Al - Tusi

[...]

Chapitre

De la démonstration de ce qui est requis
selon une manière qui m'a paru <bonne>

Quant à la méthode qui m'est apparue après avoir lu ce qu'avaient dit ces <hommes> honorables, c'est la suivante <dans laquelle la théorie est exposée> en sept propositions[246]. Deux d'entre elles coïncident avec deux des propositions d'al-Ḫayyām : ce sont la deuxième et la quatrième de ces propositions, qui sont identiques à sa première et à sa quatrième proposition.

On <suppose> admis par celui qui examinera ces propositions le début du *Livre des Éléments* jusqu'à la proposition 28 du Livre I, à l'exception du postulat qui fait l'objet du doute.

Proposition 1

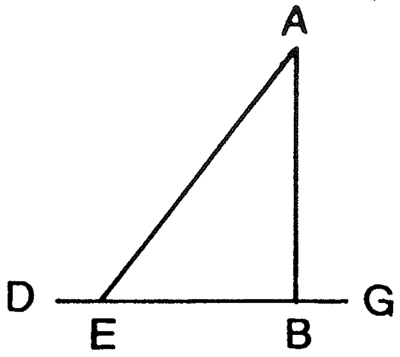
La plus courte des droites menées d'un point quelconque à une droite sur laquelle il ne se trouve pas et qui n'est pas limitée à ses extrémités — c'est ce qu'on appelle la distance du point à la droite — est la perpendiculaire abaissée de ce point à cette droite.

Soit, par exemple, la perpendiculaire AB abaissée du point A à la droite GD.

Je dis que c'est la droite la plus courte qu'on puisse mener de ce point à cette droite.

La preuve de cela :

245. Litt. : les paroles.
246. Litt. : où la méthode s'est ordonnée en sept propositions.



Menons de ce point à cette droite une droite AE. Le triangle ABE est alors formé, dont l'angle B est droit. L'angle E est alors plus petit qu'un angle droit, car la <somme> de deux angles quelconques d'un triangle est plus petite que deux droits, comme il a été démontré dans la proposition 17. Par suite, AB, qui est la corde du plus petit angle E est plus courte que AE, qui est la corde du plus grand angle B, ainsi que cela a été démontré dans la proposition 18.

Il en va de même de toute droite qu'on suppose menée du point A à la droite GD.

Par suite, <la droite> AB est la plus courte des droites menées du point A à la droite AG et c'est ce que l'on appelle la distance de ce point à cette droite, selon la terminologie adoptée par les gens de métier et selon ce qu'a déclaré l'auteur des *Éléments* au début du Livre III.

Et c'est ce que nous voulions montrer.

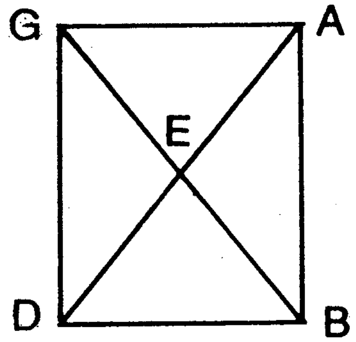
Proposition 2

Si on élève deux perpendiculaires à une ligne droite et qu'on joigne leurs extrémités par une autre droite, celle-ci formera avec elles deux angles égaux.

<Soient>, par exemple, les deux perpendiculaires égales AB et GD, élevées sur la droite BD et par les extrémités desquelles passe la droite AG, formant les angles BAG et DGA.

Je dis que ces deux angles sont égaux.

La preuve de cela :



Menons les droites AD et GB, qui se coupent au point E. Les deux côtés AB, BD du triangle ABD sont alors égaux aux deux côtés GD et DB du triangle GDB. Et les angles ABD et GDB sont égaux parce que ce sont deux angles droits. Les deux bases AD et GB sont donc égales ainsi que les angles BAD, DGB et ADB, GBD comme il a été démontré dans la proposition 4 <des *Éléments*>.

Par suite, les segments[247] BE et DE sont égaux ainsi qu'il a été démontré dans la proposition 6 <des *Éléments*>. Les <segments> AE et GE, <parties> restantes des <bases> égales AD et GB sont aussi égaux. Les angles EAG et EGA sont alors égaux ainsi qu'il a été

247. *sāq* : litt. : tige d'une plante, partie de la jambe comprise entre le genou et la cheville. Nous pensons qu'aṭ-Ṭūsī a sciemment utilisé ce mot ici pour bien indiquer qu'il s'agit d'une *partie* des droites AD et BG comme la phrase suivante l'indique clairement. C'est la raison pour laquelle nous ne pensons pas trahir sa pensée en traduisant par «segments» car c'est bien de cela qu'il s'agit ici.

démontré dans la proposition 5 des <*Éléments*>. Mais <nous avons montré> que les angles BAD et DGB étaient égaux. Tout l'angle BAG est donc égal à tout l'angle DGA.

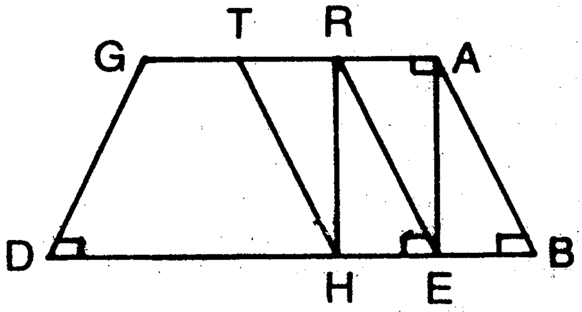
Et c'est ce que nous voulions montrer.

Et l'on voit, d'après la proposition 28 <des *Éléments*>, que ces deux perpendiculaires sont parallèles.

Proposition 3

Si l'on élève sur une ligne droite deux perpendiculaires égales et que par leurs extrémités passe une autre droite, celle-ci formera avec elles deux angles droits.

Soient, par exemple, les perpendiculaires égales AB, GD élevées sur la droite BD et soit AG la droite qui passe par leurs extrémités.



Je dis que les angles égaux BAG et DGA sont droits.

La preuve de cela :

En effet, s'ils ne sont pas droits, ils sont tous les deux obtus ou tous les deux aigus.

Supposons-les d'abord obtus.

Menons dans la première figure, du point A à la droite AG, la perpendiculaire AE, comme cela a été montré dans la proposition 11 <des *Éléments*>. Elle tombera nécessairement entre les droites AB et GD. L'angle AED, extérieur au triangle rectangle ABE, sera plus grand que l'angle droit intérieur <B>, ainsi qu'il a été montré dans la proposition 16 <des *Éléments*>. Il sera donc obtus lui aussi.

Menons ensuite du point E, la perpendiculaire ER à la droite BD; elle tombera entre les droites AE et GD. L'angle ERG, extérieur au triangle EAR, sera plus grand que l'angle droit intérieur A. Il sera donc obtus lui aussi.

Menons ensuite du point R la perpendiculaire RH à la droite AG de nouveau.

Menons, dans cet ordre, autant de perpendiculaires que nous voulons, car elles ne s'arrêtent pas à une limite.

Les perpendiculaires à la droite BD, issues des points situés sur la droite AG — ce sont les perpendiculaires AB, RE, TH — sont alors, successivement, de plus en plus longues, la plus courte d'entre elles étant la perpendiculaire AB, car elle sous-tend l'angle aigu AEB du triangle ABE. Elle est donc plus courte que AE, qui sous-tend l'angle droit ABE, ainsi que cela a été démontré dans la proposition 19 <des *Éléments*>. <Or>, AE, qui sous-tend l'angle aigu ARE dans le triangle AER est plus courte que RE, qui sous-tend l'angle droit EAR. Par suite, <la perpendiculaire> AB est plus courte que <la perpendiculaire> RE. On montre de même que RE est aussi plus courte que TH et TH <plus courte> que celle qui la suit, et ainsi de suite.

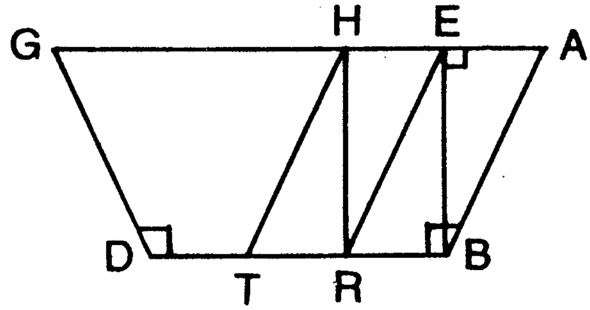
On voit par là que les perpendiculaires qui sont proches de AB sont plus courtes que celles qui en sont éloignées. Par suite, les distances des points de AG dont sont issues les perpendiculaires à la droite BD ont, dans l'ordre, des longueurs qui vont en croissant du côté de G.

<La droite> AG s'écarte donc de BD du côté de G et s'en rapproche du côté de A.

Mais l'angle DGA est obtus par hypothèse et égal à l'angle BAG en vertu de la proposition précédente. On peut donc montrer aussi, en procédant de cette manière[248], que la droite GA s'écarte de la droite DB du côté de A et qu'elle s'en rapproche du côté de G. Or c'était l'inverse. C'est là une contradiction.

Les angles BAG et DGA ne sont donc pas obtus.

Supposons-les à présents aigus.



Menons successivement les perpendiculaires de la manière que nous avons dite, ainsi qu'on le voit sur la deuxième figure, en commençant toutefois par la perpendiculaire abaissée de B sur AG, comme cela a été montré dans la proposition 12 <des *Éléments*>. Elle tombera entre les droites AB et GD si l'angle A est aigu et elle ne peut tomber à l'extérieur <de ces droites>, car alors un angle droit et un angle obtus seraient assemblés dans un triangle.

Nous procédons ensuite comme plus haut et nous montrons que la droite AG se rapproche de BD du côté de G et s'en écarte du côté de A.

Nous montrons ensuite, en reprenant le même procédé[249] à partir de G, que AG se rapproche de <BD> du côté où il s'en écartait et s'en écarte du côté où il s'en rapprochait. C'est une contradiction.

Les angles BAG et DGA ne sont donc ni obtus, ni aigus ; ils sont donc droits.

C'est ce que nous voulions montrer.

Proposition 4

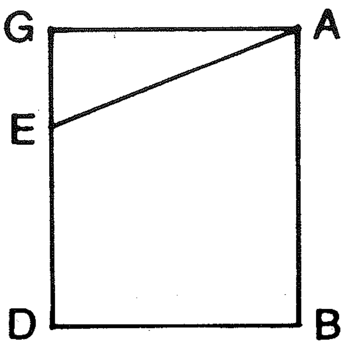
Les côtés opposés d'une surface quadrilatère rectangle sont égaux.

Soit, par exemple, la surface rectangle ABGD.

Je dis que les deux côtés AB, GD sont égaux. Il en est de même des deux côtés AG, BD.

248. *bi-hāḏa l-tadbīr* ; litt. : à l'aide de cet arrangement, cette construction. Mais il faudra commencer cette fois-ci à partir du sommet G, comme aṭ-Ṭūsī l'indiquera clairement dans la deuxième hypothèse, celle où les angles BAG et DGA sont aigus.

249. Litt. : le travail.



La preuve de cela :

Si AB n'est pas égal à GD, alors <supposons> que GD soit le plus long des deux.

Prenons sur DG <une droite> DE égale à[250] BA, comme il a été montré dans la proposition 3 <des *Éléments*> et menons AE.

La droite AE passe alors par les extrémités des deux perpendiculaires égales AB et ED, issues des extrémités de la droite BD. Les angles BAE et DEA sont donc droits. Mais l'angle BAG était droit. Les angles BAE et BAG, le plus grand et le plus petit, seraient alors égaux. C'est une contradiction.

De même, l'angle AED, extérieur au triangle AEG et l'angle AGE, qui lui est intérieur, seraient égaux. Cela est également une contradiction comme il a été montré dans la proposition 16 <des *Éléments*>.

Le côté AB est donc égal au côté GD.

On montre de même que le côté AG est égal au côté BD.

Et c'est ce que nous voulions montrer.

Proposition 5

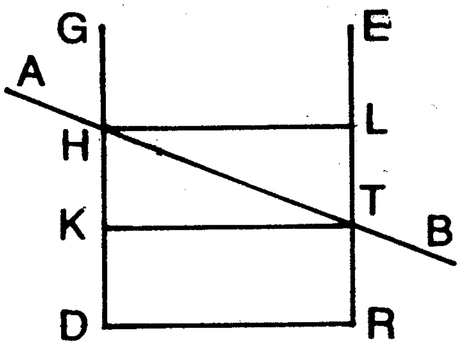
Si une droite coupe, d'une manière quelconque, deux perpendiculaires élevées sur une droite, elle rend égaux les angles alternes, l'angle externe devient égal à l'angle interne qui lui est opposé[251] et les deux angles internes situés du même côté deviennent égaux à deux droits.

Soit, par exemple, la droite AB qui coupe, d'une manière quelconque, les perpendiculaires GD et ER, élevées sur DR, en deux points H et T.

Je dis que les angles alternes DHT et ETH sont égaux. Il en est de même des angles AHG et ATE, l'externe et l'interne[252].

Et <je dis> que les angles GHT et ETH, qui sont du côté de G, E, sont égaux à deux angles droits.

La preuve de cela :



Si la droite TR est égale à la droite HD, tous les angles situés autour des points H et T sont droits; les angles indiqués <dans l'énoncé> sont alors égaux et la conclusion est vérifiée.

Et si elle ne lui est pas égale, supposons que HD soit la plus grande des deux et prenons sur <cette droite> une <droite> DK égale à TR, comme il a été montré dans la proposition 3 <des *Éléments*>. Joignons K, T. Les angles DKT et RTK

250. Litt. : autant que la grandeur de ...
251. Voir note 21.
252. Dans le texte : l'interne et l'externe.

sont droits comme on l'a montré dans la troisième de ces propositions. Prenons sur ET une <droite> TL égale à HK et joignons H, L. Les angles KHL et TLH sont également droits et les deux côtés HK et KT, qui entourent l'angle droit HKT, sont égaux aux côtés TL et LH, qui entourent l'angle droit TLH.

Les angles KHT et HTL sont égaux, ainsi qu'on l'a montré dans la proposition 4 et ce sont les <angles> alternes.

De même, l'angle AHG est égal à l'angle KHT, je veux dire son opposé, comme il a été démontré dans la proposition 15 <des *Éléments*> et l'angle KHT est égal à l'angle ATE.

L'angle AHG est donc égal à l'angle ATE, et ce sont les <angles> interne et externe.

De même, les deux angles AHG, GHT, pris ensemble[253], sont égaux à deux angles droits en vertu de la proposition 13 <des *Éléments*>. <Or>, l'angle AHG est égal à l'angle ATE.

Par suite, les deux angles internes GHT et ATE, qui sont d'un même côté <de la droite AB>, sont, pris ensemble, égaux à deux droits.

Et c'est ce que nous voulions montrer.

On voit ainsi que toute droite qui coupe ces deux perpendiculaires en étant perpendiculaire à une d'elles est également perpendiculaire à l'autre.

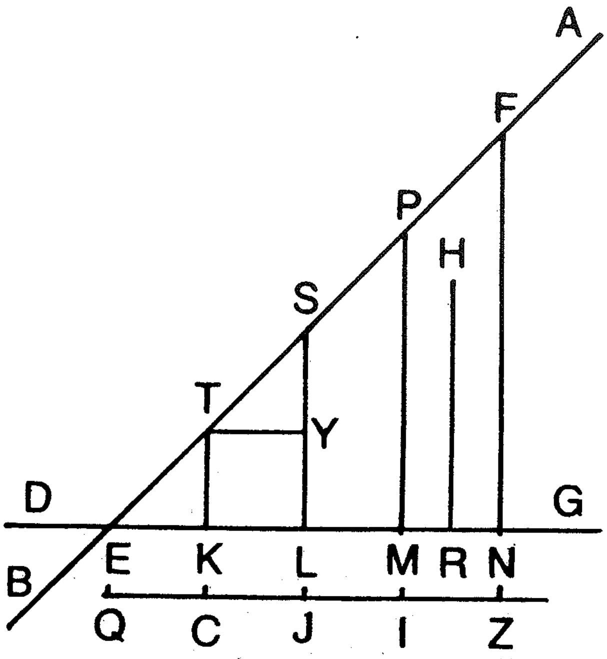
Proposition 6

Si deux lignes droites non limitées à leurs extrémités se coupent selon des angles non droits et si on élève une perpendiculaire sur l'une d'elles, alors cette perpendiculaire, si on la prolonge, coupera l'autre droite sur l'un de ses côtés, <à savoir> du côté de l'angle aigu compris entre cette perpendiculaire et la droite coupée par cette perpendiculaire.

Soit, par exemple, les droites AB et GD qui se coupent au point E <selon> des angles non droits. Et <soit> HR la perpendiculaire élevée sur la droite GD.

Je dis que si je prolonge <cette perpendiculaire>, elle coupera la droite AB sur l'un de ses côtés.

253. Au sens de : la somme *(maǧmūʿ)* des deux angles.



La preuve de cela :

Supposons que des deux angles inégaux AEG et GEB, qui, pris ensemble, sont égaux à deux angles droits en vertu de la proposition 13 <des *Éléments*>, l'angle AEG soit <l'angle> aigu.

Soit T un point quelconque sur la droite AE. Abaissons la perpendiculaire TK sur la droite GD comme cela a été montré dans la proposition 12 <des *Éléments*>.

Le point K se trouvera nécessairement soit entre E et R, soit sur le point R, soit au-delà de ce point du côté de G.

Si le point K se trouve entre E et R, donnons-nous[254] une droite égale à EK et soit QC cette droite. Prolongeons-la du côté de C. Prenons successivement sur cette droite des <droites> égales à QC, comme il a été montré dans la proposition 3 <des *Éléments*>, jusqu'à ce que l'ensemble des multiples de la droite QC dépasse la droite ER et soit QZ <la droite obtenue>.

Supposons que ces multiples soient les parties QC, CJ, JI, IZ, chacune d'elles étant égale à la droite EK.

Prenons ensuite sur AE des droites successives égales à la droite TE[255], en nombre égal au nombre de ces parties; ce sont : ET, TS, SP, PF. Abaissons ensuite des points S, P, F les perpendiculaires SL, PM, FN à GD, comme il a été montré dans la proposition 12 <des *Éléments*>.

Abaissons du point T la perpendiculaire TY sur la droite SL. Dans les triangles ETK, TYS, les angles ETK, ESY, l'interne et l'externe, sont égaux en vertu de la proposition précédente, les deux perpendiculaires TK, SL élevées sur la droite LK, étant coupées par SE. <De plus>, les angles EKT, TYS sont droits et les côtés ET et TS sont égaux comme il a été montré dans la proposition 26 <des *Éléments*> et le côté YT est égal au côté EK.

Mais le quadrilatère YTLK est rectangle car les angles L, K, Y sont droits par hypothèse et l'angle T est également droit comme il a été montré dans la proposition précédente. Les côtés opposés YT, LK sont donc égaux comme il a été montré dans la quatrième de ces propositions.

Les droites EK, KL sont donc égales.

On montre de même que les droites LM, MN sont égales elles aussi et que toutes les droites EK, KL, LM, MN sont égales. Par suite, toutes ces droites — je veux dire la droite EN — sont égales à toutes les parties QC, CJ, JI, IZ — je veux dire la droite QZ — car leur nombre est égal au nombre de ces parties et chacune d'elles est égale à la droite EK.

254. Litt. : supposons.
255. Litt. : autant que la quantité de TE.

Mais la droite QZ est plus longue que la droite ER ; donc <la droite> EN est également plus longue que ER. Le point N se trouve donc nécessairement à l'extérieur de <l'intervalle compris> entre E et R, du côté de G, et la perpendiculaire HR se trouve donc à l'intérieur du triangle FNE.

Donc, si nous prolongeons la perpendiculaire RH, qui est parallèle à la perpendiculaire FN, jusqu'à ce qu'elle sorte du triangle FNE, elle coupera nécessairement le côté AB.

Mais si le point K coïncide avec le point R et que les deux perpendiculaires <TK et HR> coïncident, ou <si le point K> se trouve en dehors de <l'intervalle> compris entre E et R, du côté de G, et que la perpendiculaire HR soit à l'intérieur du triangle TKE, alors la conclusion est plus évidente.

C'est ce que nous voulions montrer.

On voit ainsi que la rencontre <de la perpendiculaire et de l'oblique> a lieu du côté de l'angle aigu — je veux dire l'angle AER.

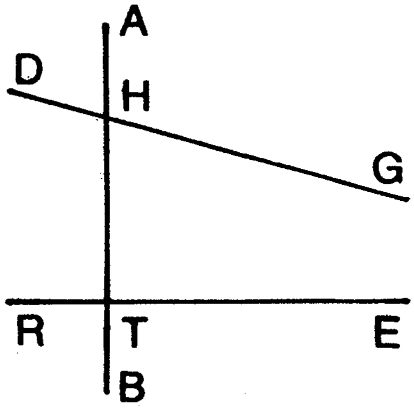
Quant à la proposition utilisée dans ce théorème et selon laquelle il est possible de trouver des multiples de la plus courte de deux droites limitées à leurs deux extrémités et <tels> qu'ils dépassent la plus longue, c'est celle dont nous avons traité et dont nous avons dit qu'elle était évidente par elle-même. L'auteur des *Éléments* l'a utilisée dans la première proposition du Livre X, d'une manière telle qu'elle puisse s'appliquer à toutes les espèces de grandeurs, sans en faire l'objet d'un postulat en <aucun> endroit de son ouvrage.

Proposition 7
comportant la démonstration du postulat

Si une ligne droite coupe deux lignes droites en rendant les deux angles intérieurs situés d'un même côté plus petits que deux droits, alors les deux droites, lorsqu'on les prolonge de ce côté, se rencontrent.

Soit, par exemple, la droite AB qui coupe les deux droites GD et ER, formant <avec celles-ci> les angles GHT et ETH, qui sont plus petits que deux droits.

Je dis que si on prolonge les droites GD et ER du côté de G, E, elles se rencontreront.

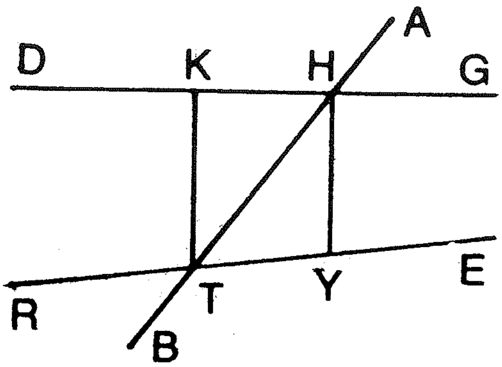


La preuve de cela :

Si l'un des deux angles GHT, ETH est droit, l'autre est nécessairement aigu et dans ce cas, l'une des deux droites, GD, ER, coupera la droite AB selon des angles non droits et l'autre lui sera perpendiculaire.

Si donc on les prolonge elles se rencontreront du côté de l'angle aigu, ainsi que nous l'avons montré dans la proposition précédente.

Et si l'un des deux angles, GHT par exemple, est obtus, menons du point H la perpendiculaire HY à la droite GD, comme il a été montré dans la proposition 11 <des *Éléments*> et du point T la perpendiculaire TK, également à GD, comme il a été montré dans la proposition 12 <des *Éléments*>.



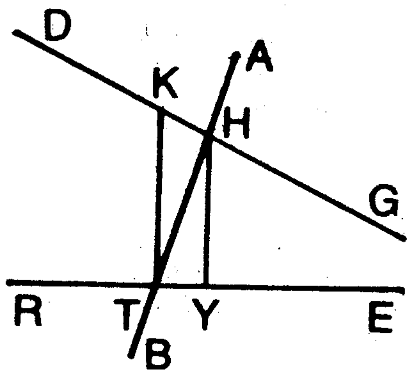
Nous disons ensuite que puisque les angles GHT et ETH, pris ensemble, sont plus petits que deux droits, et que l'angle GHY est droit, la somme des angles YHT et HTY est plus petite qu'un droit. Mais les angles alternes YHT et HTK formés par la rencontre de la droite AT avec les perpendiculaires YH et TK sont égaux, ainsi qu'il a été montré dans la cinquième de ces propositions.

Par suite, tout l'angle KTY est plus petit qu'un droit; il est donc aigu.

Les droites KT et ET se rencontrent donc selon des angles qui ne sont pas droits et la droite GK est perpendiculaire à l'une d'elles, je veux dire à KT.

Par suite, les droites GK et ET se rencontreront si on les prolonge du côté de G, E, ainsi qu'il a été montré dans la proposition précédente.

Et si l'un des deux angles GHT, ETH n'est ni droit ni obtus, mais que chacun des deux est aigu, nous menons du point T la perpendiculaire TK à la droite ER, comme il a été montré dans la proposition 11 <des *Éléments*>, et du point H la perpendiculaire HY à ER également, comme il a été montré dans la proposition 12 <des *Éléments*>.



L'angle ETK est alors droit et les angles alternes KTH, THY, formés par la rencontre de AB avec les perpendiculaires HY, KT, sont égaux ainsi qu'il a été montré dans la cinquième de ces propositions. Si donc nous soustrayons les angles ETH, THY, qui, pris ensemble, sont égaux à un droit, des angles ETH, GHT, qui, pris ensemble, sont, par hypothèse, plus petits que deux droits, il reste l'angle YHG, qui sera alors plus petit qu'un droit; il est donc aigu.

Les droites YH et GH se coupent donc selon des angles non droits et EY est perpendiculaire à l'une d'elles, je veux dire à HY.

GD et ER se rencontreront donc si on les prolonge du côté de G, E, ainsi qu'il a été montré dans la proposition précédente[256].

C'est ce que nous voulions montrer.

[...]

256. Dans la *Rédaction des* Éléments de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī (Ms. Munich, Fonds arabe, n° 288), l'auteur donne une seconde démonstration de ce troisième cas, celui où les deux angles intérieurs sont plus petits que deux droits.

Sa démonstration consiste à mener du point H la perpendiculaire HM à AB. L'angle HTE étant aigu, la perpendiculaire HM coupe la droite RE, du côté de G, E, en vertu de la proposition 6. La droite GD, qui coupe la droite AB selon un angle plus petit qu'un droit — l'angle BHG — coupera donc nécessairement la droite RE.