[LIVRE] PREMIER. // p. 169 //

J'ai trouvé une autre sorte de *R.c.* liées , très différente des autres, qui apparaît au Chapitre du Cube égal à des [Q]uantités [inconnues] et à un nombre quand le cube du tiers [du nombre] des quantités [inconnues] est plus grand que le carré de la moitié du nombre comme cela sera démontré dans ce Chapitre ; laquelle sorte de R.q. a dans son Algorithme des opérations différentes des autres et a un nom différent ; parce que, lorsque le cube du tiers [du nombre] des quantités est plus grand que le carré de la moitié du nombre, [la racine carrée de] leur différence ne peut être appelée ni plus ni moins, c'est pourquoi je l'appellerai plus de moins quand il faudra l'ajouter, et quand il faudra le soustraire je l'appellerai moins de moins , et cette opération est, absolument nécessaire, plus encore que l'autre racine R.c. L. , pour la réponse aux Chapitres des puissances de puissances , accompagnées de [C]ubes, ou de [Q]uantités, ou de tous les deux ensemble, pour lesquelles les cas d'égalisation où apparaît cette sorte de R. sont beaucoup plus nombreux que ceux où apparaît l'autre ; ce qui paraîtra à beaucoup plutôt sophistique que réel, et telle est l'opinion que moi aussi j'ai maintenu, jusqu'à ce que j'en ai trouvé la démonstration par les lignes (comme cela sera démontré par des surfaces planes dans le dit Chapitre) et d'abord je traiterai de la Multiplication, en proposant la règle du plus et du moins.

Plus par plus de moins, [cela] fait plus de moins.
Moins par plus de moins, [cela] fait moins de moins.
Plus par moins de moins, [cela] fait moins de moins.
Moins par moins de moins, [cela] fait plus de moins.
Plus de moins par plus de moins, [cela] fait moins.
Plus de moins par moins de moins, [cela] fait plus.
Moins de moins par plus de moins, [cela] fait plus.
Moins de moins par moins de moins, [cela] fait moins.

[...]

// p. 290 //

## LIVRE [SECOND.]

### *Chapitre du Cube égal à des Quantités et un nombre.*

Voulant égaler le Cube à des Quantités et un nombre, on prend le tiers [du nombre] des Quantités et on l'élève au cube, et l'on retranche le produit [de ce calcul] du carré de la moitié du nombre ; et de ce qui reste, si on en prend la racine carrée, [et qu'on l'ajoute et qu'on la retranche de la moitié du nombre][67], et si, de cette somme et de cette différence, on prend la racine cubique de chacune, alors ces deux racines [cubiques] ajoutées ensemble forment la valeur de la Quantité (comme l'on verra dans les exemples décrits ci-dessous).

Soit égalé $1\overset{3}{\smile}$ à $6\overset{1}{\smile}$ p. 40. On prend le tiers des Quantités, ce qui est 2, on l'élève au cube, ce qui fait 8, et on enlève le résultat du carré {❷}[68] de la moitié du nombre, qui vaut 400 : il reste 392, et l'on prend de ce reste la racine carrée, qui est R.q. 392 ; on l'ajoute à la moitié // p. 291 // du nombre, ce qui fera 20 p. R.q. 392 ; la R.c. de ce binôme, jointe à la R.c. de son résidu, *i. e.* à R.c. ⌊ 20 m. R.q. 392 ⌋, ces racines cubiques sont l'une 2 p. R.q. 2 et l'autre 2 m. R.q. 2, qui, ajoutées ensemble font 4, et la Quantité vaut 4 ; cette résolution provient de la démonstration, qui suit et dont est issue la demande inscrite ci dessous.

[Traduction symbolique, insérée dans le texte original au lieu marqué {❷} :]

$$
\begin{array}{llll}
1.\overset{3}{\smile} & \text{égal à} & 6.\overset{1}{\smile}\ \text{p.} & 40. \\
\hline
 & & 2. & 20. \\
 & & 2. & 20. \\
\hline
 & & 4. & 400. \\
 & & 2. & 8. \\
\hline
 & & 8. & 392.
\end{array}
$$

R.q. 392.

20. p. R.q. 392. 20. m. R.q. 392.

R.c. ⌊ 20. p. R.q. 392. ⌋ p. R.c. ⌊ 20. m. R.q. 392. ⌋

Racines. 2. p. R.q. 2. 2. m. R.q. 2, qui

sommées ensemble font 4, qui est la valeur de la Quantité.

[67] Le texte donne : "al quale si aggionge, e cava il mezzo del numero", qu'il faut entendre plutôt : "il quale si aggionge, e cava del mezzo del numero".

[68] La démarche, rédigée sous une forme symbolique, est insérée dans le texte original en ce lieu marqué {❷}. Elle figure ici à la suite du paragraphe.

[...]

On peut encore, dans la résolution de ce Chapitre, procéder en cette manière. Soit égalé 1 $\overset{3}{\smile}$ à 15 $\overset{1}{\smile}$ p. 4 ; on prend le tiers [du nombre] des Quantités, qui est [égal à] 5 ; on l'élève au cube, ce qui fait 125 ; on ôte cela du carré de la moitié du nombre, qui est 4, et il reste m. 121 (en ce cas on parlera de "plus de moins") ; quand on prendra la R.q. de ce [nombre], cela donnera p. de m. 11, qui, jointe à la moitié du nombre, fait 2 p. de m. 11 ; une fois prise la racine cubique de cela et jointe à son résidu, on obtient 2 p. de m. 1 et 2 m. de m. 1, qui, jointes ensemble font 4, et 4 est la valeur de la Quantité. Et bien qu'à beaucoup cela paraîtra comme chose extravagante, et que cette opinion me soit aussi apparue, il y a déjà un certain temps, comme étant plutôt sophistique que véridique , il advint // p. 294 // {❹} néanmoins qu'à tant chercher, j'en ai trouvé la démonstration, laquelle sera relatée ci dessous ; ce que l'on peut encore montrer par les lignes, et qui peut servir dans les opérations sans aucune difficulté ; et en de nombreuses occasions, l'on trouve la valeur de la Quantité en nombres (comme on l'a trouvée dans cet exemple). Donc lecteur, à cela applique bien ton esprit ; même lorsqu'il se trouvera abusé.

[Traduction symbolique, insérée dans le texte original au lieu marqué {❹} :]

$\overset{\overset{3}{\smile}}{1}$. Égal à $\overset{\overset{1}{\smile}}{15}$. p. 4.

| | | |
|---|---|---|
| 5. | | 2. |
| 5. | | 2. |
| 25. | | 4. |
| 5. | | 125. |
| 125. | R.q. p. de m. 121. | |

Somme 2 p. R.q. p. de m. 121. Reste 2 m. R.q. p. de m. 121.

R.c. ⌊ 2. p. de m. 11. ⌋ R.c. ⌊ 2. m. de m. 11. [⌋]

Racine c. : 2. p. de m. 1. 2. m. de m. 1.

Additionnés, ils font 4. qui est la valeur de la Quantité.

[. . .]

*Démonstration de ce dont est extraite la règle de résolution [de l'équation] du Cube égal à des Quantités et un nombre.*

Soit le cube *abce*, égal au parallélépipède ACDE, lequel soit [égal à] 6 Quantités (et le côté AC soit égal au côté *ab* du cube, à savoir : l'un et l'autre soient [égaux à] 1 $\overset{1}{\smile}$), et [au][77] corps H, lequel soit 20 ; que l'on imagine une coupe par une surface parallèle [à une face] dans le cube *abce*, soit *fil*, et cela fait, l'on fait une autre coupe, *hpr*, en faisant [la ligne] *hc* égale à [la ligne] [*af*][78], et ensuite, l'on fait une autre coupe *mof*, en faisant [la ligne] *cm* égale à [la ligne] *ch*, et que toutes ces coupes fassent des angles droites avec les surfaces [du cube] ; et cela fait, on aura partagé le Cube *abce* en huit morceaux, parmi lesquels deux seront des cubes, à savoir *him* et *sq*[79], et les autres seront 6, qui, agencés ensemble, feront le parallélépipède LPR ; et parce que la démonstration est claire par elle-même, je ne m'efforcerai pas de faire connaître comment ils sont agencés ensemble ; [sauf à dire que] le côté IR est égal au côté *ab*, [la ligne] IN est égale à la [ligne] *bh*, et le même [côté][80] est égal à la [ligne] AC, et en présupposant que la surface AF[81] soit égale à la surface IPL, le parallélépipède IVQ sera égal au parallélépipède ADE ; il reste de nécessité que le[s] cube[s] [*sq*][82] et [*mh*][83], ou encore ϕ[84] e $\widehat{\dagger}$ [85], (que j'ai représentés pour eux-mêmes bien qu'on puisse les voir), soient égaux [ensemble] au corps H, lequel est [égal à] 20 ; le côté du Cube *sq* est égal à la [ligne] IN et IN est la troisième partie de IP, et la superficie LP toute entière est [égale à] 6, // p. 296 // puisque le parallélépipède IVQ entier est [égal à] 6 Quantités ; IR est une Quantité, et la superficie LP étant [égale à] 6, la superficie LN sera [égale à] 2 ; la ligne IL sera égale au côté du Cube [*mh*][86]. Donc il faut trouver deux nombres qui, multipliés l'un par l'autre, fassent 2, et tels que leurs cubes, ajoutés ensemble, fassent 20. On pose que IL est [égale à] 1 $\overset{1}{\smile}$ ; IN sera [égale à] 2 divisés par 1 $\overset{1}{\smile}$, et la superficie LN sera [égale à] 2 (comme cela fut proposé).

77 Le texte donne : "nel", c'est-à-dire "dans", alors qu'il s'agit d'égaler le cube "au parallélépipède ACDE" et "au corps H", pour représenter l'équation $x^3 = 6x + 20$ ; compte tenu de l'absence de ponctuation et d'un signe de parenthèse, ce passage est obscur *a priori* ; on ne peut le comprendre qu'en fermant la parenthèse là où nous l'avons fait et en modifiant le texte original de la manière suivante : "& *al* corpo .H.".

78 Le texte donne : "b.f".

79 Le cube n'est ici désigné que par la diagonale de l'une de ses faces puisqu'aucun sommet de la face opposée n'est visible sur la figure en perspective cavalière et que les arêtes "cachées" le restent.

80 Le "même" côté est en fait ".a.b.", dont on a supposé qu'il était égal à ".A.C.".

81 Le texte donne : ".A.B.", or il s'agit de la surface du parallélogramme ".A.C.D.E.", telle que, égale à ".I.P.L." et multipliée par ".A.C.", égale à ".I.R.", on obtienne un volume égal à celui du parallélogramme ".I.V.Q.".

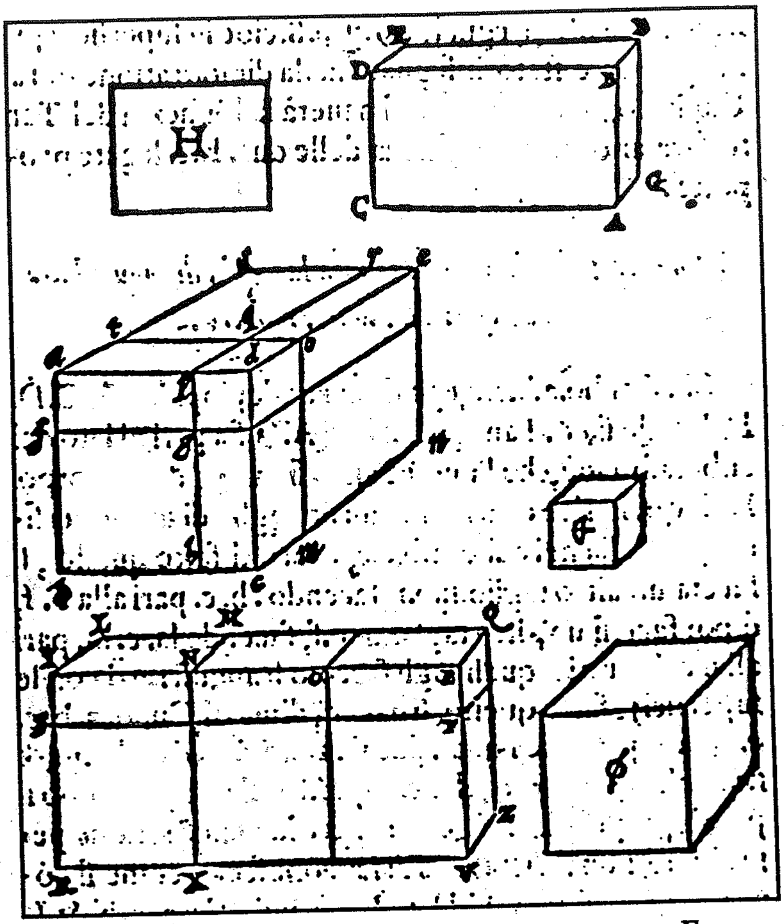
82 Il s'agit du cube élevé sur la base carrée de diagonale *sq*. Il n'est pas visible dans le cube *abe*.

83 Le texte donne : "m.i.h", alors qu'il s'agit du cube élevé sur le carré de diagonale *mh* ; ce cube est d'ailleurs visible, puisqu'il s'agit de *pio*.

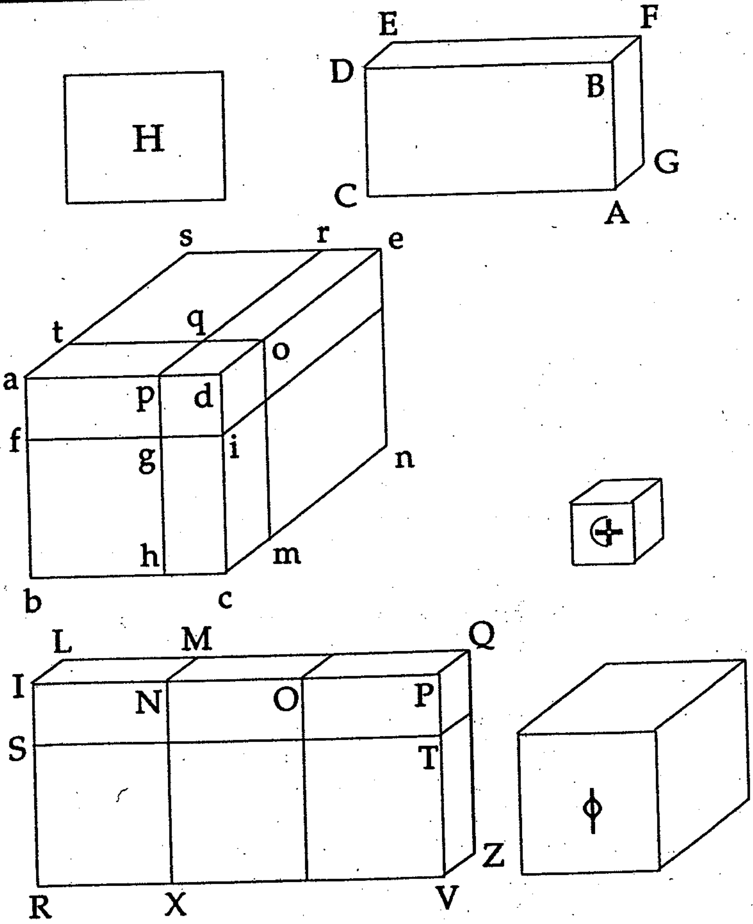
84 Le texte donne : "O" au lieu du symbole utilisé dans la figure.

85 Ce symbole, qui désigne un cube de côté ".i.d.", est un peu différent dans la figure, où il est d'ailleurs en position "couchée".

86 Le texte donne : "m.i.h" ; cf. la note ci-dessus.



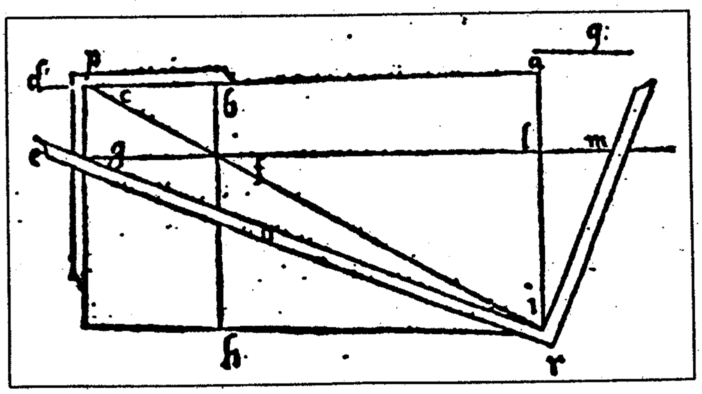
[Figure de la page 296.]



Le Cube [*mh*][87] sera [1 $\overset{3}{\smile}$][88], et le Cube *sq* sera [égal à] 8 // p. 297 // divisés par [1 $\overset{3}{\smile}$][89], et joints ensemble, ils font [1][90] $\overset{6}{\smile}$ p. 8 [le tout] divisé par [1 $\overset{3}{\smile}$][91], et cela est égal au corps H, qui est [égal à] 20. On enlève le dénominateur, et on aura 1 $\overset{6}{\smile}$ plus 8 égaux à 20. $\overset{3}{\smile}$, qui, une fois résolue, la Quantité vaudra R.c. ⌊ 10 p. R.q. 92 ⌋, et cette quantité sera la [ligne] IL, et [pour] la [ligne] IN, qui a été posée [égale à] 2 divisés par 1 $\overset{1}{\smile}$, on divise 2 par R.c. ⌊ 10 p. R.q. 92 ⌋, il en advient toujours son résidu, à savoir R.c. ⌊ 10 m. R.q. 92 ⌋, et telle sera [la ligne] IN ; et du fait que [la ligne] IN est égale à la [ligne] *bh* et que [la ligne] IL est égale à la [ligne] *hc*, la [ligne] *bc* toute entière sera la valeur de la Quantité, c'est-à-dire [la valeur] du côté du cube *ace*, à savoir R.c. ⌊ 10 p. R.q. 92 ⌋ p. R.c. ⌊ 10 m. R.q. 92 ⌋ ; mais l'on doit avertir que, quand le corps H sera plus petit que la quatrième partie du cube *ace*, une telle résolution ne se pourra faire avec la coupe susdite ; par conséquent, comme il n'apparaît pas que cette résolution soit générale, j'ai poussé si loin l'investigation que j'ai trouvé une démonstration généralissime par les superficies planes ; cependant, puisqu'à chaque fois qu'interviennent les corps [solides], les lignes moyennes ne se peuvent trouver si ce n'est par voie d'instrument, il ne paraîtra alors étrange à personne si la démonstration présente la même difficulté, puisque, lorsqu'on ne l'avait pas, tout aussi vaine aura été l'invention de Platon et d'Architas de Tarente, comme de tant d'autres hommes de valeur, à vouloir doubler l'autel, ou encore un Cube (comme Barbaro en a amplement parlé dans le Commentaire à son [édition de] Vitruve[92]) ; donc, étant sous la protection de tant d'hommes de valeur, je ne me donnerai pas la peine de vouloir soutenir que cette démonstration ne peut se faire autrement qu'avec un instrument.

// p. 298 //

LIBRO [SECONDO.]

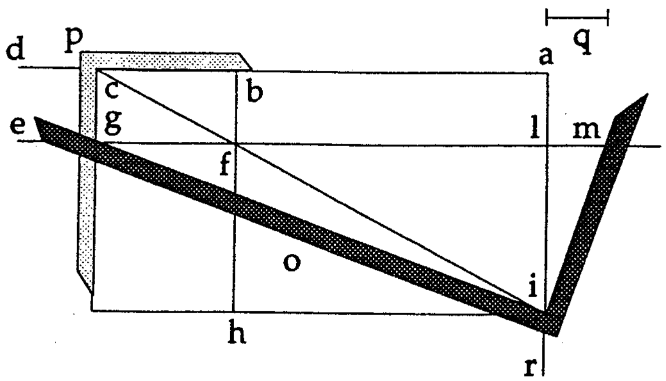



[Figure de la page 298.]

87 Le texte donne : "m.i.h" ; cf. la note ci-dessus.
88 Le texte donne : "1 cubo", mais il faut entendre "une Quantité au cube" puisque *gi* est égale à IL.
89 Le texte donne : "1 Cubo", mais il faut entendre "une Quantité au cube", car *sq* est égale à IN.
90 Le texte donne : "i".
91 Le texte donne : "un cubo", mais il faut entendre "une Quantité au cube", d'après ce qui précède.
92 Il s'agit de Daniele Barbaro (1513-1570), patriarche d'Aquilée, auteur de *La Pratica della Prospettiva...* (Venise, 1568), très inspirée de Piero della Francesca, d'Albrecht Dürer et de Federico Commandino. Il avait publié, en 1556, une traduction commentée du *De Architectura* de Vitruve.

*Démonstration avec des surfaces planes*
*du [Chapitre du] Cube égal à des Quantités et un nombre.*

Soit $1 \overset{3}{\smile}$ égal à $6 \overset{1}{\smile}$ p. 4, et soit *q* l'unité. On tire *me* et l'on fait [en sorte] que *ml* soit égale à la [ligne] *q*, donc qu'elle soit [égale à] 1, et *lf* [égale à] 6, soit le nombre des Quantités. Et sur ladite *lf*, on fait un parallélogramme [rectangle], qui soit [égal à] 4 en surface, c'est-à-dire autant que le nombre ; ce sera le parallélogramme [rectangle] *abf*. Ensuite, on prolonge la [ligne] *ab* jusqu'en *d* et [la ligne] *al* jusqu'en *r*. On prend alors deux équerres, dont l'une est posée par l'angle sur la ligne de *r* et dont l'un des bras touche l'extrémité *m*. On hausse ou on abaisse cette équerre jusqu'à ce que, une ligne étant tracée depuis l'angle de l'équerre et passant par l'extrémité *f*, vienne à rencontrer *bd* en un endroit tel que, mettant la seconde équerre avec son angle audit lieu de rencontre et un bras sur la [ligne] *da*, elle vienne à couper le bras de l'autre équerre sur la ligne *fe*. Ceci fait, je dis que la ligne allant du point *l* à l'angle de l'équerre est la valeur de la Quantité, et je le prouve de la manière suivante. Supposons d'abord que l'on ait élevé ou abaissé l'équerre en telle façon que, traçant de *i* la [ligne] *if* jusqu'en *c*, le bras de l'équerre *p* s'entrecoupe avec l'autre équerre en // p. 299 // *g* sur la ligne *ge*. Ceci étant fait, je dis que la ligne *li* est la valeur de la Quantité. En effet, la [ligne] *li* étant $1 \overset{1}{\smile}$, et *ml* [égale à] 1, la [ligne] *lg* sera $1 \overset{2}{\smile}$, parce que *ml* par [*lg*][93] vaut autant que *li* par elle-même (du fait que l'angle *i* est droit). Le parallélogramme [rectangle] *ilg* sera [$1 \overset{3}{\smile}$][94], et le parallélogramme [rectangle] *ilf* sera $6 \overset{1}{\smile}$ parce que *il* est $1 \overset{1}{\smile}$ et *lf* [égal à] 6. Le parallélogramme [rectangle] *hfg* sera [égal à] 4, car il est égal au parallélogramme [rectangle] *alf* qui était [égal à] 4. Comme *ilg* est tout ensemble $6 \overset{1}{\smile}$ et 4 et que, par l'autre raison, il est prouvé qu'il est $1 \overset{3}{\smile}$, en conséquence, $1 \overset{3}{\smile}$ sera égal à $6 \overset{1}{\smile}$ p. 4, et la [ligne] *il* sera $1 \overset{1}{\smile}$. Selon la résolution enseignée, la [ligne] *li* sera [égale à] R.q. 3 p. 1, la [ligne] *lg* sera [égale à] 4 p. R.q. 12, la [ligne] *fg* sera [égale à] R.q. 12 m. 2, le parallélogramme [rectangle] *ilg* sera [égal à] R.q. 108 p. 10, et le parallélogramme [rectangle] *ilf* sera R.q. 108 p. 6 puisque la ligne *il* est [égale à] R.q. 3 p. 1 et la [ligne] *lf* [égale à] 6. Le parallélogramme [rectangle] *hfg* est [égal à] 4 ; ce qui, joint ensemble à R.q. 108 p. 6, fait R.q. 108 p. 10, qui est égal au cube *ilg* (comme cela fut proposé).




93 Le texte donne : "l.m".
94 Le texte donne : "un cubo", mais il faut entendre "une Quantité au cube", d'après ce qui précède.