)\, l(B), \quad e^{e^x} e^x, \quad \frac{\sin x}{\cos^2 x}, \quad -\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

Nous remarquerons, en finissant, que les dérivées des fonctions composées se déterminent quelquefois aussi facilement que celles des fonctions simples. Ainsi, par exemple, on trouve

pour $y=\text{tang}x=\frac{\sin x}{\cos x}$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{i}\left(\frac{\sin(x+i)}{\cos(x+i)}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\frac{\sin i}{i\cos x\cos(x+i)}$, $y'=\frac{1}{\cos^2 x}$;

pour $y=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{i}\left(\frac{\cos(x+i)}{\sin(x+i)}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)=-\frac{\sin i}{i\sin x\sin(x+i)}$, $y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$;

et l'on en conclut

pour $y=\text{arc tang.}\,x$, $\text{tang}\, y=x$, $\frac{y'}{\cos^2 y}=1$, $y'=\cos^2 y=\frac{1}{1+x^2}$;

pour $y=\text{arc cot.}\,x$, $\cot y=x$, $\frac{-y'}{\sin^2 y}=1$, $y'=-\sin^2 y=\frac{-1}{1+x^2}$.

TRENTE-SEPTIÈME LEÇON.

Théorèmes de Taylor *et de* Maclaurin. *Extension de ces Théorèmes aux Fonctions de plusieurs variables.*

On appelle *série* une suite indéfinie de termes

(1) $$u_0,\ u_1,\ u_2 \ldots\ldots u_n,\ \&c.\ldots$$

qui dérivent les uns des autres suivant une loi connue. Soit

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

la somme des n premiers termes, n désignant un nombre entier quelconque. Si, pour des valeurs de n toujours croissantes, la somme s_n s'approche indéfiniment d'une certaine limite s, la série sera dite *convergente*, et la limite s représentée par la notation

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \&c.$$

s'appellera la *somme* de la série. Si au contraire, tandis que n croît indéfiniment, la somme s_n ne s'approche d'aucune limite fixe, la série sera *divergente*, et n'aura plus de somme. Dans l'un et l'autre cas, le terme correspondant à l'indice n, savoir, u_n, se nomme *le terme général.* De plus, si dans la première hypothèse on fait $s = s_n + r_n$; r_n sera ce qu'on nomme *le reste* de la série, à partir du $n.^{me}$ terme.

Ces définitions étant admises, il résulte évidemment des formules (2) et (3) de la 36.^{e} leçon que les séries

(2) $$F(0),\ \frac{x}{1}F'(0),\ \frac{x^2}{1.2}F''(0),\ \frac{x^3}{1.2.3}F'''(0),\ \&c.\ldots,$$

(3) $$f(x),\ \frac{h}{1}f'(x),\ \frac{h^2}{1.2}f''(x),\ \frac{h^3}{1.2.3}f'''(x),\ \&c.\ldots$$

seront convergentes, et auront pour sommes respectives les deux fonctions $F(x)$, $f(x+h)$, toutes les fois que les deux intégrales

(4) $$\int_0^x \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} F^{(n)}(z)\,dz = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} F^{(n)}(\theta x),$$

(5) $$\int_0^h \frac{(h-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f^{(n)}(x+z)\,dz = \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(x+\theta h)$$

convergeront, pour des valeurs croissantes de n, vers la limite zéro. On trouvera, en conséquence,

(6) $$F(x) = F(0) + \frac{x}{1}F'(0) + \frac{x^2}{1.2}F''(0) + \frac{x^3}{1.2.3}F'''(0) + \&c.,$$

si l'expression (4) s'évanouit par des valeurs infinies de n, et

(7) $$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3}f'''(x) + \&c.;$$

si l'expression (5) satisfait à la même condition. Les formules (6) et (7) renferment les théorèmes de *Maclaurin* et de *Taylor*. Elles servent, quand les intégrales (4) et (5) remplissent les conditions prescrites, à *développer* les deux fonctions $F(x)$ et $f(x+h)$ en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes et entières des quantités x et h. Les restes de ces séries sont précisément les deux intégrales dont nous venons de parler.

[. . .]

Comme, en vertu de la formule (19) [22.e leçon], l'intégrale (4) est équivalente à un produit de la forme

$$(13)\qquad x\,\frac{(x-\theta x)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\,F^{(n)}(\theta x),$$

θ désignant un nombre inférieur à l'unité; il est clair que des valeurs infinies de n feront évanouir cette intégrale, si elles réduisent à zéro la fonction

$$(14)\qquad \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\,F^{(n)}(z)$$

pour toutes les valeurs de z renfermées entre les limites 0 et x. Cette dernière condition sera évidemment remplie, si la valeur numérique de l'expression $F^{(n)}(\theta x)$ supposée réelle, ou le module de la même expression supposée imaginaire, ne croît pas indéfiniment, pendant que n augmente. En effet, puisque la quantité $m(n-m)=\left(\frac{n}{2}\right)^2-\left(\frac{n}{2}-m\right)^2$ croît avec le nombre m entre les limites $m=1$, $m=\frac{n}{2}$, et que l'on a par suite

$$1.(n-1)<2.(n-2)<3.(n-3)<\ldots,\qquad 1.2.3\ldots(n-1)>(n-1)^{\frac{n-1}{2}},$$

on peut affirmer que la valeur numérique ou le module de l'expression (14) restera toujours inférieur à la valeur numérique ou au module du produit

$$(15)\qquad \left(\frac{x-z}{\sqrt{n-1}}\right)^{n-1} F^{(n)}(z).$$

Or, ce produit deviendra nul, dans l'hypothèse admise, pour $n=\infty$:

Exemples. Si l'on prend pour valeurs successives de la fonction $F(x)$

$$e^x,\quad \sin x,\quad \cos x,$$

on trouvera pour les valeurs correspondantes de $F^{(n)}(\theta x)$

$$e^{\theta x},\quad \sin\left(\frac{n\pi}{2}+\theta x\right),\quad \cos\left(\frac{n\pi}{2}+\theta x\right).$$

Comme ces dernières quantités restent finies, quel que soit x, tandis que n augmente, on doit en conclure que le théorème de *Maclaurin* est toujours applicable aux trois fonctions proposées. On aura, en conséquence, pour des valeurs quelconques de x, et pour des valeurs positives de A,

$$(16)\qquad e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\&c.,\ A^x=e^{x\,l(A)}=1+\frac{x\,lA}{1}+\frac{x^2(lA)^2}{1.2}+\frac{x^3(lA)^3}{1.2.3}+\&c.$$

$$(17)\qquad \sin x=\sin(0)+\frac{x}{1}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{x^2}{1.2}\sin\left(\frac{2\pi}{2}\right)+\frac{x^3}{1.2.3}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\&c.=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4}-\&c.$$

$$(18)\qquad \cos x=\cos(0)+\frac{x}{1}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{x^2}{1.2}\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right)+\frac{x^3}{1.2.3}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\&c.=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\&c.$$

Lorsque la fonction $F^{(n)}(\theta x)$ devient infinie pour des valeurs infinies de n, l'expression (14) peut encore converger vers la limite zéro. C'est ce qui arrivera, par exemple, si l'on prend $F(x)=l(1+x)$, et si en même temps on attribue à x une valeur numérique plus petite que l'unité. En effet, on trouvera dans ce cas, en supposant $z=\theta x$, $\theta<1$, $x^2<1$,

$$(19)\qquad \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\,F^{(n)}(z)=\pm\frac{(x-z)^{n-1}}{(1+z)^n}=\pm\frac{x^{n-1}}{1-\theta}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n;$$

et, comme la fraction $\frac{1-\theta}{1+\theta x}$ sera évidemment inférieure à l'unité, il est clair que l'expression (19) s'évanouira, pour $n=\infty$. On trouvera, en conséquence, pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites -1 et $+1$,

$$(20)\qquad l(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\&c.\ldots$$

Legendre

AVERTISSEMENT

POUR LA DOUZIÈME ÉDITION.

La démonstration de la théorie des parallèles, telle qu'elle avait été présentée dans la 3e édition de cet ouvrage et dans les éditions suivantes jusqu'à la 8e inclusivement, n'étant pas à l'abri de toute objection, on s'était déterminé dans la 9e édition à rétablir cette théorie à-peu-près sur la même base qu'Euclide. Des réflexions ultérieures faites sur le même objet, dont on donnera le développement dans la note II, ont fait découvrir deux nouvelles manières de démontrer le théorème sur les trois angles du triangle, sans le secours d'aucun *postulatum*. On a en conséquence inséré une de ces démonstrations dans le texte de cette édition, en choisissant celle qui s'éloigne le moins des idées ordinaires, et qui d'ailleurs ne semble pas plus difficile à comprendre que celle qui avait été donnée dans les éditions précédentes, depuis la 3e jusqu'à la 8e.

[...]

PROPOSITION XIX.

THÉORÈME.

Dans tout triangle, la somme des trois angles est égale à deux angles droits.

Soit ABC le triangle proposé dans lequel nous
fig. 35. supposerons (1) que AB est le plus grand côté et BC le plus petit, et qu'ainsi ACB est le plus grand angle,
pr. 14. et BAC le plus petit.

Par le point A et par le point I milieu du côté opposé BC, menez la droite AI que vous prolongerez en C' jusqu'à ce que AC'=AB; prolongez de même AB en B' jusqu'à ce que AB' soit double de AI.

Si on désigne par A, B, C, les trois angles du triangle ABC et semblablement par A', B', C' les trois angles du triangle AB'C', je dis qu'on aura l'angle C'=B+C, et l'angle A=A'+B', d'où résulte A+B+C=A'+B'+C', c'est-à-dire que la somme des trois angles est la même dans les deux triangles.

Pour le prouver, faites AK=AI et joignez C'K, vous aurez le triangle C'AK égal au triangle BAI. Car dans ces deux triangles, l'angle commun A est compris entre côtés égaux chacun à chacun, savoir: AC'=AB, et AK=AI. Donc le troisième côté C'K est égal au troisième BI; donc aussi l'angle AC'K=ABC, et l'angle AKC=AIB.

Je dis maintenant que le triangle B'C'K est égal au triangle ACI, car la somme des deux angles adjacens
pr. 2. AKC'+C'KB' est égale à deux angles droits ainsi que

(1) Cette supposition n'exclut pas le cas où le côté moyen AC serait égal à l'un des extrêmes AB ou BC.

la somme des deux angles $AIC+AIB$; retranchant de part et d'autre les angles égaux AKC', AIB, il restera l'angle $C'KB'=AIC$. Ces angles égaux dans les deux triangles sont compris entre côtés égaux chacun à chacun, savoir $C'K=IB=CI$, et $KB'=AK=AI$, puisqu'on a supposé $AB'=2AI=2AK$. Donc les deux triangles $B'C'K$, ACI, sont égaux*; donc le côté $C'B'=AC$, l'angle $B'C'K=ACB$, et l'angle $KB'C'=CAI$. * pr. 6.

Il suit de là 1° que l'angle $AC'B'$ désigné par C' est composé de deux angles égaux aux angles B et C du triangle ABC, et qu'ainsi on a $C'=B+C$; 2° que l'angle A du triangle ABC est composé de l'angle A' ou $C'AB'$ qui appartient au triangle $AB'C'$ et de l'angle CAI égal à l'angle B' du même triangle, ce qui donne $A=A'+B'$; donc $A+B+C=A'+B'+C'$. D'ailleurs puisqu'on a par hypothèse $AC<AB$ et par conséquent $C'B'<AC'$, on voit que dans le triangle $AC'B'$ l'angle en A, désigné par A', est moindre que B', et comme la somme des deux est égale à l'angle A du triangle proposé, il s'en suit qu'on a l'angle $A'<\frac{1}{2}A$.

Si on applique la même construction au triangle $AB'C'$, pour former un troisième triangle $AC''B''$ dont les angles seront désignés par A'', B'', C'', on aura semblablement les deux égalités $C''=C'+B'$, $A'=A''+B''$, d'où résulte $A'+B'+C'=A''+B''+C''$. Ainsi la somme des trois angles est la même dans ces trois triangles: on aura en même tems l'angle $A''<\frac{1}{2}A'$, et par conséquent $A''<\frac{1}{4}A$.

Continuant indéfiniment la suite des triangles $AC'B'$, $AC''B''$, etc. on parviendra à un triangle abc dans lequel la somme des trois angles sera toujours la même que dans le triangle proposé ABC et qui aura l'angle a plus petit que tel terme qu'on voudra de la progression décroissante $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{4}A$, $\frac{1}{8}A$, etc.

On peut donc supposer cette suite de triangles

prolongée jusqu'à ce que l'angle a soit moindre que tout angle donné.

Et si au moyen du triangle abc on construit le triangle suivant $a'b'c'$, la somme des angles $a'+b'$ de celui-ci sera égale à l'angle a, et sera par conséquent moindre que tout angle donné; d'où l'on voit que la somme des trois angles du triangle $a'b'c'$ se réduit presque au seul angle c'.

Pour avoir la mesure précise de cette somme, prolongeons le côté $a'c'$ vers d', et appelons x' l'angle extérieur $b'c'd'$; cet angle x', joint à l'angle c' du triangle $a'b'c'$, fait une somme égale à deux angles * pr. 2. droits*; ainsi en désignant l'angle droit par D, on aura $c'=2D-x'$; donc la somme des angles du triangle $a'c'b'$ sera

$$2D+a'+b'-x'.$$

Mais on peut concevoir que le triangle $a'c'b'$ varie dans ses angles et ses côtés, de manière à représenter les triangles successifs qui naissent ultérieurement de de la même construction et s'approchent de plus en plus de la limite où les angles a' et b' seraient nuls. Dans cette limite la droite $a'c'd'$ se confondant avec $a'b'$, les trois points a', c', b', finissent par être exactement en ligne droite; alors les angles b' et x' deviennent nuls en même tems que a', et la quantité $2D+a'+b'-x'$, qui mesure la somme des trois angles du triangle $a'c'b'$, se réduit à $2D$, donc *dans tout triangle la somme des trois angles est égale à deux angles droits.*

Corollaire I. Deux angles d'un triangle étant donnés, ou seulement leur somme, on connaîtra le troisième en retranchant la somme de ces angles de deux angles droits.

II. Si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, chacun à chacun, le troisieme de l'un sera égal au troisieme de l'autre, et les deux triangles seront équiangles entre eux.

III. Dans un triangle il ne peut y avoir qu'un seul angle droit; car s'il y en avait deux, le troisieme devrait être nul; à plus forte raison un triangle ne peut-il avoir qu'un seul angle obtus.

IV. Dans un triangle rectangle la somme des deux angles aigus est égale à un angle droit.

V. Dans un triangle équilatéral chaque angle est le tiers de deux angles droits ou les deux tiers d'un angle droit. Donc si l'angle droit est exprimé par 1, l'angle du triangle équilatéral le sera par $\frac{2}{3}$.

VI. Dans tout triangle ABC si on prolonge le côté AB vers D, l'angle extérieur CBD sera égale à la somme des deux intérieurs opposés A et C; car en ajoutant de part et d'autre ABC, les deux sommes sont égales à deux angles droits.

[...]

PROPOSITION XXIII.

THÉORÈME.

fig. 37. *Si deux lignes droites AB, CD, font avec une troisieme EF, deux angles intérieurs d'un même côté, dont la somme soit plus petite ou plus grande que deux angles droits, les lignes* AB, CD, *prolongées suffisamment, devront se rencontrer.*

Soit 1°. La somme BEF+EED plus petite que deux angles droits, menez FG de manière que l'angle EFG=AEF, vous aurez la somme BEF+EFG égale à la somme BEF+AEF et par conséquent égale à deux angles droits; et puisque BEF+EFD est plus petite que deux angles droits, la droite DF sera comprise dans l'angle EFG.

Par le point F tirez une oblique FM qui rencontre AB en M, l'angle AMF sera égal à GFM, puisqu'en ajoutant de part et d'autre une même quantité EFM +FEM, les deux sommes sont égales chacune à deux angles droits. Prenez ensuite MN=FM et joignez FN; l'angle AMF, extérieur au triangle FMN, est égal à la somme des deux intérieurs opposés MFN, MNF*; ceux-ci sont égaux entre eux, puisqu'ils sont opposés à des côtés égaux MN, FM; donc l'angle AMF ou son égal MFG est double de MFN; donc la droite FN divise en deux parties égales l'angle GFM et rencontre la ligne AB en un point N situé à la distance MN=FM.

* pr. 19. cor. 6.

Il suit de la même démonstration que si on prend NP=FN, on déterminera sur la ligne AB le point P où aboutit la droite FP qui fait l'angle GFP égal à la moitié de l'angle GFN, ou au quart de l'angle GFM.

On peut donc prendre ainsi successivement la moitié, le quart, le huitième, etc. de l'angle GFM, et les lignes qui opèrent ces divisions, rencontreront la ligne

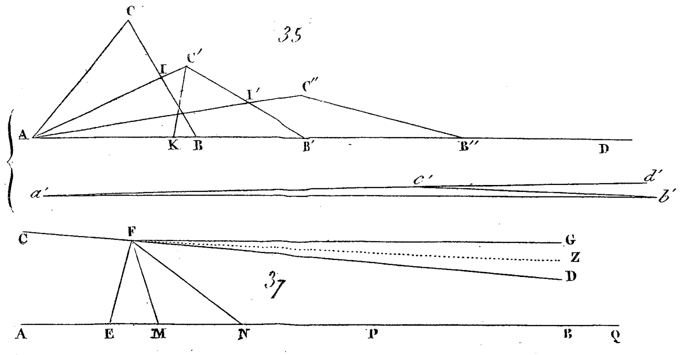
AB en des points de plus en plus éloignés, mais faciles à déterminer, puisque MN=FM, NP=FN, PQ=PF etc. On peut même observer que chaque distance d'un de ces points d'intersection au point fixe F, n'est pas tout à fait double de la distance du point d'intersection précédent, car FN par exemple est moindre que FM+MN ou 2FM; on a pareillement FP < 2FN, FQ < 2FP, etc.

Mais en continuant de sous-diviser l'angle GFM en raison double, on parviendra bientôt à un angle GFZ plus petit que l'angle donné GFD, et il sera encore vrai que FZ prolongée rencontre AB en un point déterminé : donc à plus forte raison la droite FD comprise dans l'angle EFZ, rencontrera AB.

Supposons 2° que la somme des deux angles intérieurs AEF+CFE est plus grande que deux angles droits, si l'on prolonge AE vers B et CF vers D, la somme des quatre angles AEF, BEF, CFE, EFD, sera égale à quatre angles droits; donc si de cette somme on retranche AEF+CFE plus grande que deux angles droits, il restera la somme BEF+EFD plus petite que deux angles droits. Donc suivant le premier cas les lignes EB, FD, prolongées suffisamment, doivent se rencontrer.

Corollaire. Par un point donné F on ne peut mener qu'une seule parallèle à la ligne donnée AB; car ayant tiré FE à volonté, il n'y a qu'une ligne FG qui fasse la somme des deux angles BEF+EFG, égale à deux angles droits; toute autre droite FD ferait la somme des deux angles BEF+EFD plus petite ou plus grande que deux droits; et rencontrerait par conséquent la ligne AB.

[...]



[...]

développement, il pourra être considéré comme un musée modèle. »

C'est à l'aide des collections du Musée Fleuriau que le département de la Charente-Inférieure a été en mesure de fournir son contingent à la description scientifique de la France, à la satifaction du Comité des Sociétés savantes. M. Théodore Vivier a rédigé la partie géologique et minéralogique; M. Édouard Beltremieux, la partie zoologique et paléontologique; MM. Faye et de Richemond, la partie botanique; MM. Fromentin et Sauvé, l'anthropologie, et M. Potel, la météorologie.

La salle géologique du Musée renferme un plan en relief du pertuis d'Antioche et des rades de la Rochelle et de l'île d'Aix, ainsi qu'une empreinte en plâtre qui permet d'en obtenir plusieurs exemplaires. Il n'est pas besoin d'insister pour faire ressortir l'utilité pratique de ce travail, qui se recommande par sa consciencieuse exactitude.

Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données, par M. Charles Méray, professeur à la Faculté des sciences de Dijon.

I. La théorie des quantités incommensurables, celle des séries, des quadratures, et en général toutes les parties des mathématiques où il y a lieu de considérer des limites de quantités variables, ont pour fondement essentiel les principes suivants :

1° Une quantité variable v, qui prend successivement les valeurs en nombre indéfini :

$$v_1, v_2, \ldots, v_n \ldots\ldots$$

tend vers une certaine limite, si les termes de cette limite vont toujours soit en augmentant, soit en diminuant, pourvu qu'ils restent dans le premier cas inférieurs, dans le second supérieurs à une quantité fixe quelconque.

2° La variable v, définie comme ci-dessus, jouit encore de la même propriété si la différence $v_{n+p} - v_n$ tend vers zéro quand n augmente indéfiniment, quelque relation qu'on puisse établir entre n et p.

Jusqu'à présent on a regardé ces propositions comme des axiomes.

Toutefois, en les examinant avec attention, j'ai reconnu qu'on peut ramener la seconde à la première, dont le caractère d'évidence est plus prononcé, et même finalement qu'il est possible de se passer de l'une et de l'autre. En procédant de cette manière, on suit, il est vrai, une voie plus détournée, mais elle est plus sûre, et on échappe à la nécessité d'introduire dans le raisonnement la conception assez obscure de nombre incommensurable. C'est ce que je me propose d'exposer aussi brièvement que le commande la nature élémentaire et aride d'un pareil sujet.

II. Je commence par la démonstration du dernier principe; ce point n'est pas sans intérêt, surtout si l'on n'adopte pas les idées que je proposerai tout à l'heure. On n'oubliera pas que j'admets en ce moment l'exactitude de l'autre proposition.

1° *Quel que soit le nombre n il existe deux quantités l_k, L_k telles que l'on a*

$$l_k < v_n < L_k,$$

pour toute valeur de n supérieure à k.

En effet, si la limite supérieure L_k n'existait pas, v_n pourrait être rendue plus grande que toute quantité donnée, et il serait possible de choisir successivement et indéfiniment les nombres k', k'', k''' . . . de manière à obtenir :

$$v_{k'} > v_k + a, \quad v_{k''} > v_{k'} + a, \quad v_{k'''} > v_{k''} + a, \ldots$$

où a désigne une quantité positive quelconque. Or on en conclurait, contrairement à l'hypothèse, qu'en attribuant à n les valeurs successives $k, k', k'', k''', \ldots$, qui croissent à l'infini, et à p les valeurs correspondantes $k'-k$, $k''-k'$, $k'''-k''$, ... la différence $v_{n+p} - v_n$ conserverait une valeur supérieure à a.

L'existence de l_k s'établit de la même manière.

2° *Quel que soit k, on peut, sauf à prendre h suffisamment grand, supposer à la fois ou*

$$l_h > l_k, \quad L_h \leqq L_k;$$

ou

$$l_h \geqq l_k, \quad L_h < L_k.$$

Sinon, en effet, concevons deux quantités l', L', dont la seconde surpasse la première et qui satisfassent à toutes ces conditions, c'est-à-dire telles que l'on ait :

$$l_k \leqq l' < L'' < L_k.$$

Quelque valeur de v que l'on considère, il en existera de rangs plus éloignés qui seront les unes égales ou supérieures à L', les autres égales ou inférieures à l'; car autrement on pourrait prendre soit $l_h = l'$, soit $L_h = L'$. Ainsi on peut trouver un nombre h assez grand pour avoir $v_h \geqq L'$, puis un autre $h' > h$ qui fasse $v_{h'} \leqq l'$, puis un troisième $h'' > h$ qui ramène la première inégalité $v_{h''} \geqq L'$, et ainsi de suite alternativement jusqu'à l'infini.

Il arriverait donc, contrairement à l'hypothèse, que la différence $v_{n+p} - v_n$ conserverait une valeur numérique au moins égale à $L' - l'$ pour les valeurs indéfiniment croissantes $h, h', h'', \ldots$ attribuées à n, et les valeurs correspondantes $h' - h, h'' - h', h''' - h'', \ldots$ imposées à p.

On pourra ainsi assigner successivement à v deux premières limites l_{h_0}, L_{h_0}, puis deux autres l_{h_1}, L_{h_1}, renfermées (l'une au moins) dans l'intervalle des précédentes, puis deux nouvelles l_{h_2}, L_{h_2}, encore plus rapprochées que celles-ci, et cela indéfiniment.

3° *Si les termes de la suite $l_{h_0}, l_{h_1}, l_{h_2}, \ldots$ ne finissent pas par conserver une valeur constante, ils tendent nécessairement vers une certaine limite.*

Il en est de même pour ceux de $L_{h_0}, L_{h_1}, L_{h_2}, \ldots$.

Car alors les premiers vont toujours en augmentant sans pouvoir surpasser L_{h_0}, puisqu'ils sont inférieurs à des valeurs de v, elles-mêmes inférieures à L_{h_0}. Les derniers diminuent sans cesse en restant de même au-dessus de l_{h_0}, et on peut appliquer à ces deux suites l'axiome I.

Nous nommerons l, L les limites de ces suites ou bien les valeurs constantes que leurs termes finissent par conserver. Cette dernière particularité ne peut pas avoir lieu pour toutes deux à la fois (2°).

4° *Les quantités l, L sont égales.*

Car autrement on aurait $l < L$, et la considération de deux quantités l', L', choisies de manière à satisfaire aux conditions

$$l < l' < L' < L,$$

amènerait, comme ci-dessus (2°), à trouver pour n des valeurs croissant à l'infini, et pour p des valeurs correspondantes qui maintiendraient la valeur numérique de $v_{n+p} - v_n$ au moins égale à $L' - l'$.

5° *La variable v converge vers λ, valeur commune de l, L.*

En effet, les quantités $\lambda - l_{n_i}$, $\lambda - L_{n_i}$ sont infiniment petites, et par suite aussi leur différence $L_{n_i} - l_{n_i}$. Or en valeur absolue celle-ci surpasse $\lambda - v_{n_i}$, donc cette dernière a pour limite zéro.

Maintenant faisons croître n indéfiniment d'une manière quelconque, on a

$$\lambda - v_n = (\lambda - v_{n_i}) + (v_{n_i} - v_n),$$

où on peut supposer n_i supérieur à n, et où par suite, en vertu de l'hypothèse admise, $v_{n_i} - v_n$ est une quantité infiniment petite. Donc, comme on voulait le prouver, v_n converge vers une certaine limite λ.

Une fois démontrée pour les quantités réelles, cette proposition s'étend d'elle-même aux quantités imaginaires.

III. Revenons au premier principe. Toute méthode propre à constater l'existence d'une quantité remplissant des conditions déterminées repose essentiellement sur quelque procédé à l'aide duquel on pourrait calculer d'après les données la *valeur* même de cette inconnue. Or les notions fournies par notre axiome sur la nature de la variable ne permettent pas à elles seules de découvrir la valeur de sa limite; donc elles ne suffisent pas non plus à en établir l'existence. Et l'axiome lui-même devient inutile dès qu'il s'agit d'une variable dont les données accessoires de la question permettent de calculer la limite. Dans ce cas, en effet, on n'a que faire de savoir que l'existence de la limite tient à ce que la variable se modifie progressivement de telle ou telle manière.

Mais, en outre, n'est-ce pas en quelque sorte se contredire soi-même que de vouloir rattacher l'existence *analytique* d'un objet à une hypothèse qui ne l'assujettit à correspondre à aucun nombre, et qui, partant, ne lui confère pas le seul titre auquel il soit permis de l'introduire dans les calculs? Je suis porté à le croire et à attribuer précisément à cette cause la difficulté qu'on éprouve toujours à approfondir la notion de quantité incommensurable.

Ainsi la théorie dont nous nous occupons repose encore sur une vérité qui sera toujours précaire et sur une notion qu'il ne paraît pas facile de bien préciser. Mais les énoncés actuels dissimulent des propriétés spéciales des nombres proprement dits; il suffira de les en extraire pour tourner ce double obstacle. C'est ainsi qu'il a fallu procéder pour ressaisir la véritable nature des quantités imaginaires oubliée un instant dans le développement rapide de cette admirable conception.

IV. Je réserverai maintenant la dénomination de nombre ou quantité aux entiers et fractions; j'appellerai *variable progressive* toute quantité v qui reçoit successivement diverses valeurs en nombre illimité.

Soit v_n la valeur de rang n de v : si n croissant à l'infini il existe un nombre V tel que, à partir d'une valeur convenable de n, $V - v_n$ reste inférieure à une quantité quelconque aussi petite qu'on puisse la supposer, on dit que v a pour limite V, et on voit immédiatement que $v_{n+p} - v_n$ a pour limite zéro, quelle que soit la loi de croissance simultanée imposée à n et p.

S'il n'y a point de semblable nombre, il n'est plus permis, analytiquement parlant, d'affirmer que v a une limite; mais, si dans ce cas la différence $v_{n+p} - v_n$ converge toujours vers zéro, la nature de v offre une ressemblance extraordinaire avec celle des variables réellement douées de limites. Il nous faut un terme spécial pour exprimer la propriété remarquable de cette différence dont il s'agit : je dirai que la variable progressive v est *convergente*, qu'elle ait ou non une limite numériquement assignable.

L'existence d'une limite pour une variable convergente rend facile l'énonciation de certaines de ses propriétés qui ne dépendent point de cette particularité, et qu'il serait souvent beaucoup plus incommode de formuler directement. On conçoit donc qu'il soit avantageux, dans le cas où il n'y a point de limite, de conserver le langage abrégé propre à celui où il en existe une; et, pour exprimer la convergence de la variable, on dira simplement : *elle a une limite (fictive)*.

Voici un premier exemple de l'utilité de cette convention : si, m, n augmentant tous deux à l'infini, la différence $u_m - v_n$ de deux variables convergentes tend vers zéro pour une certaine dépendance mutuelle entre ces indices, on prouve aisément qu'elle reste infiniment petite pour toute autre loi; je dirai alors que les variables u, v sont *équivalentes*, et on voit de suite que deux variables équivalentes à une troisième le sont entre elles. Quand $u_m - v_n$ ne tend pas vers zéro, on prouve que cette différence est convergente et reste équivalente à elle-même, soit que la relation de m à n vienne à changer,

soit que l'on remplace u, v par des variables respectivement équivalentes.

Maintenant supposons que u, v aient des limites U, V : si u, v sont équivalentes, U, V seront égales, sinon $U - V$ sera la limite de $u_m - v_n$, et son signe celui que cette quantité finira par conserver. Supposons, au contraire, que u, v n'aient point de limites (numériques) : il y aura avantage à dire toujours (au figuré) qu'elles ont des limites égales, si elles sont équivalentes, sinon que la limite (fictive) de u est supérieure ou inférieure à celle de v, selon que $u - v$ finit par rester positive ou négative.

On pourra nommer valeur de la limite réelle ou fictive de v *approchée à δ près* tout nombre λ, tel que la différence $\lambda - v_n$ finisse par conserver une valeur numérique inférieure à δ. Enfin un signe quelconque propre à rappeler, à la fois, la nature des calculs qui définissent v_n et les valeurs numériques des quantités sur lesquelles on doit les exécuter, désignera commodément dans le langage, la limite fictive; le même signe pourra représenter dans les formules le nombre indéterminé qui en représente la valeur approchée, calculée à un degré d'approximation de plus en plus et indéfiniment élevé, c'est-à-dire, au fond, toute variable progressive équivalente à v.

V. Ces considérations s'appliquent à tout ce que l'on nomme nombres incommensurables; nous allons chercher ce qu'il faut entendre par une fonction de semblables nombres, et nous commencerons par l'examen des fonctions rationnelles.

Une fonction rationnelle $f(x, y, z, \ldots)$ est continue, quand la différence $f(x+h, y+k, \ldots) - f(x, y, \ldots)$ converge vers zéro lorsque $h, k, \ldots$ y tendent eux-mêmes, quelles que soient et la dépendance mutuelle de ces accroissements et la manière dont puissent varier en même temps, x, y, z, ... Nous exceptons, bien entendu, les valeurs des variables qui annuleraient le dénominateur de la fonction.

Cela posé, substituons aux nombres x, y, z, ... des variables progressives convergentes $u_m, v_n, w_p, \ldots$ et faisons croître indéfiniment les indices. On démontrera facilement la proposition suivante :

La variable progressive $\omega = f(u_m, v_n, w_p, \ldots)$ est convergente et reste équivalente à elle-même, soit que l'on change la dépendance mutuelle des *indices, soit que l'on remplace $u_m, v_n, w_p, \ldots$ par d'autres variables respectivement équivalentes.*

Quand $u, v, w, \ldots$ ont des limites (numériques) $U, V, W, \ldots$, la quantité $\Omega = f(U, V, W, \ldots)$ est la limite de ω, et l'énonciation de ce fait équivaut à celle du théorème précédent. Mais, si quelques-unes de ces quantités en sont dépourvues, il sera toujours permis, pour exprimer commodément la dépendance de ω à $u, v, w, \ldots$, de dire que ω a une limite réelle ou fictive égale à la substitution des limites réelles ou fictives de $u, v, w, \ldots$, à ces variables elles-mêmes dans $f(u, v, w, \ldots)$, et d'écrire symboliquement :

$$\lim. \omega = f(U, V, W, \ldots).$$

J'ai admis implicitement que les coefficients de $f(x, y, z, \ldots)$ sont des nombres proprement dits ; s'il en est autrement, soient a, $b, c, \ldots$, des variables progressives ayant ces coefficients $A, B, C, \ldots$ pour limites fictives. La relation de ω à $u, v, w, \ldots$ d'une part, a, b, c, d'autre part, s'exprimera toujours par l'égalité symbolique :

$$\lim. \omega = f(U, V, W, \ldots, A, B, C, \ldots);$$

mais on pourra, comme ci-dessus, la réduire à :

$$\lim. \omega = f(U, V, W, \ldots),$$

en sous-entendant qu'il s'agit seulement de la dépendance qu'établit entre ω et $u, v, w, \ldots$ la nature de la fonction rationnelle, et la condition pour $a, b, c, \ldots$ de rester équivalents à eux-mêmes.

VI. Soit ω une variable dont la valeur résulte d'opérations rationnelles déterminées exécutées sur des variables progressives convergentes $u_m, v_n, w_p, \ldots$, et sur des nombres entiers $\mu, \nu, \varpi, \ldots$; si la nature des calculs est telle que ω soit convergente et reste équivalente à elle-même quand les nombres $m, n, p, \ldots, \mu, \nu, \varpi, \ldots$, croissent à l'infini suivant une loi quelconque, et aussi quand on substitue à $u, v, w, \ldots$ d'autres variables équivalentes quelconques, on peut dire encore, soit au propre, soit au figuré, que ω a une limite. Et $U, V, W, \ldots$ désignant les limites réelles ou fictives de $u, v, x, \ldots$, on écrira :

$$\lim. \omega = f(U, V, W, \ldots),$$

où le signe f rappelle la nature des calculs qui définissent ω.

Si ω équivaut à quelque fonction rationnelle de $u, v, w, \ldots$ à coefficients invariables (au moins sous le rapport de leur équivalence), $f(U, V, W, \ldots)$ représentera la même fonction de $U, V, W, \ldots$, sinon on aura obtenu une fonction transcendante (ou irrationnelle) de ces quantités idéales.

Telle est, à notre point de vue, l'idée la plus générale qu'on puisse se faire d'une fonction transcendante; il n'en est aucune à laquelle on ne puisse assigner une semblable origine.

A présent, on doit apercevoir en quoi consiste une équation quelconque entre des quantités commensurables ou incommensurables: c'est l'énonciation abrégée et pittoresque du fait que certains calculs opérés sur la valeur numérique des unes, sur des variables progressives qui ont les autres pour limites fictives, et au besoin sur des nombres entiers croissant à l'infini, donnent une variable progressive qui tend vers zéro, quelque relation que l'on établisse entre ces nombres entiers et de quelque manière que l'on change la nature des variables progressives soumises au calcul, pourvu qu'elles restent équivalentes à elles-mêmes. Il faut considérer la conception de fonction de quantités incommensurables comme un simple moyen de faciliter la description, la classification et la notation des innombrables relations de cette espèce que l'on peut imaginer entre des variables convergentes diverses.

VII. En résumé, à toute quantité dite incommensurable correspondent une infinité de variables progressives (commensurables) convergentes, dont l'équivalence peut s'exprimer en disant qu'elles ont pour limite commune la quantité dont il s'agit.

A toute fonction correspond une variable progressive convergente se formant rationnellement au moyen d'entiers indéfiniment croissants, et d'autres variables progressives commensurables, de manière à rester équivalente à elle-même dans toutes ses déterminations.

Enfin, toute relation entre des quantités commensurables ou incommensurables exprime, pour une certaine variable progressive commensurable dépendant des données d'une manière qui varie avec la nature de la relation, la propriété de converger constamment vers zéro.

Les quantités imaginaires, n'étant que des combinaisons de deux quantités réelles, donnent lieu aux mêmes considérations.

Il me reste à éclaircir ces généralités par quelques exemples.

1° On peut imaginer une infinité de variables progressives dont les carrés tendent vers un nombre donné a, et on démontre facilement qu'elles sont toutes convergentes et équivalentes. C'est ce fait très-positif que l'on exprime en disant que *tout nombre a une racine carrée*, proposition qui n'est pas vraie quand on laisse aux mots leur sens littéral.

Quand a n'est pas carré, $\sqrt{a}$ désignera dans le langage cette racine fictive, et dans les calculs toute variable progressive dont le carré tend vers a. Si par des voies différentes on obtient une variable convergente dont on puisse constater l'équivalence à l'une de celles dont le carré tend vers a, on dira que sa limite est égale à $\sqrt{a}$.

La relation

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$$

signifie que α, β, γ étant des variables commensurables quelconques, dont les carrés tendent vers a, b, ab, la différence $\alpha\beta-\gamma$ tend vers zéro.

La notation $\sqrt{\sqrt{a}}$ rappellera qu'il existe des variables progressives toutes équivalentes entre elles, et telles que leurs carrés soient équivalents à toute variable dont le propre carré converge vers a. L'équation

$$\sqrt{\sqrt{a}}=\sqrt[4]{a}$$

exprime que les variables dont il s'agit sont aussi équivalentes à toute autre dont la quatrième puissance converge vers a.

2° Considérons la fonction entière :

$$u_{m,\mu}=1+\frac{x_m}{1}+\frac{x_m^2}{1.2}+\cdots+\frac{x_m^\mu}{1.2\ldots\mu},$$

où x_m désigne une variable progressive convergente. On peut prouver que $u_{m,\mu}$ est aussi une variable convergente; qu'elle reste équivalente à elle-même quand m, μ augmentent à l'infini de toutes les manières possibles, et aussi quand on substitue à x_m une variable équivalente quelconque.

On peut encore prouver que le produit $u_{m,\mu}\times v_{n,\nu}$, où $v_{n,\nu}$ désigne une quantité progressive analogue.

$$1+\frac{y_n}{1}+\frac{y_n^2}{1.2}+\cdots+\frac{y_n^\nu}{1.2\ldots\nu},$$

demeure équivalent à la variable :

$$1+\frac{x_m+y_n}{1}+\frac{(x_m+y_n)^2}{1.2}+\cdots+\frac{(x_m+y_n)^\varpi}{1.2\ldots\varpi}$$

pour toutes les manières possibles de faire croître à l'infini les nombres m, μ, n, ν, ϖ.

Tous ces résultats s'expriment beaucoup plus simplement en feignant que x_m, y_n convergent vers des limites x, y, que $u_{m,\mu}$, $v_{n,\nu}$, tendent de même vers d'autres limites qu'on désignera par e^x, e^y, et en écrivant :

$$e^x e^y = e^{x+y}.$$

Dans la notation e^x, on doit considérer les signes $e^{\,}$ et x comme rappelant l'un la manière dont $u_{m,\mu}$ se forme avec μ, et x à quoi doit être équivalente la variable progressive sur laquelle il faut opérer pour obtenir $u_{m,\mu}$.

3° Le problème inverse, consistant à trouver pour x_m une variable convergente qui fasse tendre la fonction

$$1+\frac{x_m}{1}+\frac{x_m^2}{1.2}+\cdots+\frac{x_m^\mu}{1.2\ldots\mu}$$

vers un nombre donné u, ou qui la rende équivalente à une certaine variable convergente u_n, est toujours possible. Il admet pour solution une infinité de variables toutes équivalentes. C'est ce qui conduit à nommer logarithme de u ou de la limite fictive du u_n la limite fictive ou réelle de x_m.

Sous l'équation

$$l(uv)=l(u)+l(v)$$

on peut voir, comme dans l'exemple précédent, une certaine relation entre des nombres variables tous commensurables.

Lobachevski

ETUDES GEOMETRIQUES

sur la

THEORIE DES PARALLELES

Quelques-unes des théories de la géométrie élémentaire laissent encore beaucoup à désirer, et c'est à leur imperfection, je crois, qu'il faut attribuer le peu de progrès que cette science, en dehors des applications de l'analyse, a pu réaliser depuis Euclide.

Je compte parmi ces points défectueux l'obscurité qui règne sur les premières notions des grandeurs géométriques et sur la manière dont on se représente la mesure de ces grandeurs, ainsi que l'importante lacune que présente la théorie des parallèles, et que les travaux des géomètres n'ont encore pu combler. Les efforts de Legendre n'ont rien ajouté à cette théorie, cet auteur ayant été forcé de quitter la voie du raisonnement rigoureux pour se jeter dans des considérations détournées, et de recourir à des principes qu'il cherche, sans raison suffisante, à faire passer pour des axiomes nécessaires.

Mon premier essai sur les fondements de la géométrie a paru dans le *Courrier de Kasan*, pour l'année 1829. Désirant satisfaire à toutes les exigences des lecteurs, je me suis occupé ensuite de la rédaction de l'ensemble de cette science, et j'ai publié mon travail par parties dans les *Mémoires de l'Université de Kasan*, pour les années 1836, 1837, 1838, sous le titre de *Nouveaux principes de Géométrie, avec une théorie complète des parallèles*. L'étendue de ce travail a peut-être empêché mes compatriotes de suivre cette étude , qui, depuis Legendre, semblait avoir perdu son intérêt. Je n'en persiste pas moins à croire que la théorie des parallèles conserve toujours ses droits à l'attention des géomètres, et c'est pour cela que je me propose d'exposer ici ce qu'il y a d'essentiel dans mes recherches, en faisant d'abord remarquer, contrairement à l'opinion de Legendre, que les autres imperfections de principes, telles que la définition de la ligne droite, ne doivent point nous occuper ici, et sont sans aucune influence sur la théorie des parallèles.

Pour ne pas fatiguer le lecteur par une multitude de propositions dont les démonstrations n'offrent aucune difficulté, j'indiquerai seulement ici celles dont la connaissance est nécessaire pour ce qui va suivre.

---

1 – *Une ligne droite se superpose à elle-même dans toutes ses positions.* J'entends par là que, si l'on fait tourner autour de deux points de la ligne droite la surface qui la contient, cette ligne ne change pas de place.

2 – Deux lignes droites ne peuvent se couper en deux points.

3 – Une ligne droite, suffisamment prolongée dans les deux sens, pourra dépasser toute limite, et partagera ainsi en deux parties toute portion de plan limitée.

4 – Deux lignes droites perpendiculaires à une troisième, et situées dans un même plan que cette troisième, ne peuvent se couper, quelque loin qu'on les prolonge.

5 – Une ligne droite coupera toujours une autre droite, lorsqu'elle aura des points situés de part et d'autre de celle-ci.

6 – Des angles opposés par le sommet et ayant leurs côtés situés sur les prolongements les uns des autres sont égaux. Cette proposition est vraie aussi pour les angles dièdres.

7 – Deux lignes droites ne peuvent se couper, lorsqu'elles sont coupées par une troisième sous des angles égaux.

8 – Dans un triangle rectiligne, à des côtés égaux sont opposés des angles égaux, et réciproquement.

9 – Dans un triangle rectiligne, à un plus grand côté est opposé un plus grand angle. Dans un triangle rectangle, l'hypothénuse est plus grande que chacun des côtés de l'angle droit, et les deux angles adjacents à l'hypothénuse sont aigus.

10 – Deux triangles rectilignes sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal et deux angles égaux, ou deux côtés égaux comprenant un angle égal, ou deux côtés égaux et l'angle opposé au plus grand de ces deux côtés égal, ou enfin les trois côtés égaux.

[...]

Les propositions que nous donnerons dans ce qui va suivre seront accompagnées de leurs explications et de leurs démonstrations.

16 – Toutes les droites tracées par un même point dans un plan peuvent se distribuer, par rapport à une droite donnée dans ce plan,

en deux classes, à savoir : en droites *qui coupent* la droite donnée, et en droites *qui ne la coupent pas*. La droite qui forme la *limite* commune de ces deux classes est dite *parallèle* à la droite donnée.

Soit abaissée, du point A (fig.1), sur la droite BC, la perpendiculaire AD, et soit élevée au point A, sur la droite AD, la perpendiculaire AE. Dans l'angle droit EAD, il arrivera ou que toutes les droites partant du point A rencontreront la droite DC, comme le fait AF, par exemple ; ou bien que quelques-unes d'entre elles, comme la perpendiculaire AE, ne rencontreront pas DC. Dans l'incertitude si la perpendiculaire AE est la seule droite qui ne rencontre pas DC, nous admettrons la possibilité qu'il existe encore d'autres lignes, telles que AG, qui ne coupent pas DC, quelque loin qu'on les prolonge. En passant des lignes AF, qui coupent CD, aux lignes AG, qui ne coupent pas CD, on trouvera nécessairement une ligne AH, parallèle à DC, c'est-à-dire une ligne d'un côté de laquelle les lignes AG ne rencontrent pas la ligne CD, tandis que, de l'autre côté, toutes les lignes AF rencontrent CD. L'angle HAD, compris entre la parallèle AH et la perpendiculaire AD, sera dit *l'angle de parallélisme*, et nous le désignerons par $\Pi(p)$, p représentant la distance AD.

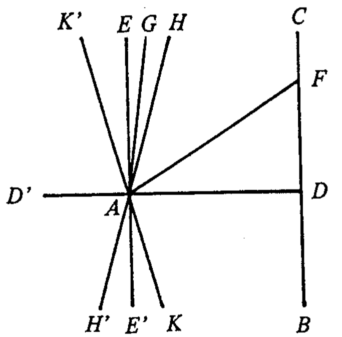


Fig. 1

Si $\Pi(p)$ est un angle droit, le prolongement AE' de la perpendiculaire AE sera également parallèle au prolongement DB de la droite DC ; et nous ferons remarquer, à ce propos, que, par rapport aux quatre angles formés au point A par les perpendiculaires AE, AD et par leurs prolongements AE', AD', toute droite partant du point A est comprise, soit par elle-même, soit par son prolongement, dans un des deux angles droits dirigés vers BC, de sorte qu'à l'exception de la seule parallèle EE', toutes ces droites, prolongées suffisamment dans les deux sens, devront couper la droite BC.

Si l'on a $\Pi(p) < \frac{\pi}{2}$, alors, de l'autre côté de AD, il y aura une autre droite AK, faisant avec AD le même angle $DAK = \Pi(p)$, laquelle sera parallèle au prolongement DB de la ligne DC ; de sorte que, dans cette hypothèse, il faut distinguer encore le *sens du parallèlisme*. Toutes les autres droites comprises dans l'intérieur des deux angles droits dirigés vers BC appartiennent aux droites *sécantes*, lorsqu'elles sont situées dans l'angle $HAK = 2\,\Pi(p)$ des deux parallèles ; elles appartiennent, au contraire, aux droites *non sécantes* AG, lorsqu'elles sont situées de l'autre côté des parallèles AH, AK, à l'intérieur des deux angles $EAH = \frac{\pi}{2} - \Pi(p)$, $E'AK = \frac{\pi}{2} - \Pi(p)$, entre les parallèles et la droite EE', perpendiculaire sur AD. De l'autre côté de la perpendiculaire EE', les prolongements AH', AK' des parallèles AH, AK seront également parallèles à BC. Parmi les autres droites, celles qui sont dans l'angle $K'AH'$ appartiendront aux droites sécantes, celles qui sont dans les angles $K'AE$, $H'AE'$, aux droites non sécantes.

D'aprés cela, si l'on suppose $\Pi(p) = \frac{\pi}{2}$, les droites ne pourront être que sécantes ou parallèles. Mais, si l'on admet que $\Pi(p) < \frac{\pi}{2}$, on devra considérer alors deux parallèles, l'une dans un sens, l'autre dans le sens opposé ; de plus, les autres droites devront se distinguer en *non sécantes* et en *sécantes*. Dans les deux hypothèses, le caractère du parallèlisme est que la ligne devient sécante par la moindre déviation vers le côté où est située la parallèle ; de sorte que, si AH est parallèle à DC, toute ligne AF, faisant, du côté de DC, un angle HAF aussi petit que l'on voudra avec AH, coupera nécessairement DC.

17 – *Une ligne droite conserve le caractère du parallélisme en tous ses points.*

Soit AB (fig. 2) parallèle à CD, et AC perpendiculaire sur CD. Considérons deux points pris à volonté sur la ligne AB et sur son prolongement au delà de la perpendiculaire. Supposons le point E situé, par rapport à la perpendiculaire, du même côté que celle des directions de AB qui est considérée comme parallèle à CD. Abaissons du point E sur CD la perpendiculaire EK, et menons ensuite EF de manière qu'elle tombe à l'intérieur de l'angle BEK. Joignons les points A et F par une droite, dont le prolongement devra rencontrer CD quelque part en G (prop. 16). Nous obtiendrons ainsi un triangle ACG, dans l'intérieur duquel pénétrera la ligne EF. Cette dernière ligne, ne pouvant rencontrer AC, par suite de la construction, et ne pouvant pas non plus rencontrer AG ni EK pour la seconde fois (prop. 2), coupera nécessairement CD quelque part, en H (prop. 3).

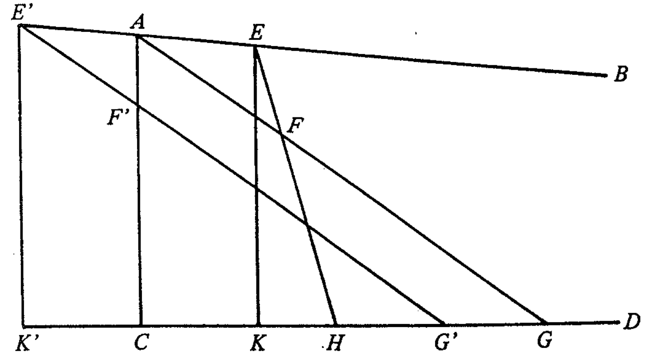


Fig. 2

Soit maintenant E' un point sur le prolongement de AB, et $E'K'$ une perpendiculaire abaissée sur le prolongement de CD. Menons la ligne $E'F'$, faisant avec AE' un angle $AE'F'$ assez petit pour couper AC quelque part en F'. Tirons du point A la ligne AF, faisant avec AB un angle égal à $AE'F'$, et dont le prolongement coupera CD en G (prop. 16). On formera ainsi un triangle AGC, dans lequel pénétrera le prolongement de la ligne $E'F'$. Or cette ligne ne peut pas rencontrer une seconde fois AE ; elle ne peut pas non plus couper AG, puisque l'angle $BAG = BE'G'$ (prop. 7). Il faudra donc qu'elle rencontre CD quelque part en G'.

Donc, quels que soient les points E, E', d'où partent les lignes EF, $E'F'$, et quelque peu qu'elles s'ecartent de la ligne AB, elles couperont toujours la ligne CD, à laquelle AB est parallèle.

18 – *Deux droites sont toujours réciproquement parallèles.*

Soit AC (fig. 3) une perpendiculaire sur CD, et AB une parallèle à CD. Menons par le point C la ligne CE, faisant avec CD un angle aigu quelconque ECD, et abaissons du point A sur CE la perpendiculaire AF. Nous formerons ainsi un triangle rectangle ACF, dont l'hypothénuse AC sera plus grande que le côté

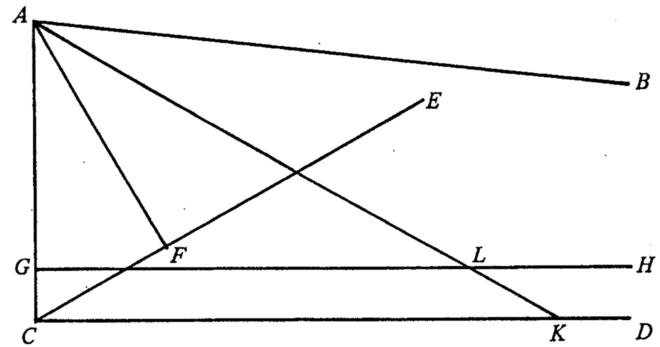


Fig. 3

AF de l'angle droit (prop. 9). Faisons $AG = AF$, et plaçons AF sur AG; AB et FE prendront les positions AK et GH, de sorte que l'on aura l'angle $BAK = FAC$. Il faudra alors que AK coupe la droite DC quelque part en K (prop. 16), et il en résultera un triangle AKC, dans lequel la perpendiculaire GH rencontrera la ligne AK en L (prop. 3), et déterminera par là la distance AL du point A au point de rencontre de la ligne CE avec AB.

De là résulte que CE coupera toujours AB, quelque petit que soit l'angle ECD. Donc CD est parallèle à AB (prop. 16).

[...]

[...]

On voit aisément que, lorsque p diminue, l'angle α croît, et qu'il s'approche de $\frac{\pi}{2}$, lorsque p tend vers zéro. Au contraire, lorsque p croît, l'angle α diminue,

, et il s'approche de plus en plus de 0, à mesure que p tend vers ∞. Comme on peut choisir arbitrairement l'angle que l'on désignera par la notation $\Pi(p)$, lorsque p sera exprimé par un nombre négatif, nous poserons la relation

$$\Pi(p) + \Pi(-p) = \pi,$$

relation qui aura lieu pour toutes les valeurs, tant positives que négatives, de p, aussi bien que pour $p = 0$.

24 – *Si l'on prolonge de plus en plus loin deux lignes parallèles dans le sens de leur parallèlisme, elles s'approcheront de plus en plus l'une de l'autre.*

Elevons sur la ligne AB (fig. 11) deux perpendiculaires $AC = BD$, et joignons leurs extrémités C et D par une droite. Le quadrilatére $CABD$ aura, en A et en B, deux angles droits, et en C et D

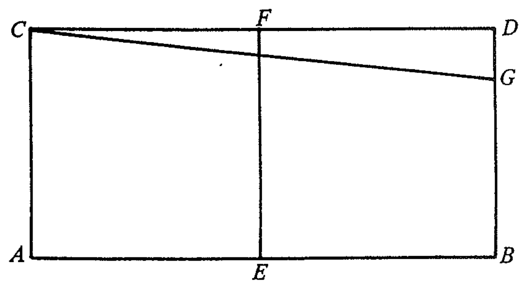


Fig. 11

deux angles aigus (prop. 22), lesquels seront égaux entre eux, comme il est aisé de s'en convaincre, si l'on imagine le quadrilatère superposé à lui-même, en plaçant la ligne BD sur AC, et la ligne AC sur BD. Partageons AB en deux parties égales, et au milieu E élevons sur AB la perpendiculaire EF, laquelle devra être en même temps perpendiculaire sur CD, puisque les quadrilatères $CAEF$, $FEBD$ coïncideront l'un avec l'autre, si l'on plie la figure totale autour de FE. Donc la ligne CD ne peut être parallèle à la ligne AB ; mais la parallèle à AB menée par le point C, savoir la ligne CG, devra s'écarter de CD vers AB (prop. 16), et retranchera de la perpendiculaire BD une portion $DG < CA$, Le point C étant pris à volonté sur la ligne CG, il en résulte que CG s'approchera d'autant plus de AB, qu'on la prolongera plus loin.

[. . .]

[...]

Les quatre équations qui exprimeront les relations entre les côtés a, b, c, et les angles opposés A, B, C, dans un triangle rectiligne seront d'après cela (équation (3), (5), (6), (7))

$$
(8)\quad
\begin{aligned}
&\sin A \ \operatorname{tang} \Pi(a) = \sin B \ \operatorname{tang} \Pi(b), \\
&\cos A \ \cos \Pi(b) \ \cos \Pi(c) + \frac{\sin \Pi(b) \ \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)} = 1, \\
&\cot A \ \sin C \ \sin \Pi(b) + \cos C = \frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)}, \\
&\cos A + \cos B \ \cos C = \frac{\sin B \ \sin C}{\sin \Pi(a)}.
\end{aligned}
$$

Si les côtés du triangle sont très petits, on pourra se contenter des déterminations approchées (prop. 36)

$$
\begin{aligned}
\cot \Pi(a) &= a, \\
\sin \Pi(a) &= 1 - \frac{1}{2} a^2, \\
\cos \Pi(a) &= a
\end{aligned}
$$

et de même pour les autres côtés b, c. Pour un tel triangle, les équations (8) deviennent donc

$$
\begin{aligned}
b \sin A &= a \sin B, \\
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \\
a \sin(A + C) &= b \sin A, \\
\cos A + \cos(B + C) &= 0.
\end{aligned}
$$

Les deux premières de ces quatre équations sont celles que fournit la géométrie ordinaire. Les deux dernières, combinées avec les premières, conduisent à la relation

$$A + B + C = \pi.$$

Donc la géométrie imaginaire se change dans la géométrie ordinaire lorsque l'on suppose les côtés d'un triangle rectiligne très petits.

J'ai publié, dans les *Mémoires de l'Université de Kasan* quelques recherches sur la mesure des lignes courbes, des figures planes, des aires et des volumes des corps, ainsi que sur l'application de la géométrie imaginaire à l'analyse ([1]).

Les équations (8) constituent par elles-mêmes une raison suffisante pour considérer comme possible l'hypothèse de la géométrie imaginaire. Il n'existe donc pas d'autre moyen que les observations astronomiques pour s'assurer de l'exactitude des calculs auxquels conduit la géométrie ordinaire. Cette exactitude s'étend très loin, comme je l'ai fait voir dans un de mes Mémoires. Ainsi, dans les triangles qui sont accessibles à nos moyens de mesure, on n'a pas encore trouvé que la somme des trois angles différât d'un centième de seconde de deux angles droits.

[...]

Beltrami

ESSAI D'INTERPRÉTATION

DE

LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE,

PAR M. E. BELTRAMI,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE BOLOGNE.

Traduit de l'italien par **M. J. HOÜEL.**

Extrait du *Giornale di Matematiche*, t. VI, 1868.

Dans ces derniers temps, le public mathématicien a commencé à s'occuper de nouvelles idées, qui semblent destinées à modifier profondément les notions que l'on s'est formées jusqu'à présent sur l'origine des vérités géométriques.

Ces idées ne sont pas de date récente. L'illustre Gauss les avait adoptées dès ses premiers pas dans la carrière scientifique, et bien qu'aucun de ses écrits n'en contienne l'exposition développée, ses lettres nous montrent à quel point il s'y était attaché, et nous témoignent de sa pleine adhésion à la doctrine de Lobatchefsky.

Nous avons cherché à nous rendre compte à nous-même des résultats auxquels conduit cette nouvelle doctrine; et, suivant un procédé qui nous semble tout à fait conforme aux bonnes traditions de l'investiga-

tion scientifique, nous avons essayé de lui trouver une base réelle.

[...]

I.

Le critérium fondamental des démonstrations de la Géométrie élémentaire consiste dans la *superposition des figures égales*.

Ce critérium n'est pas seulement applicable au plan, mais aussi à toutes les surfaces sur lesquelles il peut exister des figures égales dans différentes positions, c'est-à-dire à toutes les surfaces dont une portion quelconque peut être appliquée exactement, par simple flexion, sur une autre portion quelconque de la surface elle-même. On voit, en effet, que la rigidité des surfaces sur lesquelles les figures sont tracées, n'est pas une condition essentielle de l'application de ce critérium; par exemple, l'exactitude des démonstrations de la Géométrie plane euclidienne ne serait en rien altérée, si l'on venait à concevoir les figures comme tracées sur la surface d'un cylindre ou d'un cône, au lieu de l'être sur un plan.

Les surfaces pour lesquelles se vérifie sans restriction la propriété dont il s'agit, sont, en vertu d'un théorème célèbre de Gauss, toutes celles qui ont en chacun de leurs points le produit de leurs deux rayons de courbure principaux constant, ou, en d'autres termes, toutes celles dont la mesure de courbure est constante. Les autres surfaces n'admettent pas sans restriction l'application du principe de superposition pour la comparaison des figures qui y sont tracées, et, par suite, ces figures ne peuvent avoir une structure entièrement indépendante de leur position.

L'élément le plus essentiel des figures et des constructions de la Géométrie est la ligne droite. Le caractère spécifique de cette ligne est d'être complétement déterminée par deux de ses points seulement, en sorte que deux droites ne peuvent passer par deux points donnés de l'espace sans coïncider dans toute leur étendue. Cependant, dans la Géométrie plane, ce caractère n'est pas employé dans toute son extension, puisque, en regardant les choses de près, on voit que la droite n'est introduite dans les considérations de la Planimétrie qu'en vertu du *postulat* suivant : « En faisant coïncider deux plans, sur chacun desquels existe une droite, il suffit que les deux droites se superposent en deux points pour qu'elles se confondent dans toute leur étendue. »

Or ce caractère, ainsi limité, n'est pas particulier aux lignes droites par rapport au plan ; il subsiste encore (en général) pour les lignes géodésiques d'une surface de courbure constante, par rapport à ces surfaces. Une ligne géodésique a déjà sur une surface quelconque la propriété d'être (généralement parlant) déterminée sans ambiguïté par deux de ses points. Mais pour les surfaces de courbure constante, et pour elles seules, subsiste intégralement la propriété analogue à celle de la droite dans le plan, c'est-à-dire que : « Si l'on a deux surfaces dont la courbure soit constante en chaque point, et égale pour les deux surfaces, et si sur chacune d'elles existe une ligne géodésique, en faisant coïncider les deux surfaces de manière que les lignes géodésiques aient deux points communs, ces lignes coïncideront (généralement) dans toute leur étendue. »

Il s'ensuit de là que, sauf les cas dans lesquels cette propriété est sujette à des exceptions, les théorèmes que la Planimétrie démontre, au moyen du principe de superposition et du postulat de la droite, pour les figures formées sur le plan, subsistent également pour les figures formées d'une manière analogue sur une surface de courbure constante par des lignes géodésiques.

C'est sur cela que sont fondées les analogies multiples de la Géométrie de la sphère avec celle du plan, les droites de celui-ci correspondant aux lignes géodésiques, c'est-à-dire aux grands cercles de celle-là, et ces analogies ont été depuis longtemps déjà remarquées par les géomètres. Si d'autres analogies, d'espèce différente, mais de même origine, n'ont pas été pareillement remarquées tout d'abord, il faut l'attribuer à ce que la notion de surfaces flexibles et applicables les unes sur les autres n'est devenue familière que dans ces derniers temps.

Nous avons fait allusion à des exceptions qui peuvent détruire ou restreindre l'analogie en question. Ces exceptions existent réellement. Sur la surface sphérique, par exemple, deux points cessent de déterminer un grand cercle sans ambiguïté, quand ils sont diamétralement opposés. C'est pour cette raison que certains théorèmes de la Planimétrie n'ont pas leurs analogues sur la sphère, comme, par exemple, le suivant : « Deux droites perpendiculaires à une troisième ne peuvent se rencontrer. »

Ces réflexions ont été le point de départ de nos recherches actuelles.

[...]

[...]

On peut donc formuler les règles suivantes :

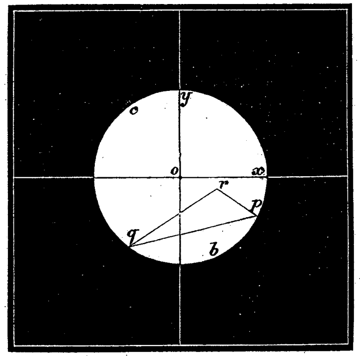
I. A deux cordes distinctes qui se coupent à l'intérieur du cercle-limite correspondent deux lignes géodésiques qui se coupent en un point à une distance finie, sous un angle différent de 0 et de 180 degrés.

II. A deux cordes distinctes qui se coupent sur la circonférence du cercle-limite correspondent deux lignes géodésiques qui concourent vers un même point à une distance infinie, et qui font en ce point un angle nul.

III. Enfin, à deux cordes distinctes qui se coupent hors du cercle-limite, ou qui sont parallèles, correspondent deux lignes géodésiques qui n'ont aucun point commun dans toute l'étendue (réelle) de la surface.

Soient maintenant pq (*fig.* 1) une corde quelconque du cercle-limite,

Fig. 1.



r un point de l'intérieur du cercle, non situé sur la corde. A cette corde correspond sur la surface une ligne géodésique $p'q'$, dirigée vers les points à l'infini p', q' (correspondants à p, q); au point r correspond un point r', situé à une distance finie et hors de la ligne géodésique $p'q'$. De ce point on peut tirer une infinité de lignes géodésiques, dont les unes rencontrent la ligne géodésique $p'q'$, et les autres ne la rencontrent pas. Les premières sont représentées par les droites qui vont du point r aux divers points de l'arc pbq ($<$ 180 degrés); les autres sont représentées par les droites qui vont du même point aux divers points de l'arc pcq ($>$ 180 degrés). Deux lignes géodésiques particulières forment le passage de l'une des catégories à l'autre : ce sont

celles qui sont représentées par les droites rp, rq, c'est-à-dire les deux lignes géodésiques qui partent de r' et rencontrent $p'q'$ à l'infini, l'une d'un côté, l'autre de l'autre côté. Comme les angles rectilignes rpq, rqp ont leurs sommets sur la circonférence du cercle-limite, il s'ensuit de là (II) que les angles géodésiques correspondants $r'p'q'$, $r'q'p'$ sont nuls, bien que les premiers soient finis. Au contraire, r étant intérieur au cercle en question, et situé hors de la corde pq, l'angle prq est différent de 0 et de 180 degrés, et par suite (I) les lignes géodésiques correspondantes $r'p'$, $r'q'$ forment en r' un angle qui diffère aussi de 0 et de 180 degrés. Donc si les lignes géodésiques $r'p'$, $r'q'$ sont dites *parallèles* à $p'q'$, à cause qu'elles marquent le passage de la catégorie de celles qui rencontrent $p'q'$ à la catégorie de celles qui ne la rencontrent pas, on peut énoncer le résultat en disant que : « Par un point (réel) quel-
» conque de la surface, on peut toujours mener *deux* lignes géodési-
» ques (réelles), parallèles à une même ligne géodésique (réelle) qui
» ne passe pas par ce point, et ces deux lignes géodésiques font entre
» elles un angle qui diffère à la fois de 0 et de 180 degrés. »

Ce résultat s'accorde, sauf la différence des termes employés, avec ce qui forme la base de la géométrie non euclidienne.

[...]

DEDEKIND : *un fondement purement arithmétique.*

Préface

Les considérations qui font l'objet de ce court essai datent de l'automne 1858. Je me trouvai alors, en tant que professeur à l'École polytechnique fédérale de Zurich, obligé pour la première fois d'exposer les éléments du calcul différentiel et je ressentis à cette occasion, plus vivement encore qu'auparavant, combien l'arithmétique manque d'un fondement véritablement scientifique. À propos du concept d'une grandeur variable qui tend vers une valeur limite fixe et notamment pour prouver le théorème que toute grandeur qui croît constamment, mais non au-delà de toute limite, doit nécessairement tendre vers une valeur limite, je cherchai refuge dans les évidences géométriques. Maintenant encore, admettre ainsi l'intuition géométrique dans le premier enseignement du calcul différentiel me semble, du point de vue didactique, extraordinairement utile, indispensable même, si l'on ne veut pas perdre trop de temps. Mais, personne ne le niera, cette façon d'introduire au calcul différentiel, ne peut aucunement prétendre avoir un caractère scientifique. Mon sentiment d'insatisfaction était alors si puissant que je pris la ferme décision de réfléchir jusqu'à ce que j'aie trouvé un fondement purement arithmétique et parfaitement rigoureux des principes de l'analyse infinitésimale.

■ Dedekind expose alors sa conception : □

Propriétés des nombres rationnels

Le développement de l'arithmétique des nombres rationnels est, à vrai dire, supposé connu ici, mais il me paraît bon de souligner, sans les discuter, quelques points principaux, afin seulement de caractériser d'emblée le point de vue que j'adopterai dans le chapitre suivant.

■ Dedekind décrit l'ensemble des nombres rationnels, qu'il appelle le système R (mais que nous désignerons par Q suivant l'usage actuel ; nous modifierons de même d'autres notations du texte). Il indique les quatre opérations et surtout la relation d'ordre. □

Mais pour notre but immédiat, une autre propriété du système Q est encore plus importante ; on peut l'exprimer ainsi : le système Q constitue un domaine ordonné, unidimensionnel, infini dans deux directions opposées.

Comparaison des nombres rationnels avec les points d'une droite

Les propriétés des nombres rationnels que l'on vient de souligner rappellent les relations réciproques de position qui existent entre les points d'une droite D. Si l'on différencie les deux directions opposées qui existent sur elle en «droite» et «gauche», et si p, q sont deux points différents, alors ou bien p est à droite de q, et en même temps q est à gauche de p, ou bien inversement q est à droite de p, et en même temps p est à gauche de q. Un troisième cas est impossible si p et q sont vraiment des points différents. Concernant cette différence de position, on a les lois suivantes :

I. Si p est à droite de q, et si q est à son tour à droite de r, p est aussi à droite de r, et l'on dit que q est situé entre les points p et r.

II. Si p, r sont deux points différents, il existe toujours une infinité de points q situés entre p et r.

III. Si p est un point déterminé de D, tous les points situés sur D se subdivisent en deux classes P_1, P_2, dont chacune contient une infinité d'individus ; la première classe P_1 embrasse tous les points p_1 situés à gauche de p, et la seconde classe P_2 comprend tous les points p_2 situés à droite de p ; le point p lui-même peut au choix être rangé dans la première ou la seconde classe. Dans tous les cas, la division de la droite D en deux classes ou portions P_1, P_2 est telle que tout point de la première classe P_1 est à gauche de tout point de la seconde classe P_2.

On sait que cette analogie existant entre les nombres rationnels et les points d'une droite devient une véritable corrélation quand on choisit sur la droite un certain point O, origine ou point-zéro, et une certaine unité de longueur pour mesurer les distances. À l'aide de cette dernière, on peut construire pour tout nombre rationnel a une longueur correspondante et si l'on reporte celle-ci sur la droite à partir du point O vers la droite ou vers la gauche selon que a est positif ou négatif, on obtient une extrémité déterminée p, qui peut être désignée comme le point correspondant au nombre a ; au nombre rationnel zéro correspond le point O. De cette manière, à tout nombre rationnel a, c'est-à-dire à tout individu dans Q correspond un point p et un seul, c'est-à-dire un individu dans D. Si par exemple aux deux nombres a, b correspondent les deux points p, q et si $a < b$, alors p est à gauche de q. Aux lois I, II, III du paragraphe précédent correspondent parfaitement les lois I, II, III de celui-ci.

Continuité de la droite.

Mais il est un fait de la plus grande importance : c'est qu'il existe sur la droite D une infinité de points ne correspondant à aucun nombre rationnel. Si en effet le point p correspond au nombre rationnel a, on sait que la longueur Op est commensurable avec l'unité de longueur invariable utilisée pour la construction, c'est-à-dire qu'il existe une troisième longueur, que l'on appelle une mesure commune et dont ces deux longueurs sont des multiples entiers. Mais les Grecs de l'Antiquité ont déjà su et montré qu'il existe des longueurs incommensurables avec une unité de longueur donnée, par exemple la diagonale du carré dont le côté est l'unité de longueur. Si l'on reporte une telle longueur sur la droite à partir du point O, on obtient une extrémité qui ne correspond à aucun nombre rationnel. Comme on peut, en outre, facilement démontrer qu'il existe une infinité de longueurs incommensurables avec l'unité de longueur, on peut affirmer : la droite D est infiniment plus riche en individus ponctuels que le domaine Q des nombres rationnels n'est riche en individus numériques.

Si maintenant l'on veut, et c'est bien ce que l'on souhaite, suivre ainsi arithmétiquement tous les phénomènes de la droite, les nombres rationnels n'y suffisent pas et il devient alors absolument indispensable de raffiner de façon essentielle l'instrument Q construit par la création des nombres rationnels, en créant de nouveaux nombres tels que le domaine des nombres devienne aussi complet, ou nous dirons tout de suite aussi «continu», que la droite. [...]

La comparaison faite ci-dessus entre le domaine Q des nombres rationnels et une droite a induit à reconnaître que le premier est lacunaire, incomplet ou discontinu, tandis que la droite doit être dite complète, non lacunaire ou continue. Mais en quoi consiste en fait cette continuité ?

Tout doit être contenu dans la réponse donnée à cette question, et elle seule fournit un fondement scientifique aux recherches portant sur tous les domaines continus. On n'obtient rien bien sûr par de vagues discours sur la connexion ininterrompue existant dans les plus infimes parties ; il s'agit d'indiquer une caractéristique de la continuité, utilisable comme base de déductions effectives. J'y ai réfléchi longtemps en vain, mais finalement j'ai trouvé ce que je cherchais. Les avis sur cette découverte seront peut-être partagés ; je crois cependant que la plupart des gens en trouveront le contenu très trivial. Il consiste en ceci. Au paragraphe précédent, on attire l'attention sur le fait que tout point p de la droite opère une division de celle-ci en deux portions telles que tout point d'une portion est à gauche de tout point de l'autre. Je trouve alors l'essence de la continuité dans la réciproque, c'est-à-dire dans le principe suivant :

«Si tous les points de la droite sont répartis en deux classes, telles que tout point de la première classe soit situé à gauche de tout point de la seconde classe, il existe un point et un seul qui opère cette partition de tous les points en deux classes, cette découpe de la droite en deux portions.»

Création des nombres irrationnels.

Les derniers mots indiquent déjà suffisamment de quelle façon le domaine Q des nombres rationnels, non continu, doit être complété en un domaine continu. Dans le paragraphe 1, on souligne (III) que tout nombre rationnel opère une division du système Q en deux classes A_1, A_2 telle que tout nombre a_1 de la première classe A_1 soit plus petit que tout nombre a_2 de la seconde classe A_2 ; le nombre a est soit le plus grand nombre de la classe A_1 soit le plus petit nombre de la classe A_2. Soit donnée maintenant une certaine partition du système Q en deux classes A_1, A_2 ayant pour seule propriété caractéristique que tout nombre a_1 dans A_1 est plus petit que tout nombre a_2 dans A_2. Nous nommerons par souci de brièveté une telle partition une «coupure», que nous désignerons par (A_1, A_2). Nous pouvons dire alors que tout nombre rationnel a «opère» une ou, à vrai dire, deux sections que nous ne considérerons cependant pas comme essentiellement différentes ; cette coupure a d'autre part la propriété suivante : ou bien il existe parmi les nombres de la première classe un nombre qui en est le plus grand, ou bien, il existe parmi les nombres de la seconde classe un nombre qui en est le plus petit. Et réciproquement, si une coupure a aussi cette propriété, elle est opérée par ce nombre rationnel qui est le plus grand ou le plus petit.

Mais on se persuadera aisément qu'il existe une infinité de coupures qui ne sont pas opérées par des nombres rationnels. L'exemple le plus immédiat en est celui-ci.

Soit n un nombre entier positif, différent du carré d'un nombre entier ; il existe alors un nombre entier positif m tel que :

$$m^2 < n < (m+1)^2.$$

Si l'on range dans la seconde classe A_2 tout nombre rationnel positif a_2 dont le carré est $> n$, et dans la première classe A_1, tous les autres rationnels a_1, alors cette répartition constitue une coupure (A_1, A_2), c'est-à-dire que tout nombre a_1 est plus petit que tout nombre a_2. Si en effet $a_1 = 0$ ou est négatif, alors a_1 est déjà pour cette seule raison plus petit que tout nombre a_2, car celui-ci est par définition positif ; mais si a_1 est positif, son carré est $\leqslant n$, et par suite a_1 est plus petit que tout nombre a_2 dont le carré est $> n$.

■ Mais cette coupure n'est pas un nombre rationnel. Pour établir ce résultat, on doit montrer d'abord qu'il n'existe pas de nombre rationnel dont le carré soit égal à n. C'est ce que fait Dedekind, à l'aide d'une suite de calculs élémentaires ; il en déduit que cela prouve son propos. □

Dans cette propriété que toutes les coupures ne sont pas opérées par des nombres rationnels, consiste le caractère incomplet ou non continu du domaine Q de tous les nombres rationnels.

Chaque fois que nous sommes en présence d'une coupure (A_1, A_2) non produite par un nombre rationnel, nous créons un nombre nouveau, *irrationnel*, x, que nous considérons comme parfaitement défini par cette coupure (A_1, A_2) ; nous dirons que le nombre x correspond à cette coupure ou qu'il opère cette coupure. Donc, à partir de maintenant, à toute coupure déterminée correspond un nombre déterminé et un seul, rationnel ou irrationnel, et nous considérons toujours deux nombres comme *différents* ou *inégaux* s'ils correspondent à deux coupures essentiellement différentes.

Continuité et nombres irrationnels, 1872.

LES AXIOMES DE LA GÉOMÉTRIE

I.— Des hypothèses qui servent de base à la géométrie (*Abhandl. der königl. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen*, Bd. XIII) par B. Riemann. — II. Des faits qui servent de base à la géométrie (*Nachrichten von d. königl. G. der Wiss. zu Göttingen*, 3 juin 1868), par H. Helmholtz. — III. *Saggio di Interpretazione della Geometria non-Euclidea*, par E. Beltrami. Naples 1868. — IV. *Theoria fondamentale degli spazj di curvatura costante*, par le même (*Annali di Matematic.*, sér. II, tome II, fasc. III, pp. 232-55). — V. Sur la transformation des expressions différentielles du second degré, par E. B. Christoffel. *Journal für reine u. angew. Mathematik*, Bd. LXX, p. 46. — VI. Recherches sur les fonctions intégrales homogènes de n différentielles, par R. Lipschitz. *Id.*, p. 71.

La question de l'origine et de l'établissement des axiomes de la géométrie est l'une de ces vieilles énigmes dont la solution a donné naissance aux discussions les plus prolongées, aux opinions les plus contradictoires parmi les métaphysiciens. C'est une question qui peut, il me semble, intéresser tous ceux qui ont étudié les mathématiques, fût-ce les éléments seulement, et qui touche en même temps aux problèmes les plus élevés que nous présente la nature de la pensée humaine. Dans ces derniers temps, le côté mathématique de la question a attiré l'attention de plusieurs mathématiciens. Le premier des travaux qui sont consignés dans la liste ci-dessus contient une exposition abrégée des points essentiels. Diverses parties du problème ont été étudiées dans les autres travaux, dont les uns sont antérieurs, les autres postérieurs à la publication des recherches de M. Riemann. Je vais essayer d'exposer ici la portée générale et les résultats de ces études, autant qu'il est possible de le faire, sans avoir recours à des calculs mathématiques, ni faire intervenir des formules.

Pour commencer par le cas le plus simple, occupons-nous d'abord de la géométrie à deux dimensions. L'espace que nous connaissons, dans lequel nous vivons, possède trois dimensions. Mais il n'y a pas d'impossibilité logique à concevoir l'existence d'êtres intelligents, vivant et se mouvant sur la surface d'un corps solide quelconque, incapables de percevoir autre chose que ce qui se trouve sur cette surface, et insensibles à tout ce qui est en dehors d'elle. Rien n'empêche de supposer que ces êtres pourraient trouver les lignes les plus courtes existantes dans leur espace, et se créer sur cet espace des notions géométriques appropriées à la nature particulière de leurs perceptions. Naturellement, leur espace n'aurait que deux dimensions. Si la surface qui les portait était un plan indéfini, ils pourraient reconnaître la vérité des axiomes d'Euclide. Ils trouveraient qu'entre deux points, il existe une ligne plus courte que toutes les autres (ou *géodésique*), et une seule, et que deux lignes géodésiques (droites dans ce cas spécial) parallèles chacune à une troisième, sont parallèles entre elles.

Si ces êtres vivaient au contraire sur la surface d'une sphère, leur espace n'aurait pas de limite, comme dans la première supposition, mais il ne serait pas indéfiniment étendu; et les axiomes de la géométrie seraient pour eux très-différents des nôtres, et de ceux des habitants d'une surface plane. Les lignes les plus courtes que les habitants d'une surface sphérique pourraient mener entre deux points, seraient des arcs de grands cercles. Cet axiome, qu'entre deux points il n'y a qu'une seule ligne géodésique, ne serait pas vrai pour eux sans exception; car entre deux points diamétralement opposés, ils pourraient trouver un nombre infini de ces lignes, toutes égales entre elles. De pareils êtres ne pourraient concevoir la notion des lignes géodésiques parallèles ; en effet, toutes leurs lignes géodésiques, suffisamment prolongées, iraient se couper en deux points. La somme des angles d'un triangle serait supérieure à deux angles droits, et la différence croîtrait avec la surface du triangle considéré. Il est évident que ces êtres ne pourraient concevoir la notion de la *similitude* géométrique, parce qu'il leur serait impossible de connaître des figures géométriques de même forme et de grandeurs différentes, à moins de les prendre de dimensions infiniment petites.

Supposons maintenant des êtres vivant sur une autre surface quelconque, par exemple sur celle d'un ellipsoïde. Ils pourraient construire les lignes les plus courtes entre trois points, et former ainsi un triangle géodésique. Mais s'ils construisaient de pareils triangles en différentes parties de leur espace, de manière que les trois côtés fussent toujours égaux chacun à chacun, les angles de ces divers triangles seraient différents, sauf dans certains cas particuliers. Des cercles d'égal rayon géodésique auraient des surfaces différentes et des longueurs périphériques différentes, s'ils étaient placés sur des points de la surface pour lesquels la courbure serait différente. Ainsi, dans ce cas, il ne serait plus possible, comme il l'était dans le cas du plan ou de la sphère, de construire en un point quelconque de la surface une figure superposable à une figure donnée, ou, si l'on veut, de faire mouvoir une figure sur cette surface sans changer une ou plusieurs de ses dimensions.

Gauss a démontré dans son célèbre Traité de la courbure des surfaces, quelle est la condition à remplir, pour qu'on puisse construire, en des points quelconques d'une surface donnée, deux figures superposables, c'est-à-dire telles qu'on puisse, en les appliquant l'une sur l'autre, les faire coïncider par toutes leurs parties. C'est que la *courbure* de cette surface — c'est-à-dire l'inverse du produit des deux rayons de courbure principaux — soit partout la même. Gauss a démontré aussi dans ce même travail que, si l'on déforme une surface, sans allonger ni raccourcir aucun de ses éléments linéaires, la courbure en chaque point de cette surface reste la même. Par exemple, un plan peut être enroulé sous forme de cylindre ou de cône; sa courbure reste toujours égale à zéro. De même, un fragment de surface sphérique peut être enroulé en une surface en forme de fuseau ; c'est une expérience facile à réaliser en coupant le fond d'une vessie, lequel a une courbure sensiblement sphérique; on peut ensuite donner à cette membrane des formes diverses, représentant différentes modifications de surfaces sphériques altérées par flexion.

Or, puisque nous avons supposé qu'aucun élément linéaire de la surface n'a éprouvé ni allongement ni diminution par l'effet de cette déformation, la longueur de toutes les lignes, la grandeur de tous les angles, la surface de tous les triangles, construits sur cette surface, restent les mêmes avant et après la déformation. Il est évident, par conséquent, que le système de géométrie qui appartient aux figures construites sur une surface est indépendant d'une telle déformation qui ne change la longueur d'aucun élément linéaire.

Parmi les exemples dont nous nous sommes servi ci-dessus pour expliquer notre pensée, il se trouve deux surfaces satisfaisant à cette condition, que la courbure est la même en tous leurs points. C'est le *plan*, pour lequel la courbure est nulle, et la *sphère*, pour laquelle la courbure peut avoir une valeur positive quelconque.

A part ces deux surfaces, on peut en construire encore d'autres dans lesquelles la courbure soit constante; seulement sa valeur est négative. M. Beltrami les a appelées *surfaces pseudosphériques :* elles ont en chaque point la forme d'une selle de cheval, convexes dans une direction, et concaves du même côté dans une direction perpendiculaire à la précédente. Ainsi, un exemple de surface pseudosphérique nous est fourni par une surface annulaire convexe du côté de l'axe, comme certains anneaux de serviette. Nous pouvons en trouver un autre exemple dans la surface extérieure d'un verre à champagne dont le corps s'élargit en haut en un rebord recourbé en dehors, et dont le pied se prolongerait en bas en une tige infiniment longue et mince. Nous pouvons, dans ces cas, considérer la surface comme infiniment étendue dans la direction perpendiculaire à l'axe, comme si elle était enroulée autour de l'axe. Mais nous ne pouvons pas, dans notre espace, construire une surface pseudosphérique indéfiniment étendue dans la direction de l'axe de révolution; nous arrivons toujours, soit à une limite, comme dans le cas du verre à champagne, soit à deux limites, comme dans le cas de l'anneau. A ces limites, le plus petit rayon de courbure devient nul et le plus grand devient infini.

Cependant, si nous supposons une surface pseudosphérique flexible, nous pouvons la traiter comme si elle était indéfiniment étendue dans toutes les directions. En effet, chaque portion de la surface qui s'approche de la limite peut se déplacer sur le reste de cette surface et s'adapter à une autre portion, où une continuation de la surface et des figures construites sur elle est possible. Ainsi, bien que nous ne puissions construire une surface pseudosphérique indéfiniment étendue simultanément dans toutes les directions, nous pouvons néanmoins construire toutes les parties de cette surface l'une après l'autre, de telle manière que chaque partie forme la continuation des autres, sans aucune interruption.

M. Beltrami a donné, dans ses mémoires sur la *Géométrie non-Euclidéenne,* une exposition très-élégante de la géométrie des figures construites sur une surface pseudosphérique; il a montré qu'on peut construire des figures parfaitement superposables à une figure quelconque donnée sur cette surface, en d'autres points quelconques de cette surface; il a démontré ainsi qu'il n'existe qu'une seule ligne géodésique entre deux points, exactement comme pour le plan. L'axiome qui concerne les lignes parallèles, au contraire, n'est plus applicable ici. Si l'on donne sur la surface une ligne géodésique, et un point en dehors de cette ligne, on peut faire passer par ce point un faisceau de lignes géodésiques qui ne rencontrent pas la première, quelque loin qu'on les suppose prolongées. Ce faisceau est limité par deux lignes géodésiques, dont la première coupe l'une des extrémités de la ligne donnée à une distance infinie, et la seconde l'autre extrémité de la même manière. Ces deux lignes ne coïncident pas l'une avec l'autre, comme dans le cas du plan. L'exposition de cette géométrie abstraite a été remarquablement simplifiée par M. Beltrami, grâce à une méthode particulière de représentation des points de la surface pseudosphérique sur un plan et dans l'intérieur d'un cercle, méthode telle, que toute ligne géodésique de la surface pseudosphérique se trouve représentée par une ligne droite sur le plan.

Il y a déjà longtemps, M. Lobatschewsky a développé synthétiquement dans sa *Théorie géométrique* un système de géométrie excluant le principe des lignes parallèles. Ce système ressemble parfaitement à la géométrie des surfaces pseudosphériques développée par M. Beltrami. Ces recherches démontrent que les trois axiomes dont nous avons parlé à plusieurs reprises contiennent la définition du plan, nécessaire et suffisante pour servir de base à la géométrie de cette surface et de toutes les surfaces qui sont développables sur un plan.

L'axiome que toutes les parties de la surface peuvent s'appliquer sur toutes les autres parties (en laissant de côté la considération des limites) distingue les trois surfaces à courbure constante de toutes les autres surfaces. L'axiome qu'il y a une seule ligne géodésique entre chaque couple de points distingue le plan de la sphère; enfin l'axiome sur les lignes parallèles distingue le plan des surfaces pseudosphériques.

La distinction entre la géométrie sphérique et la géométrie plane était évidente depuis bien longtemps, mais la signification de l'axiome sur les lignes parallèles, telle qu'elle ressort de ces recherches, ne pouvait se découvrir avant que la notion et l'étude mathématique des surfaces déformables sans changement de dimensions se fussent développées.

Nous pouvons expliquer par les notions géométriques usuelles, comme nous avons essayé de le faire, ces résultats sur les surfaces, c'est-à-dire sur les espaces étendus en deux dimensions seulement, parce que nous vivons dans un espace à trois dimensions, et que nous pouvons nous représenter par notre imagination ou bien façonner en réalité d'autres surfaces que le plan, auquel seul s'applique la géométrie d'Euclide. Mais quand nous essayons d'étendre ces recherches à l'espace à trois dimensions, la difficulté augmente, parce que nous ne connaissons en réalité l'espace que tel qu'il existe autour de nous, et que nous ne pouvons, même en idée, nous représenter aucun autre genre d'espace. Cette nouvelle partie de ces études peut cependant se poursuivre par la voie abstraite de l'analyse mathématique.

En géométrie analytique, on suppose la position d'un point déterminée par la mesure de trois quantités quelconques, qui dépendent de la situation de ce point, et que nous pouvons appeler ses coordonnées. Le choix des quantités à prendre pour coordonnées est du reste entièrement arbitraire; on admet seulement que, lorsque le point se déplace, ses coordonnées, ou au moins l'une d'elles, croissent ou diminuent d'une manière continue. Il existe, outre la situation d'un point, d'autres relations naturelles qui peuvent de même se définir par trois quantités mesurables et se transformer par degrés infiniment petits, en modifiant leurs coordonnées de la même manière. M. Riemann comprend ces objets sous le terme général de *variétés* (*Mannichfaltigkeiten*) de trois dimensions. Par exemple, chaque couleur peut se représenter, d'après Thomas Young et Maxwell, comme un mélange de trois quantités mesurables, de trois couleurs primitives. Par conséquent, l'espace et le système des couleurs peuvent être appelés des *variétés* de trois dimensions. Le temps serait une *variété* d'une seule dimension; le son, en considérant l'intensité et la hauteur, une *variété* de deux dimensions, etc. Entre l'espace et beaucoup d'autres *variétés* de plus d'une dimension, il existe cette différence fondamentale, que nous pouvons comparer la longueur d'une ligne quelconque, dans une direction quelconque, avec la longueur de toute autre ligne. Au contraire, il serait impossible de comparer quantitativement, pour un son, une différence d'intensité avec une différence de hauteur. En conséquence, le problème fondamental de la géométrie ou stéréométrie, consiste, d'après M. Riemann, à trouver une méthode qui permette de comparer la longueur d'éléments linéaires de direction différente. Dans notre géométrie actuelle, quelles que soient les coordonnées que l'on choisisse, la distance entre deux points infiniment rapprochés se présente toujours à nous comme la diagonale d'un parallélipipède dont les côtés sont les accroissements correspondants des coordonnées; et sa longueur peut, par conséquent, se calculer au moyen de ce théorème bien connu de stéréométrie, qui exprime le carré de la diagonale, par la somme des carrés et des produits des côtés d'un parallélipipède. M. Riemann a admis ce théorème très-général comme hypothèse, et, le prenant pour base de ses études, il a cherché quelles quantités correspondent, dans des espaces de plus de deux dimensions, à la courbure dans un espace de deux dimensions; il a démontré que ces quantités doivent être constantes dans toutes les parties de l'espace en question, et pour toutes les directions dans cet espace, pour qu'il soit possible de construire en chaque point une figure superposable par toutes ses parties à une figure quelconque donnée sur un autre point du même espace. Il s'ensuit que des corps solides de forme invariable peuvent se déplacer dans un espace à trois dimensions ou plus, avec le même degré de liberté que celui avec lequel ils peuvent se déplacer dans l'espace réel qui nous entoure, sous cette seule condition, qu'en chaque point, et dans chaque direction de l'espace dans lequel ils se déplacent, une certaine quantité analytique, qui est analogue à la mesure de courbure de Gauss, conserve une valeur constante. Si cette quantité est égale à zéro, nous avons ce que M. Riemann appelle un *espace plan*, c'est-à-dire un espace qui présente avec les espaces à plusieurs dimensions le même rapport que le plan présente avec notre espace à trois dimensions. Dans un espace plan, il n'existe qu'une ligne géodésique entre deux points donnés, et par un point donné, on ne peut mener qu'une seule ligne géodésique parallèle à une ligne géodésique donnée. L'espace plan de trois dimensions est par conséquent identique avec l'espace qui existe réellement autour de nous. La géométrie de l'espace à trois dimensions de courbure négative constante, a été développée, comme celle des surfaces par M. Lobatschewsky, et par M. Beltrami. Il y a des surfaces géodésiques, pour ainsi dire, qui sont caractérisées par cette propriété, que toute ligne géodésique qui unit deux points de ces surfaces coïncide avec elles dans toute sa longueur. Par un point donné d'un pareil espace, on peut faire passer un faisceau de surfaces géodésiques, parallèles à une surface donnée, et ne coïncidant pas les unes avec les autres. Toutes ces conséquences très-abstraites ont été très-heureusement simplifiées par M. Beltrami, comme celles qui ont trait aux surfaces pseudosphériques; en effet, il a démontré que chaque point d'un espace infini de courbure négative constante et de trois dimensions, peut être représenté par un point dans l'intérieur d'une sphère dans notre espace réel, de telle manière que toute ligne géodésique du premier soit représentée par une ligne droite dans le second, les points à distance infinie dans le premier, par la surface sphérique du second, et ainsi de suite.

Je me suis moi-même occupé de spéculations du même ordre, comme conséquence de mes recherches sur la localisation dans le champ de vision. Une partie de mes résultats se trouvèrent semblables à ceux de M. Riemann, lorsque ceux-ci furent publiés; dans une autre partie, j'avais essayé de faire remonter encore au delà les principes fondamentaux de nos notions sur l'espace. Comme je l'ai expliqué ci-dessus, M. Riemann a admis cette forme très-générale de la valeur de la diagonale comme une hypothèse, et après avoir développé les conséquences analytiques les plus générales de cette hypothèse, il a cherché comment ces conséquences devaient se trouver limitées, si l'on faisait intervenir le principe de la superposition.

Pour moi, je suis parti du principe de la superposition, en raisonnant de la manière suivante: toute démonstration d'une égalité géométrique, est originellement basée sur ce fait, que certaines lignes, surfaces, espaces ou systèmes de points sont surperposables, c'est-à-dire applicables les uns sur les autres; ce fait que la superposition peut être observée est le fait originel sur lequel sont basées toutes nos mesures de l'espace. Pour que la notion de la surperposition puisse s'appliquer à deux figures géométriques quelconques, il est nécessaire de supposer que l'une au moins de ces deux figures peut être déplacée sans altérer sa forme, et transportée à la place qui était primitivement occupée par l'autre. La notion de la superposition implique donc la possibilité d'un mouvement dans un corps de forme invariable. Nous avons vu ci-dessus qu'un mouvement sans changement de forme n'est possible que dans certains genres particuliers d'espace. Partant de cette observation, j'ai essayé de démontrer analytiquement que, si des corps de forme invariable se déplacent avec le même degré de liberté que celui avec lequel nous les voyons se déplacer dans la réalité, il s'ensuit que ce que M. Riemann a admis comme une hypothèse doit être une réalité.

J'ai supposé, comme M. Riemann, que la situation de chaque point peut être déterminée par la mesure de trois quantités (coordonnées), qui varient par degrés infiniment petits, lorsque le point se déplace. Puisque au début de ces recherches, nous ne connaissons encore aucune méthode spéciale pour mesurer des quantités quelconques dans l'espace, nous ne pouvons donner d'un corps parfaitement solide d'autre définition que celle-ci, savoir que les coordonnées de chaque couple de points qui appartiennent à un corps solide en mouvement satisfont à une équation quel que soit le mouvement. Il faut remarquer que si le nombre de points pour chaque couple desquels existe une équation dépasse cinq, le nombre des équations correspondant à ce cas est plus grand que le nombre des quantités à déterminer, et que, par cette circonstance, la nature des équations dont il est question est très-étroitement limitée. Une liberté parfaite de mouvement est définie en supposant que chaque point d'un corps mobile, considéré isolément, est susceptible de se déplacer pour occuper un autre point quelconque de l'espace; et que les différents points du corps ne sont sujets à aucune contrainte dans leurs déplacements, si ce n'est celle qui est définie par les équations ci-dessus mentionnées subsistant entre deux d'entre eux.

Enfin, la possibilité de la superposition implique les deux conditions suivantes :

— 1° Deux systèmes de points qui sont superposables dans une première position quelconque du premier système, peuvent aussi se superposer l'un à l'autre dans toute autre position du premier système.

— 2° Si un corps mobile se déplace de telle manière que deux de ses points restent fixes, il reviendra à la même position, si le mouvement continue, sans être renversé.

Les deux conditions que je viens de poser expriment tout simplement ceci, que l'égalité de forme et de grandeur de deux corps, qui est démontrée par superposition, est une propriété des corps eux-mêmes, qui leur appartient indépendamment de leur situation dans l'espace, et des révolutions auxquelles ils peuvent être sujets. Si ces conditions sont remplies, les théorèmes bien connus sur les coefficients différentiels partiels des fonctions de plusieurs variables sont suffisants, comme je l'ai fait voir dans le mémoire cité ci-dessus, pour démontrer le théorème que M. Riemann a donné seulement sous forme d'hypothèse; de cette manière toutes les autres conséquences que MM. Riemann et Beltrami ont déduites de ce fondement, se déduisent aussi de ce fait que la superposition de deux figures peut être observée dans l'espace réel.

Nous résumerons les résultats de ces recherches, en disant que les axiomes sur lesquels notre système géométrique est basé ne sont pas des vérités nécessaires, dépendant seulement des lois irréfragables de notre entendement. Au contraire, divers systèmes de géométrie peuvent se développer analytiquement avec une consistance logique parfaite. Nos axiomes sont, en réalité, l'expression scientifique d'un fait d'expérience très-général, à savoir que, dans notre espace, les corps peuvent se mouvoir librement sans altération de leur forme. De ce fait d'expérience il suit que notre espace est un espace de courbure constante, mais la valeur de cette courbure ne peut être trouvée que par des mesures directes. M. Riemann, il est vrai, termine son travail par cette conclusion, qui paraîtra peut-être paradoxale, que les axiomes d'Euclide pourraient bien n'être qu'approximativement vrais. Ils ont été vérifiés par l'expérience, jusqu'au degré de précision que la géométrie et l'astronomie pratique ont atteint jusqu'à ce jour, et par conséquent, il n'y a aucun doute que le rayon de courbure de notre espace, s'il pouvait être sphérique ou pseudosphérique, soit infiniment grand lorsqu'on le compare aux dimensions de notre système planétaire. Mais nous ne sommes pas absolument assuré qu'il serait trouvé infini, si on le comparait avec les distances des étoiles fixes, ou avec les dimensions de l'espace lui-même.

H. HELMHOLTZ.
Professeur à l'université de Heidelberg.

(*Academy*.)

CHAPITRE III

LES GÉOMÉTRIES NON EUCLIDIENNES

Toute conclusion suppose des prémisses ; ces prémisses elles-mêmes ou bien sont évidentes par elles-mêmes et n'ont pas besoin de démonstration, ou bien ne peuvent être établies qu'en s'appuyant sur d'autres propositions, et comme on ne saurait remonter ainsi à l'infini, toute science déductive, et en particulier la géométrie, doit reposer sur un certain nombre d'axiomes indémontrables. Tous les traités de géométrie débutent donc par l'énoncé de ces axiomes. Mais il y a entre eux une distinction à faire : quelques-uns, comme celui-ci par exemple : « deux quantités égales à une même troisième sont égales entre elles », ne sont pas des propositions de géométrie, mais des propositions d'analyse. Je les regarde comme des jugements analytiques *a priori*, je ne m'en occuperai pas.

Mais je dois insister sur d'autres axiomes qui sont spéciaux à la géométrie. La plupart des traités en énoncent trois explicitement :

1° Par deux points ne peut passer qu'une droite ;

2° La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre ;

3° Par un point, on ne peut faire passer qu'une parallèle à une droite donnée.

Bien que l'on se dispense généralement de démontrer le second de ces axiomes, il serait possible de le déduire des deux autres et de ceux, beaucoup plus nombreux, que l'on admet implicitement sans les énoncer, ainsi que je l'expliquerai plus loin.

On a longtemps cherché en vain à démontrer également le troisième axiome, connu sous le nom de *postulatum d'Euclide*. Ce qu'on a dépensé d'efforts dans cet espoir chimérique est vraiment inimaginable. Enfin au commencement du siècle et à peu près en même temps, deux savants, un Russe et un Hongrois, Lobatchevsky et Bolyai établirent d'une façon irréfutable que cette démonstration est impossible ; ils nous ont à peu près débarrassés des inventeurs de géométries sans postulatum ; depuis lors, l'Académie des Sciences ne reçoit plus guère qu'une ou deux démonstrations nouvelles par an.

La question n'était pas épuisée ; elle ne tarde pas à faire un grand pas par la publication du célèbre mémoire de Riemann intitulé : *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zum Grunde liegen*. Cet opuscule a inspiré la plupart des travaux récents dont je parlerai plus loin et parmi lesquels il convient de citer ceux de Beltrami et de Helmholtz.

La géométrie de Lobatchevsky

S'il était possible de déduire le postulatum d'Euclide des autres axiomes, il arriverait évidemment qu'en niant le postulatum, et en admettant les autres axiomes, on serait conduit à des conséquences contradictoires ; il serait donc impossible d'appuyer sur de telles prémisses une géométrie cohérente.

Or c'est précisément ce qu'a fait Lobatchevsky. Il suppose au début que :

L'on peut, par un point, mener plusieurs parallèles à une droite donnée.

Et il conserve d'ailleurs tous les autres axiomes d'Euclide. De ces hypothèses, il déduit une suite de théorèmes entre lesquels il est impossible de relever aucune contradiction et il construit une géométrie dont l'impeccable logique ne le cède en rien à celle de la géométrie euclidienne.

Les théorèmes sont, bien entendu, très différents de ceux auxquels nous sommes accoutumés et ils ne laissent pas de déconcerter un peu d'abord.

Ainsi la somme des angles d'un triangle est toujours plus petite que deux droits et la différence entre cette somme et deux droits est proportionnelle à la surface du triangle.

Il est impossible de construire une figure semblable à une figure donnée mais de dimensions différentes.

Si l'on divise une circonférence en *n* parties égales, et qu'on mène des tangentes aux points de division, ces *n* tangentes formeront un polygone si le rayon de la circonférence est assez petit ; mais si ce rayon est assez grand, elles ne se rencontreront pas.

Il est inutile de multiplier ces exemples ; les propositions de Lobatchevsky n'ont plus aucun rapport avec celles d'Euclide, mais elles ne sont pas moins logiquement reliées les unes aux autres.

La géométrie de Riemann

Imaginons un monde uniquement peuplé d'êtres dénués d'épaisseur ; et supposons que ces animaux

« infiniment plats » soient tous dans un même plan et n'en puissent sortir. Admettons de plus que ce monde soit assez éloigné des autres pour être soustrait à leur influence. Pendant que nous sommes en train de faire des hypothèses, il ne nous en coûte pas plus de douer ces êtres de raisonnement et de les croire capables de faire de la géométrie. Dans ce cas, ils n'attribueront certainement à l'espace que deux dimensions.

Mais supposons maintenant que ces animaux imaginaires, tout en restant dénués d'épaisseur, aient la forme d'une figure sphérique, et non d'une figure plane et soient tous sur une même sphère sans pouvoir s'en écarter. Quelle géométrie pourront-ils construire ? Il est clair d'abord qu'ils n'attribueront à l'espace que deux dimensions ; ce qui jouera pour eux le rôle de la ligne droite, ce sera le plus court chemin d'un point à un autre sur la sphère, c'est-à-dire un arc de grand cercle, en un mot leur géométrie sera la géométrie sphérique.

Ce qu'ils appelleront l'espace, ce sera cette sphère d'où ils ne peuvent sortir et sur laquelle se passent tous les phénomènes dont ils peuvent avoir connaissance. Leur espace sera donc *sans limites* puisqu'on peut sur une sphère aller toujours devant soi sans jamais être arrêté, et cependant il sera *fini ;* on n'en trouvera jamais le bout, mais on pourra en faire le tour.

Eh bien, la géométrie de Riemann, c'est la géométrie sphérique étendue à trois dimensions. Pour la construire, le mathématicien allemand a dû jeter par-dessus bord, non seulement le postulatum d'Euclide, mais encore le premier axiome : *Par deux points, on ne peut faire passer qu'une droite.*

Sur une sphère, par deux points donnés, on ne peut faire *en général* passer qu'un grand cercle (qui, comme nous venons de le voir, jouerait le rôle de la droite pour nos êtres imaginaires), mais il y a une exception : si les deux points donnés sont diamétralement opposés, on pourra faire passer par ces deux points une infinité de grands cercles.

De même dans la géométrie de Riemann (au moins sous une de ses formes), par deux points ne passera en général qu'une seule droite ; mais il y a des cas exceptionnels où par deux points pourront passer une infinité de droites.

Il y a une sorte d'opposition entre la géométrie de Riemann et celle de Lobatchevsky.

Ainsi la somme des angles d'un triangle est :

– égale à deux droits dans la géométrie d'Euclide,

– plus petite que deux droits dans celle de Lobatchevsky,

– plus grande que deux droits dans celle de Riemann.

Le nombre des parallèles qu'on peut mener à une droite donnée par un point donné est égal :

– à un dans la géométrie d'Euclide,

– à zéro dans celle de Riemann,

– à l'infini dans celle de Lobatchevsky.

Ajoutons que l'espace de Riemann est fini, quoique sans limite, au sens donné plus haut à ces deux mots.

Les surfaces à courbure constante

Une objection restait possible cependant. Les théorèmes de Lobatchevsky et de Riemann ne présentent aucune contradiction ; mais quelque nombreuses que soient les conséquences que ces deux géomètres ont tirées de leurs hypothèses, ils ont dû s'arrêter avant de

les avoir toutes épuisées, car le nombre en serait infini ; qui nous dit alors que s'ils avaient poussé plus loin leurs déductions, ils n'auraient pas fini par arriver à quelque contradiction ?

Cette difficulté n'existe pas pour la géométrie de Riemann, pourvu qu'on se borne à deux dimensions ; la géométrie de Riemann à deux dimensions ne diffère pas en effet, nous l'avons vu, de la géométrie sphérique, qui n'est qu'une branche de la géométrie ordinaire et qui est par conséquent en dehors de toute discussion.

M. Beltrami, en ramenant de même la géométrie de Lobatchevsky à deux dimensions à ne plus être qu'une branche de la géométrie ordinaire, à réfuté également l'objection en ce qui la concerne.

Voici comment il y est parvenu. Considérons sur une surface une figure quelconque. Imaginons que cette figure soit tracée sur une toile flexible et inextensible appliquée sur cette surface, de telle façon que quand la toile se déplace et se déforme, les diverses lignes de cette figure puissent changer de forme, sans changer de longueur. En général, cette figure flexible et inextensible ne pourra se déplacer sans quitter la surface ; mais il y a certaines surfaces particulières pour lesquelles un pareil mouvement serait possible : ce sont les surfaces à courbure constante.

Si nous reprenons la comparaison que nous faisions plus haut et que nous imaginions des êtres sans épaisseur vivant sur une de ces surfaces, ils regarderont comme possible le mouvement d'une figure dont toutes les lignes conservent une longueur constante. Un pareil mouvement paraîtrait absurde, au contraire, à des animaux sans épaisseur vivant sur une surface à courbure variable.

Ces surfaces à courbure constante sont de deux sortes :

Les unes sont *à courbure positive,* et peuvent être déformées de façon à être appliquées sur une sphère. La géométrie de ces surfaces se réduit donc à la géométrie sphérique, qui est celle de Riemann.

Les autres sont *à courbure négative.* M. Beltrami a fait voir que la géométrie de ces surfaces n'est autre que celle de Lobatchevsky. Les géométries à deux dimensions de Riemann et de Lobatchevsky se trouvent donc rattachées à la géométrie euclidienne.

INTERPRÉTATION DES GÉOMÉTRIES NON EUCLIDIENNES

Ainsi s'évanouit l'objection en ce qui concerne les géométries à deux dimensions.

Il serait aisé d'étendre le raisonnement de M. Beltrami aux géométries à trois dimensions. Les esprits que ne rebute pas l'espace à quatre dimensions n'y verront aucune difficulté, mais ils sont peu nombreux. Je préfère donc procéder autrement.

Considérons un certain plan que j'appellerai fondamental et construisons une sorte de dictionnaire, en faisant correspondre chacun à chacun une double suite de termes écrits dans deux colonnes, de la même façon que se correspondent dans les dictionnaires ordinaires les mots de deux langues dont la signification est la même :

Espace .... Portion de l'espace située au-dessus du plan fondamental.

Plan .... Sphère coupant orthogonalement le plan fondamental.

Droite .... Cercle coupant orthogonalement le plan fondamental.

Sphère .... Sphère.

Cercle .... Cercle.

Angle .... Angle.

Distance de deux points ...... Logarithme du rapport anharmonique de ces deux points et des intersections du plan fondamental avec un cercle passant par ces deux points et le coupant orthogonalement

etc...

Prenons ensuite les théorèmes de Lobatchevsky et traduisons-les à l'aide de ce dictionnaire comme nous traduirions un texte allemand à l'aide d'un dictionnaire allemand-français. *Nous obtiendrons ainsi des théorèmes de la géométrie ordinaire.*

Par exemple, ce théorème de Lobatchevsky : « la somme des angles d'un triangle est plus petite que deux droits » se traduit ainsi : « Si un triangle curviligne a pour côtés des arcs de cercle qui, prolongés, iraient couper orthogonalement le plan fondamental, la somme des angles de ce triangle curviligne sera plus petite que deux droits ». Ainsi, quelque loin que l'on pousse les conséquences des hypothèses de Lobatchevsky, on ne sera jamais conduit à une contradiction. En effet, si deux théorèmes de Lobatchevsky étaient contradictoires, il en serait de même des traductions de ces deux théorèmes, faites à l'aide de notre dictionnaire, mais ces traductions sont des théorèmes de géométrie ordinaire et personne ne doute que la géométrie ordinaire ne soit exempte de contradiction. D'où nous vient cette certitude et est-elle justifiée ? C'est là une question que je ne saurais traiter ici, car elle exigerait quelques développements. Il ne reste donc plus rien de l'objection que j'ai formulée plus haut.

Ce n'est pas tout. La géométrie de Lobatchevsky, susceptible d'une interprétation concrète, cesse d'être un vain exercice de logique et peut recevoir des applications ; ce n'est pas le lieu de parler ici de ces applications ni du parti que M. Klein et moi en avons tiré pour l'intégration des équations linéaires.

Cette interprétation n'est d'ailleurs pas unique, et l'on pourrait établir plusieurs dictionnaires analogues à celui qui précède et qui nous permettraient par une simple « traduction » de transformer les théorèmes de Lobatchevsky en théorèmes de géométrie ordinaire.

Les axiomes implicites

Les axiomes explicitement énoncés dans les traités sont-ils les seuls fondements de la géométrie ? On peut être assuré du contraire en voyant qu'après les avoir successivement abandonnés, on laisse encore debout quelques propositions communes aux théories d'Euclide, de Lobatchevsky et de Riemann. Ces propositions doivent reposer sur quelques prémisses que les géomètres admettent sans les énoncer. Il est intéressant de chercher à les dégager des démonstrations classiques.

Stuart Mill a prétendu que toute définition contient un axiome, puisqu'en définissant on affirme implicitement l'existence de l'objet défini. C'est aller beaucoup trop loin ; il est rare qu'en mathématiques on donne

une définition sans la faire suivre par la démonstration de l'existence de l'objet défini, et quand on s'en dispense, c'est généralement que le lecteur y peut aisément suppléer. Il ne faut pas oublier que le mot existence n'a pas le même sens quand il s'agit d'un être mathématique et quand il est question d'un objet matériel. Un être mathématique existe, pourvu que sa définition n'implique pas contradiction, soit en elle-même, soit avec les propositions antérieurement admises.

Mais si l'observation de Stuart Mill ne saurait s'appliquer à toutes les définitions, elle n'en est pas moins juste pour quelques-unes d'entre elles. On définit quelquefois le plan de la manière suivante :

Le plan est une surface telle que la droite qui joint deux quelconques de ses points est tout entière sur cette surface.

Cette définition cache manifestement un nouvel axiome ; on pourrait, il est vrai, la changer, et cela vaudrait mieux, mais alors il faudrait énoncer l'axiome explicitement.

D'autres définitions peuvent donner lieu à des réflexions non moins importantes.

Telle est par exemple celle de l'égalité de deux figures : deux figures sont égales quand on peut les superposer ; pour les superposer il faut déplacer l'une d'elles jusqu'à ce qu'elle coïncide avec l'autre ; mais comment faut-il la déplacer ? Si nous le demandions, on nous répondrait sans doute qu'on doit le faire sans la déformer et à la façon d'un solide invariable. Le cercle vicieux serait alors évident.

En fait, cette définition ne définit rien ; elle n'aurait aucun sens pour un être qui habiterait un monde où il n'y aurait que des fluides. Si elle nous semble claire, c'est que nous sommes habitués aux propriétés des solides naturels qui ne diffèrent pas beaucoup de celles des solides idéaux dont toutes les dimensions sont invariables.

Cependant, tout imparfaite qu'elle soit, cette définition implique un axiome.

La possibilité du mouvement d'une figure invariable n'est pas une vérité évidente par elle-même, ou du moins elle ne l'est qu'à la façon du postulatum d'Euclide et non comme le serait un jugement analytique *a priori*.

D'ailleurs, en étudiant les définitions et les démonstrations de la géométrie, on voit qu'on est obligé d'admettre, sans les démontrer, non seulement la possibilité de ce mouvement, mais encore quelques-unes de ses propriétés.

C'est ce qui ressort d'abord de la définition de la ligne droite. On en a donné beaucoup de défectueuses, mais la véritable est celle qui est sous-entendue dans toutes les démonstrations où la ligne droite intervient :

« Il peut arriver que le mouvement d'une figure invariable soit tel que tous les points d'une ligne appartenant à cette figure restent immobiles pendant que tous les points situés en dehors de cette ligne se meuvent. Une pareille ligne s'appellera une ligne droite. » Nous avons à dessein, dans cet énoncé, séparé la définition de l'axiome qu'elle implique.

Beaucoup de démonstrations, telles que celles des cas d'égalité des triangles, de la possibilité d'abaisser une perpendiculaire d'un point sur une droite, supposent des propositions qu'on se dispense d'énoncer, puisqu'elles obligent à admettre qu'il est possible de

transporter une figure dans l'espace d'une certaine manière.

La quatrième géométrie

Parmi ces axiomes implicites, il en est un qui me semble mériter quelque attention, parce qu'en l'abandonnant, on peut construire une quatrième géométrie aussi cohérente que celle d'Euclide, de Lobatchevsky et de Riemann.

Pour démontrer que l'on peut toujours élever en un point A une perpendiculaire à une droite AB, on considère une droite AC mobile autour du point A et primitivement confondue avec la droite fixe AB ; et on la fait tourner autour du point A jusqu'à ce qu'elle vienne dans le prolongement de AB.

On suppose ainsi deux propositions : d'abord qu'une pareille rotation est possible, et ensuite qu'elle peut se continuer jusqu'à ce que les deux droites viennent dans le prolongement l'une de l'autre.

Si l'on admet le premier point et que l'on rejette le second, on est conduit à une suite de théorèmes encore plus étranges que ceux de Lobatchevsky et de Riemann, mais également exempts de contradiction.

Je ne citerai qu'un de ces théorèmes et je ne choisirai pas le plus singulier : ***une droite réelle peut être perpendiculaire à elle-même.***

Le théorème de Lie

Le nombre des axiomes implicitement introduits dans les démonstrations classiques est plus grand qu'il ne serait nécessaire, et on a cherché à le réduire au minimum. M. Hilbert semble avoir donné la solution définitive de ce problème. On pouvait *a priori* se demander d'abord si cette réduction est possible, si le nombre des axiomes nécessaires et celui des géométries imaginables n'est pas infini.

Un théorème de M. Sophus Lie domine toute cette discussion. On peut l'énoncer ainsi :

Supposons qu'on admette les prémisses suivantes :

1° L'espace a *n* dimensions ;

2° Le mouvement d'une figure invariable est possible ;

3° Il faut *p* conditions pour déterminer la position de cette figure dans l'espace.

Le nombre des géométries compatibles avec ces prémisses sera limité.

Je puis même ajouter que si *n* est donné, on peut assigner à *p* une limite supérieure.

Si donc on admet la possibilité du mouvement, on ne pourra inventer qu'un nombre fini (et même assez restreint) de géométries à trois dimensions.

Les géométries de Riemann

Cependant ce résultat semble contredit par Riemann, car ce savant construit une infinité de géométries différentes, et celle à laquelle on donne ordinairement son nom n'en est qu'un cas particulier.

Tout dépend, dit-il, de la façon dont on définit la longueur d'une courbe. Or il y a une infinité de manières de définir cette longueur, et chacune d'elles peut devenir le point de départ d'une nouvelle géométrie.

Cela est parfaitement exact, mais la plupart de ces définitions sont incompatibles avec le mouvement d'une figure invariable, que l'on suppose possible dans le théorème de Lie. Ces géométries de Riemann, si intéressantes à divers titres, ne pourraient donc jamais être que purement analytiques et ne se prêteraient pas à des démonstrations analogues à celles d'Euclide.

Les Géométries de Hilbert

Enfin M. Veronese et M. Hilbert ont imaginé de nouvelles géométries plus étranges encore, qu'ils appellent *non-archimédiennes*. Ils les construisent en rejetant l'*axiome d'Archimède* en vertu duquel toute longueur donnée, multipliée par un entier suffisamment grand, finira par surpasser toute autre longueur donnée si grande qu'elle soit. Sur une droite non-archimédienne, les points de notre géométrie ordinaire existent tous, mais il y en a une infinité d'autres qui viennent s'intercaler entre eux, de telle sorte qu'entre deux segments, que les géomètres de la vieille école auraient regardés comme contigus, on puisse caser une infinité de points nouveaux. En un mot, l'espace non-archimédien n'est plus un continu de second ordre, pour employer le langage du chapitre précédent, mais un continu du troisième ordre.

De la nature des axiomes

La plupart des mathématiciens ne regardent la géométrie de Lobatchevsky que comme une simple curiosité logique ; quelques-uns d'entre eux sont allés plus loin cependant. Puisque plusieurs géométries sont possibles, est-il certain que ce soit la nôtre qui soit vraie ? L'expérience nous apprend sans doute que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits ; mais c'est parce que nous n'opérons que sur des triangles trop petits ; la différence, d'après Lobatchevsky, est proportionnelle à la surface du triangle : ne pourra-t-elle devenir sensible quand nous opérerons sur des triangles plus grands ou quand nos mesures deviendront plus précises ? La géométrie euclidienne ne serait ainsi qu'une géométrie provisoire.

Pour discuter cette opinion, nous devons d'abord nous demander quelle est la nature des axiomes géométriques.

Sont-ce des jugements synthétiques *a priori,* comme disait Kant ?

Ils s'imposeraient alors à nous avec une telle force, que nous ne pourrions concevoir la proposition contraire, ni bâtir sur elle un édifice théorique. Il n'y aurait pas de géométrie non euclidienne.

Pour s'en convaincre, qu'on prenne un véritable jugement synthétique *à priori,* par exemple celui-ci, dont nous avons vu au chapitre premier le rôle prépondérant :

Si un théorème est vrai pour le nombre 1, *si on a démontré qu'il est vrai de* n + 1, *pourvu qu'il le soit de* n, *il sera vrai de tous les nombres entiers positifs.*

Qu'on essaie ensuite de s'y soustraire et de fonder, en niant cette proposition, une fausse arithmétique analogue à la géométrie non-euclidienne, – on n'y pourra pas parvenir ; on serait même tenté au premier abord de regarder ces jugements comme analytiques.

D'ailleurs, reprenons notre fiction des animaux sans épaisseur ; nous ne pouvons guère admettre que ces êtres, s'ils ont l'esprit fait comme nous, adopteraient la géométrie euclidienne qui serait contredite par toute leur expérience ?

Devons-nous conclure que les axiomes de la géométrie sont des vérités expérimentales ? Mais on n'expérimente pas sur des droites ou des circonférences idéales ; on ne peut le faire sur des objets matériels. Sur quoi porteraient donc les expériences qui serviraient de fondement à la géométrie ? La réponse est facile.

Nous avons vu plus haut que l'on raisonne constamment comme si les figures géométriques se comportaient à la manière des solides. Ce que la géométrie emprunterait à l'expérience, ce seraient donc les propriétés de ces corps.

Les propriétés de la lumière et sa propagation rectiligne ont été aussi l'occasion d'où sont sorties quelques-unes des propositions de la géométrie, et en particulier celles de la géométrie projective, de sorte qu'à ce point de vue on serait tenté de dire que la géométrie métrique est l'étude des solides et que la géométrie projective est celle de la lumière.

Mais une difficulté subsiste, et elle est insurmontable. Si la géométrie était une science expérimentale, elle ne serait pas une science exacte, elle serait soumise à une continuelle révision. Que dis-je ? elle serait dès aujourd'hui convaincue d'erreur puisque nous savons qu'il n'existe pas de solide rigoureusement invariable.

Les axiomes géométriques ne sont donc ni des jugements synthétiques à priori, *ni des faits expérimentaux.*

Ce sont des *conventions* ; notre choix, parmi toutes les conventions possibles, est *guidé* par des faits expérimentaux ; mais il reste *libre* et n'est limité que par la nécessité d'éviter toute contradiction. C'est ainsi que les postulats peuvent rester *rigoureusement* vrais quand même les lois expérimentales qui ont déterminé leur adoption ne sont qu'approximatives.

En d'autres termes, *les axiomes de la géométrie* (je ne parle pas de ceux de l'arithmétique) *ne sont que des définitions déguisées.*

Dès lors, que doit-on penser de cette question : La géométrie euclidienne est-elle vraie ?

Elle n'a aucun sens.

Autant demander si le système métrique est vrai et les anciennes mesures fausses ; si les coordonnées cartésiennes sont vraies et les coordonnées polaires fausses. Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre ; elle peut seulement être *plus commode.*

Or la géométrie euclidienne est et restera la plus commode :

1° Parce qu'elle est la plus simple ; et elle n'est pas telle seulement par suite de nos habitudes d'esprit ou de je ne sais quelle intuition directe que nous aurions de l'espace euclidien ; elle est la plus simple en soi de même qu'un polynôme du premier degré est plus simple qu'un polynôme du second degré ; les formules de la trigonométrie sphérique sont plus compliquées que celles de la trigonométrie rectiligne, et elles paraîtraient encore telles à un analyste qui en ignorerait la signification géométrique.

2° Parce qu'elle s'accorde assez bien avec les propriétés des solides naturels, ces corps dont se rapprochent nos membres et notre œil et avec lesquels nous faisons nos instruments de mesure.

BOURBAKI, Les Grands Courants de la Pensée Mathématiques,
dir. F. LE LIONNAIS, Cahiers du Sud, 1948

NICOLAS BOURBAKI

L'ARCHITECTURE DES MATHÉMATIQUES

La Mathématique, ou les Mathématiques ?

Donner, à l'heure actuelle, une idée d'ensemble de la science mathématique, est une entreprise qui semble au premier abord offrir des difficultés presque insurmontables, en raison de l'étendue et de la variété du sujet. Comme dans toutes les autres sciences, le nombre des mathématiciens et des travaux consacrés aux mathématiques s'est considérablement accru depuis la fin du XIXe siècle. Les mémoires de mathématiques pures publiés dans le monde, au cours d'une année normale, couvrent plusieurs milliers de pages. Tout n'y est sans doute pas d'une égale valeur ; mais après décantation de l'inévitable déchet, il n'en reste pas moins que chaque année la science mathématique s'enrichit d'une foule de résultats nouveaux, se diversifie et se ramifie constamment en théories sans cesse modifiées, refondues, confrontées, combinées les unes aux autres. Pas un mathématicien, même en y consacrant toute son activité, ne serait aujourd'hui en mesure de suivre ce développement dans tous ses détails. Nombre d'entre eux se cantonnent dans un coin des mathématiques d'où ils ne cherchent pas à sortir, et non seulement ignorent à peu près complètement tout ce qui ne touche pas à leur sujet, mais encore seraient hors d'état de comprendre le langage et la terminologie employés par leurs confrères qui se réclament d'une spécialité éloignée de la leur. Il n'en est guère, même parmi ceux dont la culture est la plus vaste, qui ne se sentent dépaysés dans certaines régions de l'immense monde mathématique ; quant à ceux qui, tels Poincaré ou Hilbert, impriment le sceau de leur génie dans presque tous les domaines, ils constituent, même parmi les plus grands, une rarissime exception.

Il ne saurait donc être question de donner au profane une image précise de ce que les mathématiciens eux-mêmes ne peuvent concevoir en sa totalité. Mais on peut se demander si cette prolifération exubérante est le développement d'un organisme vigoureusement charpenté, acquérant chaque jour plus de cohésion et d'unité des accroissements qu'il reçoit, ou si au contraire elle n'est que le signe extérieur d'une tendance à un émiettement de plus en plus poussé, dû à la nature même des mathématiques, et si ces dernières ne sont pas en train de devenir une tour de Babel de disciplines autonomes, isolées les unes des autres, tant dans leurs buts que dans leurs méthodes, et jusque dans leur langage. En un mot, y a-t-il aujourd'hui *une* mathématique ou *des* mathématiques ?

Bien que plus actuelle que jamais, il ne faudrait pas croire que cette question soit nouvelle ; elle s'est posée presque dès les premiers pas de la science mathématique. C'est qu'en effet, même en négligeant les mathématiques appliquées, il subsiste, entre la géométrie et l'arithmétique (du moins sous leur aspect élémentaire) une évidente dualité d'origine, celle-ci étant initialement science du *discret*, celle-là de l'étendue *continue*, deux aspects qui s'opposent radicalement depuis la découverte des irrationnelles. D'ailleurs, c'est précisément cette découverte qui fut fatale à la première tentative d'unification de la science, l'arithmétisme des pythagoriciens (« toutes choses sont nombres »).

Nous serions entraînés trop loin s'il nous fallait suivre, du pythagorisme à nos jours, les vicissitudes de la conception unitaire des mathématiques. C'est d'ailleurs là une tâche à laquelle un philosophe est mieux préparé qu'un mathématicien ; car c'est un trait commun des diverses tentatives pour intégrer en un tout cohérent l'ensemble des mathématiques — qu'il s'agisse de Platon, de Descartes ou de Leibniz, de l'arithmétisme ou de la logistique du XIX[e] siècle — qu'elles ont été faites en liaison avec un système philosophique plus ou moins ambitieux ; mais partant toujours d'idées *a priori* sur les relations de la mathématique avec le double univers du monde extérieur et du monde de la pensée. Nous ne saurions mieux faire que de renvoyer sur ce point le lecteur à l'étude historique et critique de M. Brunschvicg : *Les Etapes de la Philosophie mathématique* (1). Notre tâche est plus modeste et plus circonscrite ; nous n'entreprendrons pas d'examiner les rapports des mathématiques avec le réel ou avec les grandes catégories de la pensée ; c'est à l'intérieur de la mathématique que nous entendons rester, et chercher, en analysant ses démarches propres, une réponse à la question que nous nous sommes posée.

Formalisme logique et méthode axiomatique

Après la faillite plus ou moins apparente des divers systèmes auxquels nous avons fait allusion plus haut, il semblait, au début de ce siècle, qu'on eût à peu près renoncé à voir dans les mathématiques une science caractérisée par un objet et une méthode uniques ; on avait plutôt tendance à les considérer comme « *une série de disciplines fondées sur des notions particulières, délimitées avec précision* », reliées par « *mille chemins de communication* » permettant aux méthodes propres à une de ces disciplines de venir en fructifier une ou plusieurs autres (Brunschvicg, *loc. cit.*, p. 447). Aujourd'hui, au contraire, nous croyons que l'évolution interne de la science mathématique a, malgré les apparences, resserré plus que jamais l'unité de ses diverses parties, et y a créé une sorte de noyau central plus cohérent qu'il n'a jamais été. L'essentiel de cette évolution a consisté en une systématisation des relations existant entre les diverses théories mathématiques, et se résume en une tendance qui est généralement connue sous le nom de « méthode axiomatique ».

(1) Paris. Alcan, 1912.

On dit aussi parfois « formalisme » ou « méthode formaliste » ; mais il faut dès le début mettre en garde contre le risque d'une confusion que provoquent ces mots mal définis, et qui n'est que trop souvent exploitée par les adversaires de l'axiomatique. Chacun sait que le caractère externe des mathématiques est de se présenter sous l'aspect de cette « longue chaîne de raisons » dont parlait Descartes ; toute théorie mathématique est un enchaînement de propositions, se déduisant les unes des autres conformément aux règles d'une logique qui, pour l'essentiel, est celle codifiée depuis Aristote sous le nom de « logique formelle », convenablement adaptée aux buts particuliers du mathématicien. C'est donc un truisme banal de dire que ce « raisonnement déductif » est un principe d'unité pour la mathématique ; mais une remarque aussi superficielle ne peut certainement rendre compte de l'apparente complexité des diverses théories mathématiques, pas plus que l'on ne saurait, par exemple, réunir en une science unique la physique et la biologie, sous le prétexte qu'elles appliquent toutes deux la méthode expérimentale. Le mode de raisonnement par enchaînement de syllogismes n'est qu'un *mécanisme* transformateur, applicable indifféremment à toutes sortes de prémisses, et qui ne saurait donc caractériser la nature de celles-ci. En d'autres termes, c'est la *forme* extérieure que le mathématicien donne à sa pensée, le véhicule qui la rend assimilable à d'autres (1), et, pour tout dire, le *langage* propre à la mathématique ; mais il n'y faut pas chercher autre chose. Codifier ce langage, en ordonner le vocabulaire et en clarifier la syntaxe, c'est faire œuvre fort utile, et qui constitue effectivement une face de la méthode axiomatique, celle qu'on peut proprement appeler le *formalisme logique* (ou, comme on dit aussi, la « logistique »). Mais — et nous insistons sur ce point — *ce n'en est qu'une face*, et la moins intéressante.

Ce que se propose pour but essentiel l'axiomatique, c'est précisément ce que le formalisme logique, à lui seul, est incapable de fournir, l'intelligibilité profonde des mathématiques. De même que la méthode expérimentale part de la croyance *a priori* en la permanence des lois natu-

(1) Tout mathématicien sait d'ailleurs qu'une démonstration n'est pas véritablement « comprise » tant qu'on s'est borné à vérifier pas à pas la correction des déductions qui y figurent, sans essayer de concevoir clairement les idées qui ont conduit à bâtir cette chaîne de déductions de préférence à toute autre.

nous sommes pas souciés de savoir s'ils étaient des nombres réels, ou des entiers $\leq p-1$, ou des déplacements ; la seule prémisse qui soit intervenue est que l'opération $x \tau y$ sur ces éléments satisfaisait aux propriétés a), b) et c). Ne serait-ce que pour éviter des répétitions fastidieuses, on conçoit donc qu'il est commode de dérouler *une fois pour toutes* les conséquences logiques des trois *seules* propriétés a), b), c) ; il faut naturellement, pour la commodité du langage, adopter une terminologie commune ; on dit qu'un ensemble où l'on a défini une opération $x \tau y$ satisfaisant aux trois propriétés a), b), c) est muni d'une *structure de groupe* (ou, plus brièvement, qu'il est un *groupe*) ; les propriétés a), b), c) sont appelées les *axiomes* (1) des structures de groupe, et dérouler leurs conséquences, c'est faire la *théorie axiomatique des groupes*.

On peut maintenant faire comprendre ce qu'il faut entendre, d'une façon générale, par une *structure mathématique*. Le trait commun des diverses notions désignées sous ce nom générique, est qu'elles s'appliquent à des ensembles d'éléments dont la nature (2) *n'est pas spécifiée* ; pour définir une structure, on se donne une ou plusieurs relations, où interviennent ces éléments (3) (dans le cas des groupes, c'était la relation $z = x \tau y$ entre trois éléments arbitraires) ; on postule ensuite que la ou les relations données satisfont à certaines conditions (qu'on énumère)

---

(1) Il va sans dire qu'il n'y a plus aucun point commun entre ce sens du mot « axiome » et le sens traditionnel de « vérité évidente ».

(2) Nous nous plaçons ici au point de vue « naïf » et n'abordons pas les épineuses questions, mi-philosophiques, mi-mathématiques, soulevées par le problème de la « nature » des « êtres » ou « objets » mathématiques. Qu'il nous suffise de dire qu'au pluralisme initial de la représentation mentale de ces « êtres » — imaginés au début comme des « abstractions » idéales de l'expérience sensible, et conservant toute l'hétérogénéité de celle-ci — les recherches axiomatiques du XIXe et du XXe siècle ont peu à peu substitué, là aussi, une conception unitaire, ramenant progressivement toutes les notions mathématiques, d'abord à celle de nombre entier, puis, en une deuxième étape, à la notion d'*ensemble*. Cette dernière, longtemps considérée comme « primitive » et « indéfinissable » a été l'objet de polémiques sans fin, dues à son caractère d'extrême généralité et à la nature très vague des représentations mentales qu'elle évoque ; les difficultés ne se sont évanouies que lorsque s'est évanouie la notion d'ensemble elle-même (et avec elle, tous les pseudo-problèmes métaphysiques sur les « êtres » mathématiques), à la lumière des récentes recherches sur le formalisme logique ; dans cette nouvelle conception, les structures mathématiques deviennent, à proprement parler, *les seuls « objets »* de la mathématique.

Le lecteur trouvera de plus amples développements sur ce point dans les deux articles suivants :

J. DIEUDONNÉ : *Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques*. (*Revue Scientifique*, LXXVII (1939), p. 224-232).

H. CARTAN : *Sur le fondement logique des mathématiques*. (*Revue Scientifique*, LXXXI (1943), p. 3-11).

(3) En réalité, cette définition des structures n'est pas assez générale pour les besoins des mathématiques ; il faut aussi envisager le cas où les relations définissant une structure auraient lieu, non entre des *éléments* de l'ensemble considéré, mais aussi entre des *parties* de cet ensemble, et même, plus généralement, entre des éléments d'ensembles de « degré » encore plus élevé dans ce qu'on appelle l' « échelle des types ». Pour plus de précision sur ce point, voir nos *Éléments de Mathématique*, livre I (fasc. de résultats), *Actual. Scient. et Industr.*, n° 846.

et qui sont les *axiomes* de la structure envisagée (1). Faire la théorie axiomatique d'une structure donnée, c'est déduire les conséquences logiques des axiomes de la structure, *en s'interdisant toute autre hypothèse* sur les éléments considérés (en particulier, toute hypothèse sur leur « nature » propre).

LES GRANDS TYPES DE STRUCTURES.

Les relations qui forment le point de départ de la définition d'une structure peuvent être de nature assez variée. Celle qui intervient dans les structures de groupe est ce qu'on appelle une « loi de composition », c'est-à-dire une relation entre trois éléments déterminant le troisième de façon unique en fonction des deux premiers. Lorsque les relations de définition d'une structure sont des « lois de composition », la structure correspondante est appelée *structure algébrique* (par exemple, une structure de *corps* est définie par deux lois de composition, avec des axiomes convenables : l'addition et la multiplication des nombres réels définissent une structure de corps sur l'ensemble de ces nombres).

Un autre type important est fourni par les structures définies par une relation d'*ordre* ; c'est cette fois une relation entre deux éléments x, y, qui s'énonce le plus souvent « x est au plus égal à y », et que nous noterons de façon générale $x\mathrm{R}y$. Ici, il n'est plus du tout supposé qu'elle détermine uniquement un des deux éléments x, y en fonction de l'autre ; les axiomes auxquels elle est soumise sont les suivants : a) pour tout x, on a $x\mathrm{R}x$; b) les relations $x\mathrm{R}y$ et $y\mathrm{R}x$ entraînent $x = y$; c) les relations $x\mathrm{R}y$ et $y\mathrm{R}z$ entraînent $x\mathrm{R}z$. Un exemple évident d'ensemble pourvu d'une telle structure est l'ensemble des entiers (ou celui des nombres réels), en remplaçant le signe R par le signe $\leq$. Mais on observera que nous n'avons pas inclus dans les axiomes la propriété suivante, qui semble inséparable de la notion vulgaire d' « ordre » : « quels que soient x et y, on a $x\mathrm{R}y$ ou $y\mathrm{R}x$ ». Autrement dit, on n'exclut pas le cas où deux éléments pourraient être *incomparables*. Cela peut sembler à première vue paradoxal, mais il est facile de donner des exemples fort importants de structure d'ordre où un tel phénomène se présente. C'est ce qui se passe quand X et Y désignant des parties d'un même ensemble, la relation XRY signifie « X est contenu dans Y » ; ou encore quand x et y étant des entiers > 0, $x\mathrm{R}y$ signifie « x divise y » ; ou enfin lorsque, $f(x)$ et $g(x)$ étant des fonctions réelles définies dans un intervalle $a \leq x \leq b$, $f(x)\ \mathrm{R}\ g(x)$ signifie « quel que soit x, $f(x) \leq g(x)$ ». Ces exemples montrent en même temps la grande variété des domaines où interviennent les structures d'ordre, et font pressentir l'intérêt de leur étude.

---

(1) Dans le cas des groupes, il faudrait en toute rigueur compter comme axiome, en dehors des propriétés a), b), c) énoncés ci-dessus, le fait que la relation $z = x \tau y$ détermine un z et un seul lorsque x et y sont donnés ; d'ordinaire on considère que cette propriété est tacitement impliquée par l'écriture de cette relation.

relles, la méthode axiomatique trouve son point d'appui dans la conviction que, si les mathématiques ne sont pas un enchaînement de syllogismes se déroulant au hasard, elles ne sont pas davantage une collection d'artifices plus ou moins « astucieux », faits de rapprochements fortuits où triomphe la pure habileté technique. Là où l'observateur superficiel ne voit que deux ou plusieurs théories en apparence très distinctes, se prêtant, par l'entremise d'un mathématicien de génie, un « secours inattendu » (Brunschvicg, *loc. cit.*, p. 446), la méthode axiomatique enseigne à rechercher les raisons profondes de cette découverte, à trouver les idées communes enfouies sous l'appareil extérieur des détails propres à chacune des théories considérées, à dégager ces idées et à les mettre en lumière.

La notion de « structure »

Sous quelle forme va se faire cette opération ? C'est ici que l'axiomatique va se rapprocher le plus de la méthode expérimentale. Puisant comme elle à la source cartésienne, elle « divisera les difficultés pour les mieux résoudre » ; dans les démonstrations d'une théorie, elle cherchera à *dissocier* les ressorts principaux des raisonnements qui y figurent ; puis, prenant chacun d'entre eux *isolément*, et le posant en principe abstrait, elle déroulera les conséquences qui lui sont propres ; enfin, revenant à la théorie étudiée, elle en *combinera* de nouveau les éléments constitutifs précédemment dégagés, et étudiera comment ils réagissent les uns sur les autres. Il n'y a, bien entendu, rien de neuf dans ce classique balancement de l'analyse et de la synthèse ; toute l'originalité de la méthode réside dans la manière dont elle est appliquée.

Pour illustrer par un exemple le procédé dont nous venons de faire la description schématique, nous prendrons une des théories axiomatiques les plus anciennes (et les plus simples), celle des « groupes abstraits ». Considérons par exemple les trois opérations suivantes : 1° l'addition des nombres réels, où la somme de deux nombres réels (positifs, négatifs ou nuls) est définie de la manière ordinaire ; 2° la multiplication des entiers « *modulo* un nombre premier p », où les éléments que l'on considère sont les entiers 1, 2, .., p-1, le « produit » de deux de ces nombres étant par convention le *reste* de la division par p de leur produit au sens ordinaire ; 3° la « composition » des déplacements dans l'espace euclidien à 3 dimensions, le « composé » (ou « produit ») de deux déplacements S, T (pris dans cet ordre), étant par définition le déplacement obtenu en effectuant d'abord le déplacement T, puis le déplacement S. Dans chacune de ces trois théories, à deux éléments x, y (pris dans cet ordre) de l'ensemble d'éléments considéré (dans le premier cas l'ensemble des nombres réels, dans le second l'ensemble des nombres 1, 2,.., p-1, dans le troisième l'ensemble de tous les déplacements) on fait correspondre (par un procédé particulier à la théorie) un troisième élément bien déterminé, que nous conviendrons de désigner symboliquement dans les

trois cas par $x \tau y$ (ce sera la somme de x et de y si x et y sont des nombres réels, leur produit « modulo p » si ce sont des entiers $\leqq p-1$, leur « composé » si ce sont des déplacements). Si maintenant on examine les propriétés de cette « opération » dans chacune des trois théories, on constate qu'elles présentent un remarquable parallélisme ; mais à l'intérieur de chacune de ces théories, ces propriétés dépendent les unes des autres, et une analyse de leurs connexions logiques amène à en dégager un petit nombre qui, elles, sont indépendantes (c'est-à-dire qu'aucune n'est conséquence logique de toutes les autres). On peut, par exemple (1), prendre les trois suivantes, que nous exprimerons avec notre notation symbolique commune aux trois théories, mais qu'il est très aisé de traduire dans le langage particulier à chacune d'elles :

a) Quels que soient les éléments x, y, z, on a $x \tau (y \tau z) = (x \tau y) \tau z$ (« associativité » de l'opération $x \tau y$) ;

b) Il existe un élément e tel que, pour tout élément x, on ait $e \tau x = x \tau e = x$ (pour l'addition des nombres réels, c'est le nombre 0 ; pour la multiplication « modulo p » c'est le nombre 1 ; pour la composition des déplacements, c'est le déplacement « identique » qui laisse fixe chaque point de l'espace) ;

c) Pour tout élément x, il existe un élément x' tel que $x \tau x' = x' \tau x = e$ (pour l'addition des nombres réels, x' est le nombre opposé $-x$; pour la composition des déplacements, x' est le déplacement « inverse » de x, c'est-à-dire celui qui ramène chaque point déplacé par x à sa position primitive ; pour la multiplication « modulo p », l'existence de x' résulte d'un raisonnement d'arithmétique très simple (2).

On constate alors que les propriétés qui sont susceptibles de s'exprimer de la même manière dans les trois théories, à l'aide de la notation commune, sont des conséquences des trois précédentes. Par exemple, proposons-nous de démontrer que la relation $x \tau y = x \tau z$ entraîne $y = z$; on pourrait le faire dans chacune des théories par un raisonnement qui lui soit particulier ; mais on peut procéder comme suit d'une façon applicable à tous les cas : de la relation $x \tau y = x \tau z$ on déduit (x' ayant le sens défini ci-dessus) $x' \tau (x \tau y) = x' \tau (x \tau z)$; puis, en appliquant *a*), $(x' \tau x) \tau y = (x' \tau x) \tau z$; en utilisant *c*), cette relation s'écrit $e \tau y = e \tau z$, et enfin, en appliquant *b*), $y = z$, ce qu'il fallait démontrer. Dans ce raisonnement, nous avons fait totalement abstraction de la *nature* des éléments x, y, z considérés, c'est-à-dire que nous ne

(1) Ce choix n'a rien d'absolu, et on connait de nombreux systèmes d'axiomes « équivalents » à celui que nous explicitons, les énoncés des axiomes de chacun de ces systèmes étant conséquences logiques des axiomes d'un quelconque des autres systèmes.

(2) On remarque que les restes de la division par p des nombres $x, x^2, .., x^n, ...$ ne sauraient être tous distincts ; en exprimant que deux de ces restes sont égaux, on montre aisément qu'une puissance x^m de x a un reste égal à *un* ; si x' est le reste de la division par p de x^{m-1}, on en conclut que le produit « modulo p » de x et de x' est égal à 1.

Nous dirons encore quelques mots d'un troisième grand type de structures, les *structures topologiques* (ou *topologies*) : elles fournissent une formulation mathématique abstraite des notions intuitives de *voisinage*, de *limite* et de *continuité*, auxquelles nous conduit notre conception de l'espace. L'effort d'abstraction que nécessite l'énoncé des axiomes d'une telle structure est ici nettement supérieur à ce qu'il était dans les exemples précédents, et le cadre de cet exposé nous oblige à renvoyer aux traités spéciaux les lecteurs désireux de précisions sur ce point (1).

La standardisation de l'outillage mathématique.

Nous pensons en avoir assez dit pour permettre au lecteur de se faire une idée assez précise de la méthode axiomatique. Son trait le plus saillant, d'après ce qui précède, est de réaliser une *économie de pensée* considérable. Les « structures » sont des *outils* pour le mathématicien ; une fois qu'il a discerné, entre les éléments qu'il étudie, des relations satisfaisant aux axiomes d'une structure d'un type connu, il dispose aussitôt de tout l'arsenal des théorèmes généraux relatifs aux structures de ce type, là où, auparavant, il devait péniblement se forger lui-même des moyens d'attaque dont la puissance dépendait de son talent personnel, et qui s'encombraient souvent d'hypothèses inutilement restrictives, provenant des particularités du problème étudié. On pourrait donc dire que la méthode axiomatique n'est autre que le « système Taylor » des mathématiques.

Mais c'est là une comparaison insuffisante ; le mathématicien ne travaille pas machinalement, comme l'ouvrier à la chaîne ; on ne saurait trop insister sur le rôle fondamental que joue, dans ses recherches, une *intuition* particulière (2), qui n'est pas l'intuition sensible vulgaire, mais plutôt une sorte de divination directe (antérieure à tout raisonnement) du comportement normal qu'il semble en droit d'attendre, de la part d'êtres mathématiques qu'une longue fréquentation lui a rendu presque aussi familiers que les êtres du monde réel. Or, chaque structure apporte avec elle son langage propre, tout chargé de résonances intuitives particulières, issues des théories d'où l'a dégagée l'analyse axiomatique que nous avons décrite plus haut ; et pour le chercheur qui brusquement découvre cette structure dans les phénomènes qu'il étudie, c'est comme une modulation subite orientant d'un seul coup dans une direction inattendue le courant intuitif de sa pensée, et éclairant d'un jour nouveau le paysage mathématique où il se meut. Qu'on songe — pour prendre un exemple ancien — au progrès réalisé au début du XIXe siècle par la représentation géométrique des imaginaires ; de notre point de vue

(1) Voir par exemple nos *Éléments*, livre III, introduction et chapitre I. *Actual. Scient. et Industr.*, n° 858).
(2) Intuition qui d'ailleurs se trompe souvent, comme toute intuition.

c'était découvrir dans l'ensemble des nombres complexes une structure topologique bien connue, celle du plan euclidien, avec toutes les possibilités d'application qu'elle comportait, et qui, entre les mains de Gauss, Abel, Cauchy et Riemann, renouvelèrent l'Analyse en moins d'un siècle.

De tels exemples se sont multipliés dans les 50 dernières années ; espace de Hilbert, et plus généralement espaces fonctionnels, introduisant les structures topologiques dans des ensembles d'éléments qui n'étaient plus des *points*, mais des *fonctions* ; — nombres p-adiques de Hensel, où, chose plus étonnante encore, la topologie envahit ce qui était jusqu'alors le règne du *discret*, du discontinu par excellence, l'ensemble des nombres entiers ; — mesure de Haar, élargissant démesurément le champ d'application de la notion d'intégrale, et permettant une analyse très profonde des propriétés des groupes continus ; — autant de moments décisifs du progrès des mathématiques, de tournants où un éclair de génie a décidé de l'orientation nouvelle d'une théorie, en y révélant une structure qui ne paraissait pas *a priori* y jouer un rôle.

C'est dire que, moins que jamais, la mathématique est réduite à un jeu purement mécanique de formules isolées ; plus que jamais, l'intuition règne en maîtresse dans la genèse des découvertes ; mais elle dispose désormais des puissants leviers que lui fournit la théorie des grands types de structures, et elle domine d'un seul coup d'œil d'immenses domaines unifiés par l'axiomatique, où jadis semblait régner le plus informe chaos.

Une vue d'ensemble.

Guidés par la conception axiomatique, essayons donc de nous représenter l'ensemble de l'univers mathématique. Certes, nous n'y reconnaîtrons plus guère l'ordre traditionnel, qui, tel celui des premières nomenclatures des espèces animales, se bornait à ranger côte à côte les théories qui présentaient le plus de ressemblances extérieures. Au lieu des compartiments bien délimités de l'Algèbre, de l'Analyse, de la Théorie des Nombres et de la Géométrie, nous verrons, par exemple, la théorie des nombres premiers voisiner avec celle des courbes algébriques, ou la géométrie euclidienne avec les équations intégrales ; et le principe ordonnateur sera la conception d'une *hiérarchie de structures*, allant du simple au complexe, du général au particulier.

Au centre sont les grands types de structures, dont nous avons énuméré tout à l'heure les principaux, les *structures-mères*, pourrait-on dire. Dans chacun de ces types règne déjà une assez grande diversité, car il faut y distinguer la structure la plus générale du type considéré, avec le plus petit nombre d'axiomes, et celles qu'on obtient en l'enrichissant d'axiomes supplémentaires dont chacun apporte sa moisson de nouvelles conséquences. C'est ainsi que la théorie des groupes, outre des généralités valables pour tous les groupes et ne dépendant que des axiomes énoncés plus haut, comporte une théorie particulière des groupes *finis* (où l'on ajoute l'axiome que le nombre d'éléments du groupe est fini), une théorie particulière des groupes *abéliens* (où l'on a $x \tau y = y \tau x$ quels que soient x, y), ainsi qu'une théorie des groupes *abéliens finis* (où ces deux axiomes sont supposés vérifiés simultanément). De même, dans les ensembles *ordonnés*, on distingue ceux où (comme pour l'ordre des entiers ou des nombres réels), deux éléments quelconques sont comparables, et qui sont dits *totalement ordonnés* ; parmi ces derniers, on étudie plus particulièrement encore les ensembles dits *bien ordonnés* (dans lesquels, comme pour les entiers > 0, tout sous-ensemble a un « plus petit élément »). Il y a une gradation analogue dans les structures topologiques.

Au delà de ce premier noyau, apparaissent les structures qu'on pourrait appeler *multiples*, où interviennent à la fois deux ou plusieurs des grandes structures-mères, non pas simplement juxtaposées (ce qui n'apporterait rien de nouveau), mais *combinées* organiquement par un ou plusieurs axiomes qui les relient. C'est ainsi qu'on connait l'*algèbre topologique*, étude de structures où figurent à la fois une ou plusieurs lois de composition et une topologie, reliées par la condition que les opérations algébriques soient fonctions *continues* (pour la topologie considérée) des éléments sur lesquels elles portent. Non moins importante est la *topologie algébrique*, où certains ensembles de points de l'espace, définis par des propriétés topologiques (simplexes, cycles, etc.) sont pris eux-mêmes comme éléments sur lesquels viennent opérer des lois de composition. La combinaison des structures d'ordre et de l'algèbre est, elle aussi, fertile en résultats, conduisant, d'un côté à la théorie de la divisibilité et des idéaux, de l'autre à l'Intégration et à la « théorie spectrale » des opérateurs, où la topologie vient aussi jouer son rôle.

Plus loin commencent enfin à proprement parler les théories particulières, où les éléments des ensembles que l'on considère, jusqu'ici totalement indéterminés dans les structures générales, reçoivent une individualité plus caractérisée. C'est ici que l'on rejoint les théories de la mathématique classique ; analyse des fonctions de variable réelle ou complexe, géométrie différentielle, géométrie algébrique, théorie des nombres ; mais elles ont perdu leur autonomie d'autrefois, et sont maintenant des carrefours où viennent se croiser et agir les unes sur les autres de nombreuses structures mathématiques plus générales.

Pour garder une juste perspective, il nous faut, après cette rapide esquisse, ajouter aussitôt qu'elle ne doit être considérée que comme une approximation très grossière de l'état actuel des mathématiques, tel qu'il est en réalité ; elle est à la fois *schématique*, *idéalisée* et *figée*.

Schématique — car dans le détail, les choses ne se passent pas aussi simplement ni aussi régulièrement que nous avons paru le dire ; il y a entre autres d'inattendus retours en arrière, où une théorie tout à fait particulière comme celle des nombres réels vient prêter une aide indispensable à l'édification d'une théorie générale comme la Topologie ou l'Intégration.

Idéalisée — car il s'en faut que, dans toutes les parties des mathématiques la part exacte de chacune des grandes structures soit parfaitement reconnue et délimitée ; dans certaines théories (par exemple en Théorie des Nombres), il subsiste de très nombreux résultats isolés qu'on ne sait jusqu'ici classer ni relier de façon satisfaisante à des structures connues.

Figée enfin — car rien n'est plus éloigné de la méthode axiomatique qu'une conception statique de la science, et nous ne voudrions pas laisser croire au lecteur que nous avons prétendu retracer un état définitif de celle-ci. Les structures ne sont immuables ni dans leur nombre ni dans leur essence ; il est très possible que le développement ultérieur des mathématiques augmente le nombre des structures fondamentales, en révélant la fécondité de nouveaux axiomes, ou de nouvelles combinaisons d'axiomes, et on peut d'avance escompter des progrès décisifs de ces *inventions* de structures, si l'on en juge d'après ceux qu'ont apportés les structures actuellement connues ; d'autre part ces dernières ne sont en aucune manière des édifices achevés, et il serait très surprenant que tout le suc de leurs principes fût d'ores et déjà épuisé.

Ainsi, avec ces indispensables correctifs, peut-on mieux prendre conscience de la vie interne de la mathématique, de ce qui fait à la fois son unité et sa diversité ; telle une grande cité, dont les faubourgs ne cessent de progresser, de façon quelque peu chaotique, sur le terrain environnant, tandis que le centre se reconstruit périodiquement, chaque fois suivant un plan plus clair et une ordonnance plus majestueuse, jetant à bas les vieux quartiers et leurs dédales de ruelles, pour lancer vers la périphérie des avenues toujours plus directes, plus larges et plus commodes.

Retour sur le passé et conclusion.

La conception que nous avons tenté d'exposer ci-dessus ne s'est pas formée d'un seul coup, et n'est que le terme d'une évolution qui s'est poursuivie depuis plus d'un demi-siècle, et n'a pas été sans rencontrer de sérieuses résistances, tant chez les philosophes que chez les mathématiciens eux-mêmes. Beaucoup de ces derniers n'ont pendant longtemps consenti à voir dans l'axiomatique que de vaines subtilités de logiciens, incapables de féconder une théorie quelconque. Cette critique s'explique sans doute par un pur accident historique : les premières axiomatisations, et qui eurent le plus de retentissement (celles de l'arithmétique avec Dedekind et Peano, de la géométrie euclidienne avec Hilbert) portaient sur des théories *univalentes*, c'est-à-dire telles que le système global de leurs axiomes les déterminait entièrement, et n'était par suite susceptible de s'appliquer à aucune théorie autre que celle d'où on l'avait extrait (au rebours de ce que nous avons vu pour la théorie des groupes, par exemple) ; s'il en avait été ainsi pour toutes les structures, le reproche de stérilité adressé à la méthode axiomatique aurait été pleinement justifié (1). Mais celle-ci a prouvé le mouvement en marchant ; et les répugnances que l'on constate encore çà et là ne s'expliquent que par la peine qu'éprouve naturellement l'esprit à admettre que, devant un problème concret, une forme d'intuition autre que celle directement suggérée par les données (et qui ne s'obtient souvent que par une abstraction supérieure et parfois difficile) puisse se montrer également féconde.

Quant aux objections des philosophes, elles portent surtout sur un terrain où nous aurions garde, faute de compétence, de nous aventurer sérieusement ; le grand problème des rapports du monde expérimental et du monde mathématique (2). Qu'il y ait une connexion étroite entre les phénomènes expérimentaux et les structures mathématiques, c'est ce que semblent bien confirmer de la façon la plus inattendue les découvertes récentes de la physique contemporaine ; mais nous en ignorons totalement les raisons profondes (si tant est qu'on puisse donner un sens à ces termes), et nous les ignorerons peut-être toujours. Il est en tout cas une constatation qui pourrait, sur ce point, inciter à l'avenir les philosophes à plus de prudence : avant les développements révolutionnaires de la physique moderne, on a dépensé beaucoup de peine pour vouloir à toute force faire sortir les mathématiques de vérités expérimentales, notamment d'intuitions spatiales immédiates ; mais d'une part la physique des quanta a montré que cette intuition « macroscopique » du réel couvrait des phénomènes « microscopiques » d'une tout autre nature, relevant de branches des mathématiques qui n'avaient certes pas été imaginées en vue d'applications aux sciences expérimentales ; et d'un autre côté, la méthode axiomatique a montré que les « vérités » dont on voulait faire le pivot des mathématiques n'étaient que des aspects très spéciaux de conceptions générales qui n'y limitaient nullement leur portée. Si bien qu'en fin de compte, cette intime fusion dont on nous faisait admirer l'harmonieuse nécessité, n'apparaît plus que comme un contact fortuit de deux disciplines dont les liens sont beaucoup plus cachés qu'on ne pouvait le supposer *a priori*.

Dans la conception axiomatique, la mathématique apparaît en somme comme un réservoir de *formes* abstraites — les structures mathématiques ; et il se trouve — sans qu'on sache bien pourquoi — que certains aspects de la réalité expérimentale viennent se mouler en certaines de ces formes,

(1) On a aussi assisté, surtout aux débuts de l'axiomatique, à une floraison de structures tératologiques, totalement dénuées d'applications, et dont le seul mérite était de montrer la portée exacte de chaque axiome en observant ce qui se passait quand on le supprimait ou quand on le modifiait. On pouvait évidemment être tenté d'en conclure que c'étaient là les seuls produits qu'il convenait d'attendre de la méthode !

(2) Nous n'abordons pas ici les objections soulevées par l'application des règles de la logique formelle aux raisonnements des théories axiomatiques ; elles se rattachent aux difficultés logiques rencontrées par la Théorie des Ensembles. Signalons simplement que ces difficultés peuvent se surmonter d'une manière qui ne laisse subsister aucun malaise, ni aucun doute sur la correction des raisonnements ; on pourra consulter là-dessus les articles de H. Cartan et J. Dieudonné cités plus haut.

comme par une sorte de préadaptation. Il n'est pas niable, bien entendu, que la plupart de ces formes avaient à l'origine un contenu intuitif bien déterminé ; mais c'est précisément en les vidant volontairement de ce contenu qu'on a su leur donner toute l'efficacité qu'elles portaient en puissance, et qu'on les a rendues susceptibles de recevoir des interprétations nouvelles, et de remplir pleinement leur rôle élaborateur.

C'est seulement avec ce sens du mot « forme » qu'on peut dire que la méthode axiomatique est un « formalisme » ; l'unité qu'elle confère à la mathématique, ce n'est pas l'armature de la logique formelle, unité de squelette sans vie ; c'est la sève nourricière d'un organisme en plein développement, le souple et fécond instrument de recherches auquel ont consciemment travaillé, depuis Gauss, tous les grands penseurs des mathématiques, tous ceux qui, suivant la formule de Lejeune-Dirichlet, ont toujours tendu à « substituer les *idées* au *calcul* ».

Nicolas Bourbaki.

MODE D'EMPLOI DE CE TRAITÉ

1. Le traité prend les mathématiques à leur début, et donne des démonstrations complètes. Sa lecture ne suppose donc, en principe, aucune connaissance mathématique particulière, mais seulement une certaine habitude du raisonnement mathématique et un certain pouvoir d'abstraction.

Néanmoins, le traité est destiné plus particulièrement à des lecteurs possédant au moins une bonne connaissance des matières enseignées, en France, dans les cours de mathématiques générales (à l'étranger, dans la première ou les deux premières années de l'Université), et, si possible, une certaine connaissance des parties essentielles d'un cours de calcul différentiel et intégral.

2. La première partie du traité est consacrée aux structures fondamentales de l'Analyse (sur le sens du mot « structure », cf. Livre I, chap. 2) ; dans chacun des Livres en lesquels se divise cette partie, on étudie une de ces structures, ou plusieurs structures étroitement apparentées (Livre I, Théorie des Ensembles ; Livre II, Algèbre ; Livre III, Topologie générale ; Livres suivants : Fonctions d'une variable réelle, Espaces vectoriels topologiques, Intégration, Différentielles et intégrales de différentielles, etc.).

Les principes généraux étudiés dans la première partie trouveront, dans les parties suivantes, leur application à des théories où interviennent simultanément diverses structures.

3. Le mode d'exposition suivi dans la première partie est axiomatique et abstrait ; il procède le plus souvent du général au particulier. Le choix de cette méthode était imposé par l'objet principal de cette première partie, qui est de donner des fondations solides à tout le reste du traité, et même à tout l'ensemble des mathématiques modernes. Il est indispensable pour cela d'acquérir d'emblée un assez grand nombre de notions et de principes très généraux. De plus, les nécessités de la démonstration exigent que les chapitres, les livres et les parties se suivent dans

un ordre logique rigoureusement fixé. L'utilité de certaines considérations n'apparaîtra donc au lecteur que s'il possède déjà des connaissances assez étendues, ou bien s'il a la patience de suspendre son jugement jusqu'à ce qu'il ait eu l'occasion de s'en convaincre.

4. Pour obvier en quelque mesure à cet inconvénient, on a inséré assez souvent, dans le cours du texte, des exemples qui se réfèrent à des faits que le lecteur peut déjà connaître par ailleurs, mais qui n'ont pas encore été exposés dans le traité ; ces exemples sont toujours placés entre deux astérisques *..... *. La plupart des lecteurs trouveront sans doute que ces exemples leur faciliteront l'intelligence du texte, et préféreront ne pas les omettre, même en première lecture ; une telle omission, néanmoins, n'aurait, bien entendu, du point de vue logique, aucun inconvénient.

5. Le lecteur voudra peut-être parfois se faire une idée sommaire de l'ensemble d'un Livre, avant d'en aborder l'étude détaillée. Cette tâche lui sera facilitée par des *fascicules de résultats*, annexés, en principe, à chaque Livre, et destinés également aux lecteurs pressés, qui désireraient arriver le plus vite possible à l'étude de problèmes spéciaux. Ces fascicules contiendront, autant que possible, l'essentiel de ce qui sera nécessaire à l'étude des parties suivantes.

6. L'armature logique de chaque chapitre est constituée par les *définitions*, les *axiomes* et les *théorèmes* de ce chapitre : c'est là ce qu'il est principalement nécessaire de retenir en vue de ce qui doit suivre. Les résultats moins importants, ou qui peuvent être facilement retrouvés à partir des théorèmes, figurent sous le nom de « propositions », « lemmes », « corollaires », « remarques », etc. ; ceux qui peuvent être omis en première lecture sont imprimés en petits caractères. Sous le nom de « scholie », on trouvera quelquefois un commentaire d'un théorème particulièrement important.

7. Certains passages sont destinés à prémunir le lecteur contre des erreurs graves, où il risquerait de tomber ; ces passages sont signalés en marge par le signe ☡ (« tournant dangereux »).

8. Les *exercices* sont destinés, d'une part, à permettre au lecteur de vérifier qu'il a bien assimilé le texte ; d'autre part, à lui faire connaître des résultats qui n'avaient pas leur place dans le

texte, mais qui ont néanmoins leur intérêt. Ils peuvent être omis en première lecture ; mais on recommande à l'étudiant de les résoudre, en tout cas, en deuxième lecture. Les plus difficiles sont marqués du signe ¶.

9. La terminologie suivie dans ce traité a fait l'objet d'une attention particulière. *On s'est efforcé de ne jamais s'écarter de la terminologie reçue sans de très sérieuses raisons.* Non seulement chaque fascicule sera pourvu d'un *index* détaillé, mais chaque Livre sera suivi d'un *Dictionnaire*, où seront expliqués et discutés, en plus des termes employés dans ce traité, les termes correspondants employés jusqu'ici dans les langues principales. Ce dictionnaire permettra donc au lecteur du traité d'aborder l'étude de mémoires originaux dans ces diverses langues, et aussi au mathématicien accoutumé à une autre terminologie de se familiariser rapidement avec celle du traité.

10. On s'est efforcé, sans sacrifier la simplicité de l'exposé, de se servir toujours d'un langage rigoureusement correct. Autant qu'il a été possible, les *abus de langage*, sans lesquels tout texte mathématique risque de devenir pédantesque et même illisible, ont été signalés au passage ; s'il y a lieu, ils sont mentionnés à l'index ou au dictionnaire.

11. Le texte étant consacré, en principe, à l'exposé dogmatique d'une théorie, on n'y trouvera qu'exceptionnellement des références bibliographiques ; les références seront groupées dans un *exposé historique*, placé le plus souvent *à la fin de chaque chapitre* et où l'on trouvera, le cas échéant, des indications sur les problèmes non résolus de la théorie. On se bornera à donner les références aux livres et mémoires originaux dont l'étude peut être le plus profitable au lecteur. Les références qui servent seulement à fixer des points de priorité seront presque toujours omises ; à plus forte raison, le lecteur ne doit pas s'attendre à trouver ici de bibliographie complète des sujets traités.

Quant aux exercices, il n'a pas été jugé utile, en général, d'indiquer leur provenance, qui est très diverse (mémoires originaux, ouvrages didactiques, recueils d'exercices).

12. Les renvois à une partie du traité sont donnés comme suit :

a) Si l'on se réfère à des théorèmes, axiomes ou définitions énoncés *dans le même paragraphe*, on les désigne s'il y a lieu par leur numéro.

b) S'ils sont énoncés *dans un autre paragraphe du même chapitre*, on indique en outre ce paragraphe.

c) S'ils sont énoncés *dans un autre chapitre du même Livre*, on indique le chapitre et le paragraphe correspondants.

d) S'ils se trouvent *dans un autre Livre*, on commence par indiquer en outre ce Livre par son titre.

Les *fascicules de résultats* sont désignés par la lettre R : par exemple, *Ens.* R signifie « fascicule de résultats de la Théorie des Ensembles ».

13. Chaque fois qu'il peut être utile au lecteur d'avoir présents sous les yeux, durant toute la lecture d'un fascicule, certains axiomes, certaines définitions, etc., ceux-ci sont reproduits sur un *dépliant* placé à la fin du fascicule (et mentionné dans la table des matières).