Beltrami

ESSAI D'INTERPRÉTATION

DE

LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE,

PAR M. E. BELTRAMI,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE BOLOGNE.

Traduit de l'italien par M. J. HOÜEL.

Extrait du *Giornale di Matematiche*, t. VI, 1868.

Dans ces derniers temps, le public mathématicien a commencé à s'occuper de nouvelles idées, qui semblent destinées à modifier profondément les notions que l'on s'est formées jusqu'à présent sur l'origine des vérités géométriques.

Ces idées ne sont pas de date récente. L'illustre Gauss les avait adoptées dès ses premiers pas dans la carrière scientifique, et bien qu'aucun de ses écrits n'en contienne l'exposition développée, ses lettres nous montrent à quel point il s'y était attaché, et nous témoignent de sa pleine adhésion à la doctrine de Lobatchefsky.

Nous avons cherché à nous rendre compte à nous-même des résultats auxquels conduit cette nouvelle doctrine; et, suivant un procédé qui nous semble tout à fait conforme aux bonnes traditions de l'investigation scientifique, nous avons essayé de lui trouver une base réelle.

[...]

I.

Le critérium fondamental des démonstrations de la Géométrie élémentaire consiste dans la *superposition des figures égales*.

Ce critérium n'est pas seulement applicable au plan, mais aussi à toutes les surfaces sur lesquelles il peut exister des figures égales dans différentes positions, c'est-à-dire à toutes les surfaces dont une portion quelconque peut être appliquée exactement, par simple flexion, sur une autre portion quelconque de la surface elle-même. On voit, en effet, que la rigidité des surfaces sur lesquelles les figures sont tracées, n'est pas une condition essentielle de l'application de ce critérium; par exemple, l'exactitude des démonstrations de la Géométrie plane euclidienne ne serait en rien altérée, si l'on venait à concevoir les figures comme tracées sur la surface d'un cylindre ou d'un cône, au lieu de l'être sur un plan.

Les surfaces pour lesquelles se vérifie sans restriction la propriété dont il s'agit, sont, en vertu d'un théorème célèbre de Gauss, toutes celles qui ont en chacun de leurs points le produit de leurs deux rayons de courbure principaux constant, ou, en d'autres termes, toutes celles dont la mesure de courbure est constante. Les autres surfaces n'admettent pas sans restriction l'application du principe de superposition pour la comparaison des figures qui y sont tracées, et, par suite, ces figures ne peuvent avoir une structure entièrement indépendante de leur position.

L'élément le plus essentiel des figures et des constructions de la Géométrie est la ligne droite. Le caractère spécifique de cette ligne est d'être complétement déterminée par deux de ses points seulement, en sorte que deux droites ne peuvent passer par deux points donnés de l'espace sans coïncider dans toute leur étendue. Cependant, dans la Géométrie plane, ce caractère n'est pas employé dans toute son extension, puisque, en regardant les choses de près, on voit que la droite n'est introduite dans les considérations de la Planimétrie qu'en vertu du *postulat* suivant : « En faisant coïncider deux plans, sur chacun desquels existe une droite, il suffit que les deux droites se superposent en deux points pour qu'elles se confondent dans toute leur étendue. »

Or ce caractère, ainsi limité, n'est pas particulier aux lignes droites par rapport au plan ; il subsiste encore (en général) pour les lignes géodésiques d'une surface de courbure constante, par rapport à ces surfaces. Une ligne géodésique a déjà sur une surface quelconque la propriété d'être (généralement parlant) déterminée sans ambiguïté par deux de ses points. Mais pour les surfaces de courbure constante, et pour elles seules, subsiste intégralement la propriété analogue à celle de la droite dans le plan, c'est-à-dire que : « Si l'on a deux surfaces dont la courbure soit constante en chaque point, et égale pour les deux surfaces, et si sur chacune d'elles existe une ligne géodésique, en faisant coïncider les deux surfaces de manière que les lignes géodésiques aient deux points communs, ces lignes coïncideront (généralement) dans toute leur étendue. »

Il s'ensuit de là que, sauf les cas dans lesquels cette propriété est sujette à des exceptions, les théorèmes que la Planimétrie démontre, au moyen du principe de superposition et du postulat de la droite, pour les figures formées sur le plan, subsistent également pour les figures formées d'une manière analogue sur une surface de courbure constante par des lignes géodésiques.

C'est sur cela que sont fondées les analogies multiples de la Géométrie de la sphère avec celle du plan, les droites de celui-ci correspondant aux lignes géodésiques, c'est-à-dire aux grands cercles de celle-là, et ces analogies ont été depuis longtemps déjà remarquées par les géomètres. Si d'autres analogies, d'espèce différente, mais de même origine, n'ont pas été pareillement remarquées tout d'abord, il faut l'attribuer à ce que la notion de surfaces flexibles et applicables les unes sur les autres n'est devenue familière que dans ces derniers temps.

Nous avons fait allusion à des exceptions qui peuvent détruire ou restreindre l'analogie en question. Ces exceptions existent réellement. Sur la surface sphérique, par exemple, deux points cessent de déterminer un grand cercle sans ambiguïté, quand ils sont diamétralement opposés. C'est pour cette raison que certains théorèmes de la Planimétrie n'ont pas leurs analogues sur la sphère, comme, par exemple, le suivant : « Deux droites perpendiculaires à une troisième ne peuvent se rencontrer. »

Ces réflexions ont été le point de départ de nos recherches actuelles.

[...]

[...]

On peut donc formuler les règles suivantes :

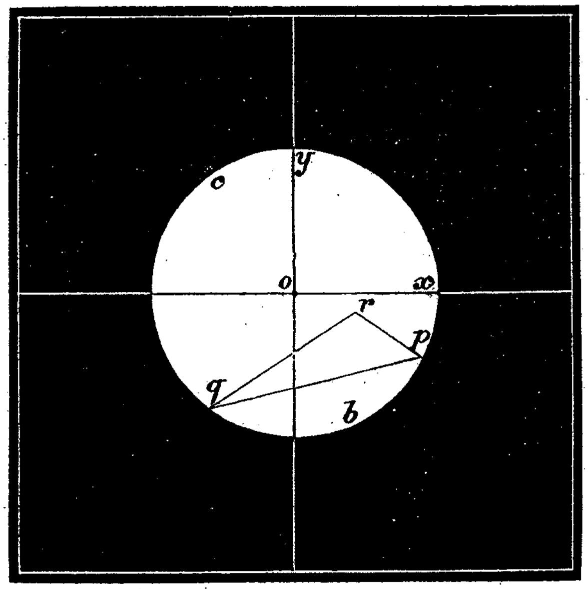
I. A deux cordes distinctes qui se coupent à l'intérieur du cercle-limite correspondent deux lignes géodésiques qui se coupent en un point à une distance finie, sous un angle différent de 0 et de 180 degrés.

II. A deux cordes distinctes qui se coupent sur la circonférence du cercle-limite correspondent deux lignes géodésiques qui concourent vers un même point à une distance infinie, et qui font en ce point un angle nul.

III. Enfin, à deux cordes distinctes qui se coupent hors du cercle-limite, ou qui sont parallèles, correspondent deux lignes géodésiques qui n'ont aucun point commun dans toute l'étendue (réelle) de la surface.

Soient maintenant pq (*fig.* 1) une corde quelconque du cercle-limite,

Fig. 1.



r un point de l'intérieur du cercle, non situé sur la corde. A cette corde correspond sur la surface une ligne géodésique $p'q'$, dirigée vers les points à l'infini p', q' (correspondants à p, q); au point r correspond un point r', situé à une distance finie et hors de la ligne géodésique $p'q'$. De ce point on peut tirer une infinité de lignes géodésiques, dont les unes rencontrent la ligne géodésique $p'q'$, et les autres ne la rencontrent pas. Les premières sont représentées par les droites qui vont du point r aux divers points de l'arc pbq ($<$ 180 degrés); les autres sont représentées par les droites qui vont du même point aux divers points de l'arc pcq ($>$ 180 degrés). Deux lignes géodésiques particulières forment le passage de l'une des catégories à l'autre : ce sont

celles qui sont représentées par les droites *rp*, *rq*, c'est-à-dire les deux lignes géodésiques qui partent de *r'* et rencontrent *p'q'* à l'infini, l'une d'un côté, l'autre de l'autre côté. Comme les angles rectilignes *rpq*, *rqp* ont leurs sommets sur la circonférence du cercle-limite, il s'ensuit de là (II) que les angles géodésiques correspondants *r'p'q'*, *r'q'p'* sont nuls, bien que les premiers soient finis. Au contraire, *r* étant intérieur au cercle en question, et situé hors de la corde *pq*, l'angle *prq* est différent de 0 et de 180 degrés, et par suite (I) les lignes géodésiques correspondantes *r'p'*, *r'q'* forment en *r'* un angle qui diffère aussi de 0 et de 180 degrés. Donc si les lignes géodésiques *r'p'*, *r'q'* sont dites *parallèles* à *p'q'*, à cause qu'elles marquent le passage de la catégorie de celles qui rencontrent *p'q'* à la catégorie de celles qui ne la rencontrent pas, on peut énoncer le résultat en disant que : « Par un point (réel) quel-
» conque de la surface, on peut toujours mener *deux* lignes géodési-
» ques (réelles), parallèles à une même ligne géodésique (réelle) qui
» ne passe pas par ce point, et ces deux lignes géodésiques font entre
» elles un angle qui diffère à la fois de 0 et de 180 degrés. »

Ce résultat s'accorde, sauf la différence des termes employés, avec ce qui forme la base de la géométrie non euclidienne.

[...]