CAUCHY 1821

[...]

Quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre. Les raisons de cette espèce, quoique assez communément admises, sur-tout

dans le passage des séries convergentes aux séries divergentes, et des quantités réelles aux expressions imaginaires, ne peuvent être considérées, ce me semble, que comme des inductions propres à faire pressentir quelquefois la vérité, mais qui s'accordent peu avec l'exactitude si vantée des sciences mathématiques. On doit même observer qu'elles tendent à faire attribuer aux formules algébriques une étendue indéfinie, tandis que, dans la réalité, la plupart de ces formules subsistent uniquement sous certaines conditions, et pour certaines valeurs des quantités qu'elles renferment. En déterminant ces conditions et ces valeurs, et en fixant d'une manière précise le sens des notations dont je me sers, je fais disparaître toute incertitude; et alors les différentes formules ne présentent plus que des relations entre les quantités réelles, relations qu'il est toujours facile de vérifier par la substitution des nombres aux quantités elles-mêmes. Il est vrai que, pour rester constamment fidèle à ces principes, je me suis vu forcé d'admettre plusieurs propositions qui paraîtront peut-être un peu dures au premier abord. Par exemple, j'énonce dans le chapitre VI, qu'*une série divergente n'a pas de somme*; dans le chapitre VII, qu'*une équation imaginaire est seulement la représentation symbolique de deux équations entre quantités réelles*; dans le chapitre IX, que, *si des constantes ou des variables comprises dans une fonction, après avoir été supposées réelles, deviennent imaginaires, la notation à l'aide de laquelle la fonction se trouvait exprimée, ne peut être conservée dans le calcul qu'en vertu d'une convention nouvelle propre à fixer le sens de cette notation dans la dernière hypothèse*; &c. Mais ceux qui liront mon ouvrage reconnaîtront,

je l'espère, que les propositions de cette nature, entraînant l'heureuse nécessité de mettre plus de précision dans les théories, et d'apporter des restrictions utiles à des assertions trop étendues, tournent au profit de l'analyse, et fournissent plusieurs sujets de recherches qui ne sont pas sans importance. Ainsi, avant d'effectuer la sommation d'aucune série, j'ai dû examiner dans quels cas les séries peuvent être sommées, ou, en d'autres termes, quelles sont les conditions de leur convergence ; et j'ai, à ce sujet, établi des règles générales qui me paraissent mériter quelque attention.

[...]

[. . .]

On nomme quantité *variable* celle que l'on considère comme devant recevoir successivement plusieurs valeurs différentes les unes des autres. On désigne une semblable quantité par une lettre prise ordinairement parmi les dernières de l'alphabet. On appelle au contraire quantité *constante*, et l'on désigne ordinairement par une des premières lettres de l'alphabet toute quantité qui reçoit une valeur fixe et déterminée. Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres. Ainsi, par exemple, un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées. En Géométrie, la surface du cercle est la limite vers laquelle convergent les surfaces des polygones inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croît de plus en plus, etc.

Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable décroissent indéfiniment, de manière à s'abaisser au-dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un *infiniment petit* ou une quantité *infiniment petite*. Une variable de cette espèce a zéro pour limite.

Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable croissent de plus en plus, de manière à s'élever au-dessus de tout nombre donné, on dit que cette variable a pour limite l'*infini positif*, indiqué par le signe ∞, s'il s'agit d'une variable positive, et l'*infini négatif*, indiqué par la notation $-\infty$, s'il s'agit d'une variable négative. Les infinis positif et négatif sont désignés conjointement sous le nom de *quantités infinies*.

[. . .]

[...]

Lorsqu'une quantité variable converge vers une limite fixe, il est souvent utile d'indiquer cette limite par une notation particulière; c'est ce que nous ferons, en plaçant l'abréviation

$$\lim$$

devant la quantité variable dont il s'agit. Quelquefois, tandis qu'une ou plusieurs variables convergent vers des limites fixes, une expression qui renferme ces variables converge à la fois vers plusieurs limites différentes les unes des autres. Nous indiquerons alors une quelconque de ces dernières limites à l'aide de doubles parenthèses placées à la suite de l'abréviation lim, de manière à entourer l'expression que l'on considère. Supposons, pour fixer les idées, qu'une variable positive ou négative représentée par x converge vers la limite o, et désignons par A un nombre constant : il sera facile de s'assurer que chacune des expressions

$$\lim A^x, \quad \lim \sin x$$

a une valeur unique déterminée par l'équation

$$\lim A^x = 1$$

ou

$$\lim \sin x = 0,$$

tandis que l'expression

$$\lim\left(\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

admet deux valeurs, savoir, $+\infty$, $-\infty$, et

$$\lim\left(\left(\sin\frac{1}{x}\right)\right)$$

une infinité de valeurs comprises entre les limites -1 et $+1$.

Nous allons terminer ces préliminaires en présentant, sur les quantités moyennes, plusieurs théorèmes dont la connaissance nous sera

fort utile dans la suite de cet Ouvrage. On appelle *moyenne* entre plusieurs quantités données une nouvelle quantité comprise entre la plus petite et la plus grande de celles que l'on considère. D'après cette définition, il est clair qu'il existe une infinité de moyennes entre plusieurs quantités inégales, et que la moyenne entre plusieurs quantités égales se confond avec chacune d'elles. Cela posé, on établira facilement, ainsi qu'on peut le voir dans la Note II, les propositions suivantes :

Théorème I. — *Soient b, b', b'', ... plusieurs quantités de même signe en nombre n, et a, a', a'', ... des quantités quelconques en nombre égal à celui des premières. La fraction*

$$\frac{a + a' + a'' + \ldots}{b + b' + b'' + \ldots}$$

sera moyenne entre les suivantes

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{a'}{b'}, \quad \frac{a''}{b''}, \quad \ldots.$$

Corollaire. — Si l'on suppose

$$b = b' = b'' = \ldots = 1,$$

on conclura du théorème précédent que la quantité

$$\frac{a + a' + a'' + \ldots}{n}$$

est moyenne entre les suivantes

$$a, \quad a', \quad a'', \quad \ldots.$$

Cette espèce particulière de moyenne est ce qu'on nomme une *moyenne arithmétique*.

Théorème II. — *Soient* A, A′, A″, ...; B, B′, B″, ... *deux suites de nombres pris à volonté, et formons avec ces deux suites, que nous supposons renfermer chacune un nombre n de termes, les racines*

$$\sqrt[B]{A}, \quad \sqrt[B']{A'}, \quad \sqrt[B'']{A''}, \quad \ldots;$$

$\sqrt[B+B'+B''\dots]{AA'A''\dots}$ *sera une nouvelle racine moyenne entre toutes les autres.*

Corollaire. — Si l'on prend

$$B = B' = B'' = \dots = 1,$$

on trouvera que la quantité positive

$$\sqrt[n]{AA'A''\dots}$$

est moyenne entre les suivantes

$$A, \quad A', \quad A'', \quad \dots.$$

Cette moyenne, d'une espèce particulière, est celle que l'on nomme *moyenne géométrique.*

Théorème III. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème I, si* α, α', α'', ... *désignent encore des quantités de même signe, la fraction*

$$\frac{\alpha a + \alpha' a' + \alpha'' a'' + \dots}{\alpha b + \alpha' b' + \alpha'' b'' + \dots}$$

sera moyenne entre les suivantes

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{a'}{b'}, \quad \frac{a''}{b''}, \quad \dots.$$

Corollaire. — Si l'on suppose

$$b = b' = b'' = \dots = 1,$$

on conclura du théorème précédent que la somme

$$a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \dots$$

est équivalente au produit de

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' + \dots$$

par une moyenne entre les quantités a, a', a'', ...

Pour abréger, lorsque nous voudrons désigner une moyenne entre

plusieurs quantités a, a', a'', ..., nous nous servirons de la notation

$$M(a, a', a'', \dots).$$

Cela posé, les théorèmes qui précèdent et leurs corollaires se trouveront compris dans les formules

$$(6) \qquad \frac{a + a' + a'' + \dots}{b + b' + b'' + \dots} = M\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \dots\right),$$

$$(7) \qquad \frac{a + a' + a'' + \dots}{n} = M(a, a', a'', \dots),$$

$$(8) \qquad \sqrt[B+B'+B''+\dots]{AA'A''\dots} = M\left(\sqrt[B]{A}, \sqrt[B']{A'}, \sqrt[B'']{A''}, \dots\right),$$

$$(9) \qquad \sqrt[n]{AA'A''\dots} = M(A, A', A'', \dots),$$

$$(10) \qquad \frac{a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \dots}{b\alpha + b'\alpha' + b''\alpha'' + \dots} = M\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \dots\right),$$

$$(11) \qquad a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \dots = (\alpha + \alpha' + \alpha'' + \dots)\,M(a, a', a'', \dots).$$

Dans ces formules,

$$a, \quad a', \quad a'', \quad \dots; \quad b, \quad b', \quad b'', \quad \dots; \quad \alpha, \quad \alpha', \quad \alpha'', \quad \dots$$

représenteront trois suites de quantités, et

$$A, \quad A', \quad A'', \quad \dots; \quad B, \quad B', \quad B'', \quad \dots$$

deux suites de nombres formées chacune de n termes différents. La troisième suite est, ainsi que la seconde, uniquement composée de quantités de même signe.

La notation que nous venons d'adopter fournit le moyen d'exprimer qu'une quantité est comprise entre deux limites données. En effet, toute quantité comprise entre les limites a, b étant une moyenne entre ces mêmes limites, on pourra la désigner par

$$M(a, b).$$

[...]

CHAPITRE II.

DES QUANTITÉS INFINIMENT PETITES OU INFINIMENT GRANDES, ET DE LA CONTINUITÉ DES FONCTIONS.

VALEURS SINGULIÈRES DES FONCTIONS DANS QUELQUES CAS PARTICULIERS.

§ I. — *Des quantités infiniment petites et infiniment grandes.*

On dit qu'une quantité variable devient *infiniment petite*, lorsque sa valeur numérique décroît indéfiniment de manière à converger vers la limite zéro. Il est bon de remarquer à ce sujet qu'on ne doit pas confondre un décroissement constant avec un décroissement indéfini. La surface d'un polygone régulier circonscrit à un cercle donné décroît constamment à mesure que le nombre des côtés augmente, mais non pas indéfiniment, puisqu'elle a pour limite la surface du cercle. De même encore, une variable qui n'admettrait pour valeurs successives que les différents termes de la suite

$$\frac{2}{1}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{5}{4}, \quad \frac{6}{5}, \quad \ldots,$$

prolongée à l'infini, décroîtrait constamment, mais non pas indéfiniment, puisque ses valeurs successives convergeraient vers la limite 1. Au contraire, une variable qui n'aurait pour valeurs successives que les différents termes de la suite

$$\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{7}, \quad \ldots,$$

prolongée à l'infini, ne décroîtrait pas constamment, puisque la différence entre deux termes consécutifs de cette suite est alternativement positive et négative; et, néanmoins, elle décroîtrait indéfiniment, puisque sa valeur finirait par s'abaisser au-dessous de tout nombre donné.

On dit qu'une quantité variable devient *infiniment grande*, lorsque sa valeur numérique croît indéfiniment de manière à converger vers la limite ∞. Il est encore essentiel d'observer ici qu'on ne doit pas confondre une variable qui croît indéfiniment avec une variable qui croît constamment. La surface d'un polygone régulier inscrit à un cercle donné croît constamment, mais non pas indéfiniment, à mesure que le nombre des côtés augmente. Les termes de la suite naturelle des nombres entiers

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad \ldots$$

croissent constamment et indéfiniment.

Les quantités infiniment petites et infiniment grandes jouissent de plusieurs propriétés, qui conduisent à la solution de questions importantes, et que je vais exposer en peu de mots.

Soit α une quantité infiniment petite, c'est-à-dire une variable dont la valeur numérique décroisse indéfiniment. Lorsque dans un même calcul on fait entrer les diverses puissances entières de α, savoir

$$\alpha, \quad \alpha^2, \quad \alpha^3, \quad \ldots,$$

ces diverses puissances sont respectivement désignées sous le nom d'infiniment petits du *premier*, du *second*, du *troisième ordre*, etc. En général, on appelle infiniment petit du premier ordre toute quantité variable dont le rapport avec α converge, tandis que la valeur numérique de α diminue, vers une limite finie différente de zéro; infiniment petit du second ordre toute quantité variable avec α, et dont le rapport avec α^2 converge vers une limite finie différente de zéro, etc. Cela posé, si l'on désigne par k une quantité finie différente de zéro, et par ε un nombre variable qui décroisse indéfiniment avec la valeur numérique de α, la forme générale des quantités infiniment petites du premier ordre sera

$$k\alpha \quad \text{ou du moins} \quad k\alpha(1 \pm \varepsilon);$$

la forme générale des quantités infiniment petites du second ordre

$$k\alpha^2 \quad \text{ou du moins} \quad k\alpha^2(1 \pm \varepsilon),$$
$$\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots;$$

enfin la forme générale des infiniment petits de l'ordre n (n représentant un nombre entier) sera

$$k\alpha^n \quad \text{ou du moins} \quad k\alpha^n(1 \pm \varepsilon).$$

On peut facilement établir, à l'égard de ces divers ordres de quantités infiniment petites, les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Si l'on compare l'un à l'autre deux infiniment petits d'ordres différents, pendant que tous les deux convergeront vers la limite zéro, celui qui est de l'ordre le plus élevé finira par obtenir constamment la plus petite valeur numérique.*

Démonstration. — Soient, en effet,

$$k\alpha^n(1 \pm \varepsilon), \quad k'\alpha^{n'}(1 \pm \varepsilon')$$

deux infiniment petits, l'un de l'ordre n, l'autre de l'ordre n', et supposons $n' > n$; le rapport entre le second de ces infiniment petits et le premier, savoir

$$\frac{k'}{k}\alpha^{n'-n}\frac{1 \pm \varepsilon'}{1 \pm \varepsilon},$$

convergera indéfiniment avec α vers la limite zéro, ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que la valeur numérique du second finit par devenir constamment inférieure à celle du premier.

[. . .]

[...]

Les propriétés des quantités infiniment petites étant établies, on en déduit les propriétés analogues des quantités infiniment grandes, en observant que toute quantité variable de cette dernière espèce peut être représentée par $\frac{1}{\alpha}$, α désignant une quantité infiniment petite. Ainsi, par exemple, lorsque, dans le polynôme

$$ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots + hx + k,$$

ordonné suivant les puissances descendantes de la variable x, cette variable devient infiniment grande; en la mettant sous la forme $\frac{1}{\alpha}$, on réduit le polynôme dont il s'agit à

$$\frac{a}{\alpha^m}\left(1 + \frac{b}{a}\alpha + \frac{c}{a}\alpha^2 + \ldots + \frac{h}{a}\alpha^{m-1} + \frac{k}{a}\alpha^m\right),$$

et l'on reconnaît alors immédiatement que, pour de très petites valeurs numériques de α, ou, ce qui revient au même, pour de très grandes valeurs numériques de x, ce polynôme est de même signe que son premier terme

$$\frac{a}{\alpha^m} = ax^m.$$

Comme cette remarque subsiste dans le cas même où quelques-unes des quantités b, c, ..., h, k se réduisent à zéro, il en résulte qu'on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème VIII. — *Lorsque, dans un polynôme ordonné suivant les puissances descendantes de la variable x, on fait croître indéfiniment la valeur numérique de cette variable, le polynôme finit par être constamment de même signe que son premier terme.*

§ II. — *De la continuité des fonctions.*

Parmi les objets qui se rattachent à la considération des infiniment petits, on doit placer les notions relatives à la continuité ou à la discontinuité des fonctions. Examinons d'abord sous ce point de vue les fonctions d'une seule variable.

Soit $f(x)$ une fonction de la variable x, et supposons que, pour chaque valeur de x intermédiaire entre deux limites données, cette fonction admette constamment une valeur unique et finie. Si, en partant d'une valeur de x comprise entre ces limites, on attribue à la variable x un accroissement infiniment petit α, la fonction elle-même recevra pour accroissement la différence

$$f(x+\alpha) - f(x),$$

qui dépendra en même temps de la nouvelle variable α et de la valeur de x. Cela posé, la fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites assignées à la variable x, fonction *continue* de cette variable, si, pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence

$$f(x+\alpha) - f(x)$$

décroît indéfiniment avec celle de α. En d'autres termes, *la fonction $f(x)$ restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.*

On dit encore que la fonction $f(x)$ est, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x, fonction continue de cette variable, toutes les fois qu'elle est continue entre deux limites de x, même très rapprochées, qui renferment la valeur dont il s'agit.

Enfin, lorsqu'une fonction $f(x)$ cesse d'être continue dans le voisinage d'une valeur particulière de la variable x, on dit qu'elle devient alors *discontinue* et qu'il y a pour cette valeur particulière *solution de continuité.*

D'après ces explications, il sera facile de reconnaître entre quelles limites une fonction donnée de la variable x est continue par rapport à cette variable. Ainsi, par exemple, la fonction $\sin x$, admettant pour chaque valeur particulière de la variable x une valeur unique et finie, sera continue entre deux limites quelconques de cette variable, attendu que la valeur numérique de $\sin(\frac{1}{2}\alpha)$, et par suite celle de la différence

$$\sin(x+\alpha) - \sin x = 2\sin(\tfrac{1}{2}\alpha)\cos(x+\tfrac{1}{2}\alpha),$$

décroissent indéfiniment avec celle de α, quelle que soit d'ailleurs la valeur finie que l'on attribue à x. En général, si l'on envisage sous le rapport de la continuité les onze fonctions simples que nous avons considérées ci-dessus (Chap. I, § II), savoir

$$a+x,\quad a-x,\quad ax,\quad \frac{a}{x},\quad x^a,\quad A^x,\quad L(x),$$

$$\sin x,\quad \cos x,\quad \arcsin x,\quad \arccos x,$$

on trouvera que chacune de ces fonctions reste continue entre deux limites finies de la variable x, toutes les fois que, étant constamment réelle entre ces deux limites, elle ne devient pas infinie dans l'intervalle.

Par suite, chacune de ces fonctions sera continue dans le voisinage d'une valeur finie attribuée à la variable x, si cette valeur finie se trouve comprise :

Pour les fonctions

$$\left.\begin{array}{l} a+x \\ a-x \\ ax \\ A^x \\ \sin x \\ \cos x \end{array}\right\} \text{ entre les limites } x=-\infty,\ x=+\infty;$$

Pour la fonction

$$\frac{a}{x}\ \left\{\begin{array}{ll} 1^{\circ} \text{ entre les limites } x=-\infty, & x=0, \\ 2^{\circ} \text{ entre les limites } x=0, & x=\infty; \end{array}\right.$$

Pour les fonctions

$$\left.\begin{array}{l} x^a \\ L(x) \end{array}\right\} \text{ entre les limites } x=0,\qquad x=\infty;$$

enfin

Pour les fonctions

$$\left.\begin{array}{l} \arcsin x \\ \arccos x \end{array}\right\} \text{ entre les limites } x=-1,\qquad x=+1.$$

Il est bon d'observer que, dans le cas où l'on suppose $a = \pm m$ (m désignant un nombre entier), la fonction simple

$$x^a$$

est toujours continue dans le voisinage d'une valeur finie de la variable x, pourvu que cette valeur soit comprise :

$$\text{si } a=+m, \quad \text{entre les limites } x=-\infty,\ x=+\infty,$$

$$\text{si } a=-m, \left\{\begin{array}{l} \text{entre les limites } x=-\infty,\ x=0 \\ \quad\text{ou bien} \\ \text{entre les suivantes } x=0,\qquad x=\infty. \end{array}\right.$$

Parmi les onze fonctions que l'on vient de citer, deux seulement deviennent discontinues pour une valeur de x comprise dans l'intervalle des limites entre lesquelles ces mêmes fonctions restent réelles. Les deux fonctions dont il s'agit sont

$$\frac{a}{x} \quad \text{et} \quad x^a \text{ (lorsque } a=-m).$$

L'une et l'autre deviennent infinies, et par conséquent discontinues, pour $x=0$.

Soit maintenant

$$f(x, y, z, \ldots)$$

une fonction de plusieurs variables $x, y, z, \ldots$, et supposons que, dans le voisinage de valeurs particulières $X, Y, Z, \ldots$ attribuées à ces variables, $f(x, y, z, \ldots)$ soit à la fois fonction continue de x, fonction continue de y, fonction continue de z, ... On prouvera aisément que, si l'on désigne par α, β, γ, ... des quantités infiniment petites, et si l'on attribue à x, y, z, ... les valeurs X, Y, Z, ... ou des valeurs très voisines, la différence

$$f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma) - f(x, y, z, \ldots)$$

sera elle-même infiniment petite. En effet, il est clair que, dans l'hypothèse précédente, les valeurs numériques des différences

$$f(x+\alpha, y, z, \ldots) - f(x, y, z, \ldots),$$
$$f(x+\alpha, y+\beta, z, \ldots) - f(x+\alpha, y, z, \ldots),$$
$$f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma, \ldots) - f(x+\alpha, y+\beta, z, \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

décroîtront indéfiniment avec celles des quantités variables α, β, γ, ..., savoir, la valeur numérique de la première différence avec la valeur numérique de α, celle de la seconde différence avec la valeur numérique de β, celle de la troisième avec la valeur numérique de γ, et ainsi de suite. On doit en conclure que la somme de toutes ces différences, savoir

$$f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma, \ldots) - f(x, y, z, \ldots),$$

convergera vers la limite zéro, si α, β, γ, ... convergent vers cette même limite. En d'autres termes,

$$f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma, \ldots)$$

aura pour limite

$$f(x, y, z, \ldots).$$

La proposition qu'on vient de démontrer subsiste évidemment dans le cas même où l'on établirait entre les nouvelles variables α, β, γ, ... certaines relations. Il suffit que ces relations permettent aux nouvelles variables de converger toutes en même temps vers la limite zéro.

Lorsque, dans la même proposition, on remplace x, y, z, ... par

X, Y, Z, ..., et $x+\alpha$, $y+\beta$, $z+\gamma$, ... par x, y, z, ..., on obtient l'énoncé suivant :

Théorème I. — *Si les variables x, y, z, ... ont pour limites respectives les quantités fixes et déterminées* X, Y, Z, ..., *et que la fonction $f(x, y, z, \ldots)$ soit continue par rapport à chacune des variables x, y, z, ... dans le voisinage du système des valeurs particulières*

$$x = X, \quad y = Y, \quad z = Z, \quad \ldots,$$

$f(x, y, z, \ldots)$ aura pour limite $f(X, Y, Z, \ldots)$.

Comme, dans ce second énoncé, les variables α, β, γ, ... se trouvent remplacées par $x - X$, $y - Y$, $z - Z$, ..., les relations qu'on pouvait établir, dans le premier énoncé, entre α, β, γ, ..., pourront être établies, dans le second, entre les quantités $x - X$, $y - Y$, $z - Z$; et il en résulte que la fonction $f(x, y, z, \ldots)$ aura pour limite $f(X, Y, Z, \ldots)$, dans le cas même où les variables x, y, z, ... seraient assujetties à certaines relations, pourvu que ces relations leur permettent de s'approcher indéfiniment des limites X, Y, Z, ...

[...]