

L'ENSEIGNANT : David Aubin

– *Examen final* –

14 mai 2008.

Enoncés

L'examen comporte trois parties :

- I. 20 questions à choix multiples (total 20 points) ;
- II. Un choix de questions à développements (en choisir UNE : total 20 points) ;
- III. 1 commentaire d'une image (5 points).

I. Questions à choix multiples (1 point par question : total 20 points)

- 1) Quel mathématicien est considéré comme étant le fondateur de l'Ecole polytechnique ?
 - a) Gaspar Monge.
 - b) Pierre-Simon Laplace.
 - c) Augustin-Louis Cauchy.
 - d) François Arago.
 - e) Aucune de ces réponses.
- 2) Quel était l'impondérable dont on pensait qu'il pouvait expliquer les processus de combustion ?
 - a) Le calorique.
 - b) Le phlogiston.
 - c) L'éther.
 - d) Le fluide électrique.
 - e) Aucune de ces réponses.
- 3) Selon François Arago, à quoi sert la vulgarisation scientifique qu'il met en œuvre, par exemple, dans son cours d'astronomie populaire à l'Observatoire de Paris dans les années 1820 et 1830 ?
 - a) A  duquer les ouvriers pour qu'ils ne cassent plus les machines.
 - b) A éradiquer les superstitions pour transformer les citoyens du pays en électeurs avisés.
 - c) A rendre l'instruction publique gratuite et obligatoire.
 - d) A rendre plus rigoureuse les mathématiques de son époque.
 - e) Aucune de ces réponses.

- 4) Les nombres, l'infini, et l'espace : ces trois objets qui sont étudiés par les mathématiques ont donné naissance à trois grandes catégories de ce domaine du savoir : l'arithmétique puis l'algèbre, l'analyse mathématique et ... ?
- Les géométries non-euclidiennes.
 - Les paradoxes de Zénon.
 - L'algèbre de l'infini.
 - Le calcul différentiel et intégral.
 - Aucune de ces réponses.
- 5) Que veut dire l'expression employée par Emmanuel Kant « *Sapere aude* » dans son article « Qu'est-ce que les Lumières » (1784) ?
- Il faut savoir écouter la Nature, c'est-à-dire l'observer attentivement et la respecter.
 - Pensez ce que vous voulez, mais obéissez !
 - Le progrès de la science n'a pas de limite et contribue au bonheur des hommes.
 - Osez vous opposer au pouvoir monarchique absolu même au péril de votre vie.
 - Aucune de ces réponses.
- 6) Que fait Richard Dedekind dans le but de donner un fondement ?
- Il montre que les géométries non euclidiennes sont cohérentes à l'aide de la pseudosphère.
 - Il donne une nouvelle définition de la limite en terme d' ϵ et de δ .
 - Il redéfinit les nombres réels à l'aide des coupures.
 - Il reformule les axiomes de la géométrie.
 - Aucune de ces réponses.
- 7) Le livre les *Fondements de la géométrie* permet de :
- fonder la géométrie sur l'arithmétique et la théorie des ensembles.
 - fonder la géométrie non-euclidienne sur la géométrie euclidienne.
 - fonder la mathématique dans son ensemble sur la notion de « structure ».
 - d'exprimer tout problème d'algèbre comme un problème de géométrie.
 - Aucune de ces réponses.
- 8) De quel instrument les savants français Jean-Baptiste Delambre et Pierre Méchain se sont-ils servi pour la détermination du mètre ?
- D'un calorimètre.
 - D'une règle.
 - D'un théodolite.
 - D'une balance de précision.
 - Aucune de ces réponses.
- 9) Qu'est-ce que le positivisme ?
- Une doctrine selon laquelle seuls les nombres positifs existent.
 - Une philosophie de la connaissance proposée par Auguste Comte.
 - L'affirmation selon laquelle l'énergie est toujours positive.
 - La vulgarisation des sciences proposée par Arago.
 - Aucune de ces réponses.

- 10) Dans lequel de ces domaines Carl Friedrich Gauss n'a-t-il jamais travaillé ?
- Les géométries non euclidiennes.
 - L'électromagnétisme.
 - L'astronomie.
 - La théorie des nombres.
 - Aucune de ces réponses.
- 11) Qu'est-ce qu'un indicateur de Watt ?
- Un appareil servant à mesurer le travail fait par une machine à vapeur.
 - C'est la même chose qu'un cycle de Carnot.
 - Une unité de mesure de la puissance d'une ampoule électrique.
 - La théorie mathématique des machines à vapeur.
 - Aucune de ces réponses.
- 12) Quelle conséquence tire-t-on de l'expérience de Joule ?
- L'équivalence entre tous les impondérables.
 - L'équivalence entre électricité et magnétisme.
 - La possibilité de transformer un mouvement mécanique en chaleur.
 - La possibilité de transformer de la chaleur en mouvement mécanique.
 - Aucune de ces réponses.
- 13) Qu'est-ce que valeur avant tout Cauchy dans son cours d'analyse à l'Ecole polytechnique ?
- La méthode axiomatique.
 - L'intuition géométrique.
 - L'observation.
 - La rigueur.
 - Aucune de ces réponses.
- 14) Qu'est-ce que les quaternions ?
- Un corps commutatif décrit par Cayley.
 - Le corps algébrique formé des multiples de quatre, utilisé par Gauss.
 - Des solides parfaits étudiés par Euclide.
 - Des nombres utilisés par Maxwell pour écrire les équations de l'électromagnétisme.
 - Aucune de ces réponses.
- 15) Si la géométrie de Lobatchevski était contradictoire, celle d'Euclide le serait aussi. Quelle construction géométrique peut nous aider à concevoir cette affirmation ?
- La pseudosphère de Beltrami.
 - Les cinq solides platoniciens.
 - Les matrices de Cayley.
 - Les parallèles de Lobatchevski.
 - Aucune de ces réponses.

- 16) Pourquoi Bolzano est-il insatisfait des preuves courantes à son époque du théorème des valeurs intermédiaires (si $f(a)f(b) < 0$, f une fonction réelle continue alors il existe c tel que $a < c < b$ et $f(c) = 0$) ?
- a) Parce qu'il existe des cas où le théorème est faux.
 - b) Parce que le théorème n'a pas encore été démontré à son époque.
 - c) Parce que toutes les preuves existantes sont basées sur la géométrie.
 - d) Parce que toutes les preuves existantes sont basées sur la mécanique.
 - e) Aucune de ces réponses.
- 17) Qui est l'auteur de la théorie des tourbillons qui s'oppose à la théorie de la gravitation universelle de Newton ?
- a) Leibniz.
 - b) Descartes.
 - c) Kepler.
 - d) Einstein.
 - e) Aucune de ces réponses.
- 18) Parmi les objectifs suivants, lequel n'est pas poursuivi par Joseph Fourier dans la *Théorie analytique de la chaleur* ?
- a) Trouver la loi de la diffusion de la chaleur et la résoudre pour un certain nombre de cas simples.
 - b) Présenter sa méthode de résolution des problèmes d'analyse à l'aide de la décomposition des fonctions en séries trigonométriques.
 - c) Fonder la théorie de la chaleur sur des bases aussi solides que la mécanique rationnelle.
 - d) Déterminer quelle est la véritable nature de la chaleur. .
 - e) Aucune de ces réponses.
- 19) A quelle époque les grands laboratoires de physique et de chimie consacrés à la recherche et à l'enseignement (comme ceux de la Sorbonne à Paris ou le Cavendish Lab à Cambridge) ont-ils été fondés ?
- a) Au Moyen-Âge.
 - b) A l'époque de la Révolution française.
 - c) Pendant la seconde Révolution industrielle.
 - d) Après la Seconde Guerre mondiale.
 - e) Aucune de ces réponses.
- 20) Qui a écrit les *Réflexions sur la puissance motrice du feu* ?
- a) Lazzar Carnot.
 - b) Jean-Baptiste Fourier.
 - c) James Watt.
 - d) Sadi Carnot.
 - e) Aucune de ces réponses.

II. Questions à développement

Répondre en deux à quatre pages à UNE des trois questions suivantes (total 20 points). Faire un commentaire structuré avec introduction, développement, et conclusion.

1) L'Encyclopédie, les Lumières, les mathématiques.

Commentez l'extrait suivant, tiré du discours préliminaire de l'*Encyclopédie* de Diderot et d'Alembert.

« Nous voilà donc conduits à déterminer les propriétés de l'étendue simplement en tant que figurée. C'est l'objet de la Géométrie, qui pour y parvenir plus facilement, considère d'abord l'étendue limitée par une seule dimension, ensuite par deux, & enfin sous les trois dimensions qui constituent l'essence du corps intelligible, c'est - à - dire, d'une portion de l'espace terminée en tout sens par des bornes intellectuelles.

Ainsi, par des opérations & des abstractions successives de notre esprit, nous dépouillons la matière de presque toutes ses propriétés sensibles, pour n'envisager en quelque manière que son phantôme; & l'on doit sentir d'abord que les découvertes auxquelles cette recherche nous conduit, ne pourront manquer d'être fort utiles toutes les fois qu'il ne sera point nécessaire d'avoir égard à l'impenétrabilité des corps; par exemple, lorsqu'il sera question d'étudier leur mouvement, en les considérant comme des parties de l'espace, figurées, mobiles, & distantes les unes des autres.

L'examen que nous faisons de l'étendue figurée nous présentant un grand nombre de combinaisons à faire, il est nécessaire d'inventer quelque moyen qui nous rende ces combinaisons plus faciles; & comme elles consistent principalement dans le calcul & le rapport des différentes parties dont nous imaginons que les corps géométriques sont formés, cette recherche nous conduit bientôt à l'Arithmétique ou Science des nombres. Elle n'est autre chose que l'art de trouver d'une manière abrégée l'expression d'un rapport unique qui résulte de la comparaison de plusieurs autres. Les différentes manières de comparer ces rapports donnent les différentes règles de l'Arithmétique.

De plus, il est bien difficile qu'en réfléchissant sur ces règles, nous n'apercevions certains principes ou propriétés générales des rapports, par le moyen desquelles nous pouvons, en exprimant ces rapports d'une manière universelle, découvrir les différentes combinaisons qu'on en peut faire. Les résultats de ces combinaisons, réduits sous une forme générale, ne seront en effet que des calculs arithmétiques indiqués, & représentés par l'expression la plus simple & la plus courte que puisse souffrir leur état de généralité. La science ou l'art de désigner ainsi les rapports est ce qu'on nomme Algèbre. Ainsi quoiqu'il n'y ait proprement [p. vj] de calcul possible que par les nombres, ni de grandeur mesurable que l'étendue (car sans l'espace nous ne pourrions mesurer exactement le temps) nous parvenons, en généralisant toujours nos idées, à cette partie principale des Mathématiques, & de toutes les Sciences naturelles, qu'on appelle Science des grandeurs en général; elle est le fondement de toutes les découvertes qu'on peut faire sur la quantité, c'est - à - dire, sur tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution.

Cette Science est le terme le plus éloigné où la contemplation des propriétés de la matière puisse nous conduire, & nous ne pourrions aller plus loin sans sortir tout - à - fait de l'univers matériel. Mais telle est la marche de l'esprit dans ses recherches, qu'après avoir généralisé ses perceptions jusqu'au point de ne pouvoir plus les décomposer davantage, il revient ensuite sur ses pas, recompose de nouveau ces perceptions mêmes, & en forme peu à peu & par gradation, les êtres réels qui sont l'objet immédiat & direct de nos sensations. Ces êtres, immédiatement relatifs à nos besoins, sont aussi ceux qu'il nous importe le plus d'étudier; les abstractions mathématiques nous en facilitent la connoissance; mais elles ne sont utiles qu'autant qu'on ne s'y borne pas.

C'est pourquoi, ayant en quelque sorte épuisé par les spéculations géométriques les propriétés de l'étendue figurée, nous commençons par lui rendre l'impénétrabilité, qui constitue le corps physique, & qui étoit la dernière qualité sensible dont nous l'avions dépouillée. Cette nouvelle considération entraîne celle de l'action des corps les uns sur les autres, car les corps n'agissent qu'en tant qu'ils sont impénétrables; & c'est delà que se déduisent les lois de l'équilibre & du mouvement, objet de la Mécanique. Nous étendons même nos recherches jusqu'au mouvement des corps animés par des forces ou causes motrices inconnues, pourvû que la loi suivant laquelle ces causes agissent, soit connue ou supposée l'être.

Rentrés enfin tout - à - fait dans le monde corporel, nous appercevons bien - tôt l'usage que nous pouvons faire de la Géométrie & de la Mécanique, pour acquérir sur les propriétés des corps les connoissances les plus variées & les plus profondes. C'est à peu - près de cette manière que sont nées toutes les Sciences appelées Physico - Mathématiques. On peut mettre à leur tête l'Astronomie, dont l'étude, après celle de nous - mêmes, est la plus digne de notre application par le spectacle magnifique qu'elle nous présente. Joignant l'observation au calcul, & les éclairant l'un par l'autre, cette science détermine avec une exactitude digne d'admiration les distances & les mouvemens les plus compliqués des corps célestes; elle assigne jusqu'aux forces mêmes par lesquelles ces mouvemens sont produits ou altérés. Aussi peut - on la regarder à juste titre comme l'application la plus sublime & la plus sûre de la Géométrie & de la Mécanique réunies, & ses progrès comme le monument le plus incontestable du succès auxquels l'esprit humain peut s'élever par ses efforts.

L'usage des connoissances mathématiques n'est pas moins grand dans l'examen des corps terrestres qui nous environnent. Toutes les propriétés que nous observons dans ces corps ont entr'elles des rapports plus ou moins sensibles pour nous: la connoissance ou la découverte de ces rapports est presque toujours le seul objet auquel il nous soit permis d'atteindre, & le seul par conséquent que nous devons nous proposer. Ce n'est donc point par des hypothèses vagues & arbitraires que nous pouvons espérer de connoître la Nature; c'est par l'étude réfléchie des phénomènes, par la comparaison que nous ferons des uns avec les autres, par l'art de réduire, autant qu'il sera possible, un grand nombre de phénomènes à un seul qui puisse en être regardé comme le principe. En effet, plus on diminue le nombre des principes d'une science, plus on leur donne d'étendue; puisque l'objet d'une science étant nécessairement déterminé, les principes appliqués à cet objet seront d'autant plus féconds qu'ils seront en plus petit nombre. Cette réduction, qui les rend d'ailleurs plus faciles à saisir, constitue le véritable esprit systématique qu'il faut bien se garder de prendre pour l'esprit de système, avec lequel il ne se rencontre pas toujours. »

2) La géométrie de Lobatchevski.

Commentez la preuve de la proposition 18, tirée des « Études géométriques sur la théorie des parallèles » de Nikolai Ivanovitch Lobachevski, publié en 1829 (une reproduction de la proposition, de la preuve et de la figure qui les accompagne, tirée de *La Théorie des parallèles*, Albert Blanchard, Paris, 1980, p. 18, se trouve à la page suivante).

Dans votre commentaire, vous pourrez développer les points suivants :

- (a) Quelle est la définition du parallélisme donnée par Lobatchevski ?
- (b) Que veut-il dire quand il écrit, sous la figure, « plaçons AF sur AG » ?
- (c) Pourquoi CD est-elle parallèle à AB si CE coupe toujours AB ?
- (d) A quoi sert, dans ce cadre, de prouver que deux droites sont réciproquement parallèles ?

Rappels de quelques propositions utilisées dans la preuve :

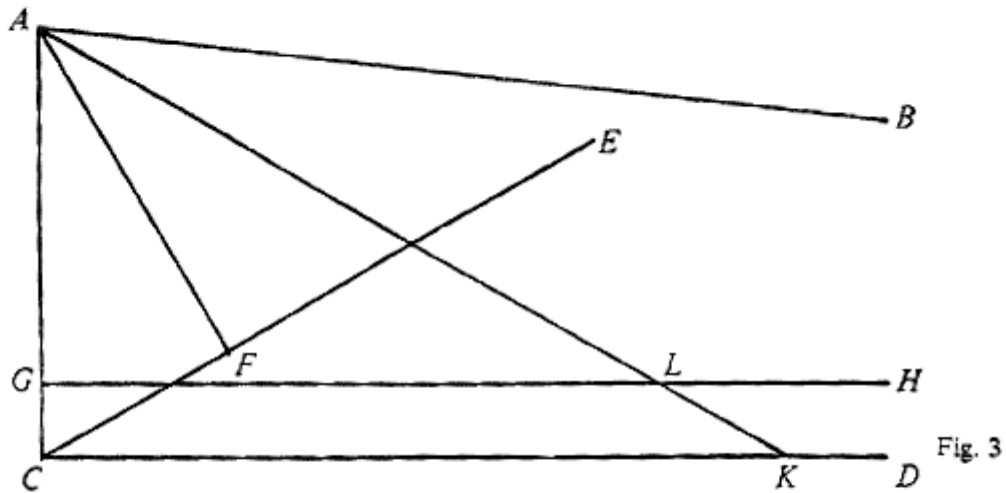
3. Une ligne droite, suffisamment prolongée dans les deux sens, pourra dépasser toute limite, et partagera ainsi en deux parties toute portion de plan limitée.

9. Dans un triangle rectiligne, à un plus grand côté est opposé un plus grand angle. Dans un triangle rectangle, l'hypothénuse est plus grande que chacun des côtés de l'angle droit, et les deux angles adjacents à l'hypothénuse sont aigus.

16. Toutes les droites tracées par un même point dans un plan peuvent se distribuer, par rapport à une droite donnée dans ce plan, en deux classes, à savoir : en droites *qui coupent* la droite donnée, et en droites *qui ne la coupent pas*. La droite qui forme la *limite* commune de ces deux classes est dite *parallèle* à la droite donnée.

18 – Deux droites sont toujours réciproquement parallèles.

Soit AC (fig. 3) une perpendiculaire sur CD , et AB une parallèle à CD . Menons par le point C la ligne CE , faisant avec CD un angle aigu quelconque ECD , et abaissons du point A sur CE la perpendiculaire AF . Nous formerons ainsi un triangle rectangle ACF , dont l'hypothénuse AC sera plus grande que le côté



AF de l'angle droit (prop. 9). Faisons $AG = AF$, et plaçons AF sur AG ; AB et FE prendront les positions AK et GH , de sorte que l'on aura l'angle $BAK = FAC$. Il faudra alors que AK coupe la droite DC quelque part en K (prop. 16), et il en résultera un triangle AKC , dans lequel la perpendiculaire GH rencontrera la ligne AK en L (prop. 3), et déterminera par là la distance AL du point A au point de rencontre de la ligne CE avec AB .

De là résulte que CE coupera toujours AB , quelque petit que soit l'angle ECD . Donc CD est parallèle à AB (prop. 16).

3) Les fluides impondérables

Commentez l'extrait suivant (page suivante) tiré du *Traité élémentaire de physique* d'Eugène Péclet, 3^e édition (Paris : Hachette, 1838), 335-336. L'auteur est né en 1793 à Besançon, mort à Paris en 1857. Il est élève de l'École normale supérieure en 1812. Il sera ensuite professeur de physique à Marseille, puis fondateur de l'École centrale des arts et manufactures (1828).

Dans votre commentaire, vous pourrez développer les points suivants :

- (a) Qu'est-ce qu'un impondérable ? Pourquoi a-t-on émis l'hypothèse de leur existence ?
- (b) Qu'est-ce que le calorique ? Pourquoi est-ce un impondérable ?
- (c) Était-il possible de mesurer la quantité de calorique contenu dans un corps ?
- (d) Comparez la position de Péclet à propos des deux hypothèses concernant la nature du calorique avec celle de Fourier.
- (e) Pourquoi Péclet dit-il que les impondérables ne sont probablement pas tous différents les uns des autres ?

SECONDE PARTIE.

FLUIDES IMPONDÉRABLES.

464. Un grand nombre de phénomènes ont conduit à admettre l'existence de plusieurs fluides d'une subtilité extrême qui pénètrent tous les corps, et qui sont complètement dépourvus de pesanteur. Les fluides impondérables admis jusqu'ici sont : le calorique, les fluides électriques, magnétiques, et la lumière.

Il est probable que ces fluides ne sont pas tous différents les uns des autres, et que plusieurs ne sont que des manières d'être diverses d'un seul et même fluide ; mais nous les admettons tous, en nous réservant de faire connaître leurs similitudes et leurs différences.

CHAPITRE PREMIER.

DU CALORIQUE.

465. Au commencement de cet ouvrage nous avons parlé du calorique ; nous l'avons regardé comme un fluide dont tous les corps étaient pénétrés, qui jouissait d'une grande force expansive, et qui avait pour tous les corps une affinité plus ou moins grande, et variable pour chacun d'eux dans les mêmes circonstances. C'est par ces différentes propriétés du calorique et par l'attraction moléculaire que nous avons expliqué les différents états des corps. (90 à 92.)

[...]

467. Deux hypothèses différentes ont été émises sur la nature intime de la chaleur. Dans la première, on regarde la chaleur comme provenant d'un fluide très subtil dont les molécules, douées d'une grande force répulsive, se meuvent avec une grande vitesse, et s'accablent dans les corps à mesure que l'intensité des effets de la chaleur y augmente. Dans l'autre, on admet un fluide jouissant des mêmes propriétés physiques, remplissant tout l'espace ; mais on considère la chaleur comme résultant des vibrations moléculaires des corps, vibrations qui se transmettent à distance par l'intermédiaire du calorique, comme les vibrations sonores se transmettent par l'air : les corps les plus chauds sont alors ceux dans lesquels les vibrations s'exécutent avec la plus grande rapidité. Aucune de ces deux hypothèses n'est suffisamment démontrée par les faits connus ; mais heureusement les lois physiques de la chaleur sont indépendantes de ces hypothèses. La première hypothèse étant plus simple et se prêtant plus facilement à l'explication des phénomènes, nous l'admettrons.

III. Commentaire d'une image (5 points)

Choisir l'image A ou B et commentez la.

Indiquez de quoi il s'agit. D'où l'image est-elle tirée ? Que représente-t-elle ? A qui est-elle destinée et à quoi sert-elle ? A quelle époque de l'histoire des sciences fait-elle référence ? En quoi est-elle symbolique de la place des sciences à cette époque ?

Image A)

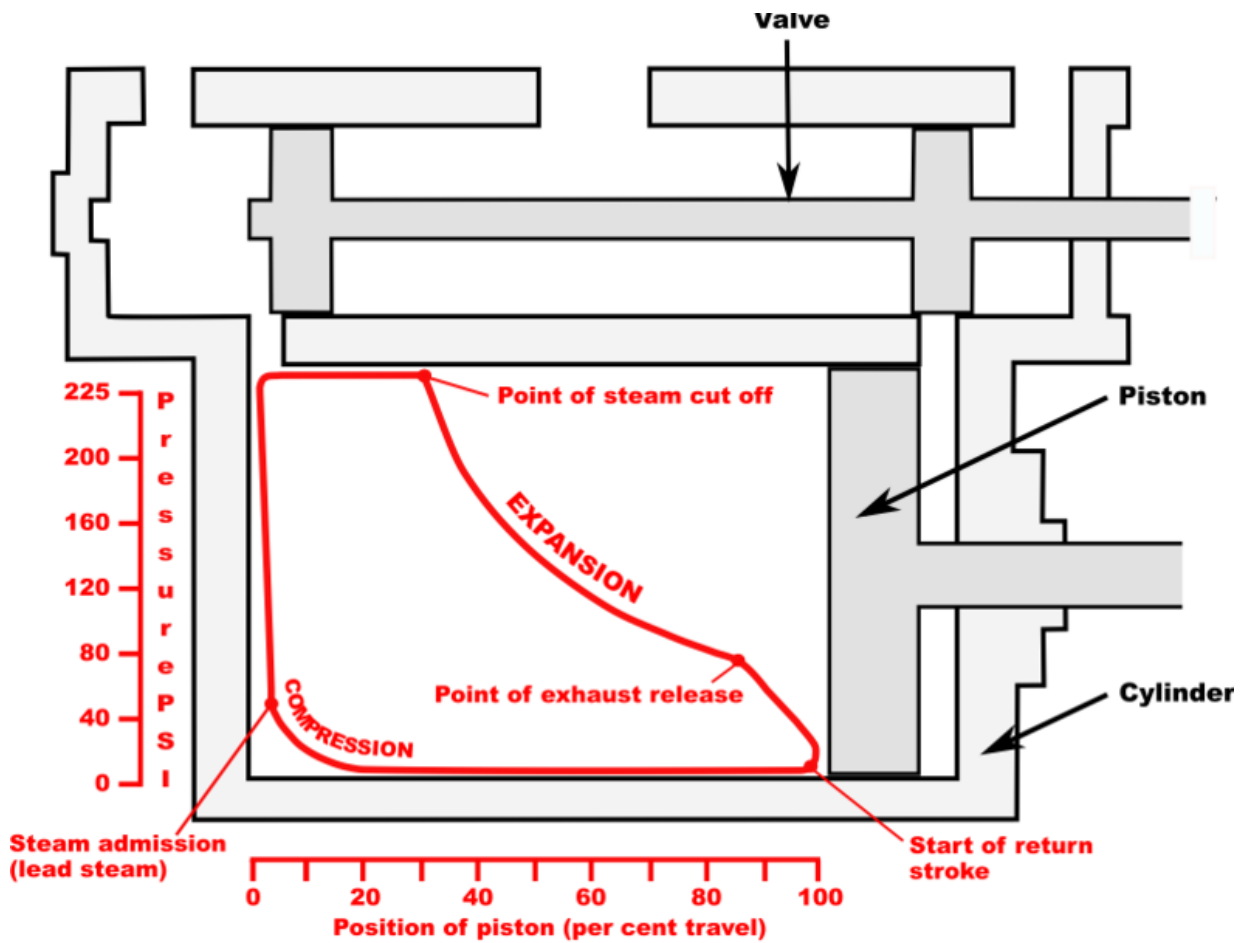


Image B)



Bon succès dans vos examens ! Bonnes vacances !