BOLZANO : le rejet des fabrications d'évidences

Dans la théorie des équations, il y a deux théorèmes dont on pouvait dire récemment encore que la démonstration entièrement correcte est inconnue. L'un est le suivant : il faut qu'il y ait toujours, entre deux valeurs quelconques de la grandeur inconnue qui donnent deux résultats de signes opposés, au moins une racine réelle de l'équation. Voici l'autre : toute fonction algébrique rationnelle entière d'une grandeur variable peut être décomposée en facteurs réels du premier ou du second degré.

■ Bolzano indique plusieurs auteurs, dont Gauss, pour le second théorème (le théorème fondamental de l'algèbre), mais il récuse les différentes démonstrations du premier théorème. On notera la place attribuée à la géométrie. □

Lorsqu'on examine de plus près leurs méthodes de démonstration, il apparaît très vite qu'aucune ne peut être considérée comme suffisante.

I) Dans la méthode de démonstration la plus courante, on s'appuie sur une vérité empruntée à la géométrie : à savoir que toute ligne continue à courbure simple dont les ordonnées sont d'abord positives, puis négatives (ou inversement), doit nécessairement couper quelque part l'axe des abscisses en un point situé entre ces ordonnées. Il n'y a absolument rien à objecter ni contre la justesse ni contre l'évidence de ce théorème géométrique. Mais il est tout aussi manifeste qu'il y a là une faute intolérable contre la bonne méthode qui consiste à vouloir déduire les vérités des mathématiques pures (ou générales) (c'est-à-dire de l'arithmétique, de l'algèbre ou de l'analyse) des considérations qui appartiennent à une partie appliquée (ou spéciale) seule, à savoir à la géométrie.

Si l'on insiste pour être conséquent ailleurs, ne doit-on pas s'efforcer de l'être ici aussi ? En effet, dans la science, les démonstrations ne doivent nullement être de simples procédés de «fabrication d'évidences», mais doivent être bien plutôt des fondements ; il faut exposer le fondement objectif que possède la vérité à démontrer : celui qui se rend compte de lui-même de cela saura qu'une démonstration véritablement scientifique, c'est-à-dire le fondement objectif d'une vérité valable pour toutes les grandeurs, qu'elles soient ou non dans l'espace, ne peut pas se trouver dans une vérité valable seulement pour les grandeurs qui appartiennent à l'espace. Conformément à cette opinion, une telle démonstration géométrique est un vrai cercle vicieux dans la plupart des cas et en particulier dans le cas présent, comme on comprend facilement.

II) Il faut rejeter de même la démonstration que certains ont établie à partir du concept de continuité d'une fonction en y faisant intervenir les concepts du temps et du mouvement. «Si deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$, disent-ils, varient suivant la loi de continuité, et si pour $x=\alpha$, $f(\alpha)<\varphi(\alpha)$, mais pour $x=\beta$, $f(\beta)>\varphi(\beta)$; alors il doit y avoir une valeur intermédiaire u entre α et β pour laquelle $f(u)=\varphi(u)$. Car si on imagine que la grandeur variable x dans ces deux fonctions prend successivement toutes les valeurs intermédiaires entre α et β et prend au même instant toujours la même valeur à gauche et à droite: alors au début de cette variation continue de la valeur de x, on a $f(x)<\varphi(x)$ et à la fin $f(x)>\varphi(x)$. Mais comme les deux fonctions doivent d'abord, grâce à leur continuité, parcourir toutes les valeurs intermédiaires avant de pouvoir atteindre une valeur supérieure x, de même, il faut qu'il y ait un certain instant intermédiaire pour lequel les deux valeurs sont égales.» On rend sensible ceci encore par l'exemple du mouvement de deux corps dont l'un était au début derrière l'autre, l'a devancé à la fin, et doit donc nécessairement avoir une fois passé à côté de lui.

Les concepts de temps et de mouvement (et celui-ci encore plus) sont tout aussi étrangers aux mathématiques générales que le concept d'espace, cela ne peut être mis en doute par personne. Toutefois, nous n'aurions rien à objecter si ces deux concepts n'y étaient introduits qu'en tant qu'éclaircissement. Car nous ne sommes en aucune façon partisan d'un purisme tel qu'il exige, pour maintenir la science pure de tout élément étranger, de refuser dans l'exposé de la science toute expression empruntée à un domaine étranger, ne serait-ce qu'avec une signification figurée et dans l'intention de désigner ainsi une chose d'une façon plus brève et plus claire que ce n'est possible par une description conçue uniquement dans des termes particuliers, ne serait-ce même que pour éviter la cacophonie de la répétition continuelle des mêmes mots ou pour rappeler un exemple qui peut servir à confirmer la thèse simplement par un nom donné à la chose. Comme on peut le voir en même temps, nous sommes loin de tenir les exemples et les applications pour des choses qui nuiraient à la perfection d'un exposé scientifique. Nous n'exigeons fermement que ceci : on ne proposera jamais des exemples en place des démonstrations, on ne fondera jamais l'essentiel de la déduction sur des expressions du langage employées improprement et sur les représentations secondaires qu'elles portent avec elles ; la déduction ne serait pas valable dès qu'on change l'expression.

Démonstration purement analytique du théorème : entre deux valeurs quelconques qui donnent deux résultats de signes opposés se trouve au moins une racine réelle de l'équation. 1817.