CAUCHY : Texte b)

AVERTISSEMENT.

CET ouvrage, entrepris sur la demande du Conseil d'instruction de l'École royale polytechnique, offre le résumé des Leçons que j'ai données à cette École sur le calcul infinitésimal. Il sera composé de deux volumes correspondans aux deux années qui forment la durée de l'enseignement. Je publie aujourd'hui le premier volume divisé en quarante Leçons, dont les vingt premières comprennent le calcul différentiel, et les vingt dernières une partie du calcul intégral. Les méthodes que j'ai suivies diffèrent à plusieurs égards de celles qui se trouvent exposées dans les ouvrages du même genre. Mon but principal a été de concilier la rigueur, dont je m'étais fait une loi dans mon *Cours d'analyse*, avec la simplicité qui résulte de la considération directe des quantités infiniment petites. Pour cette raison, j'ai cru devoir rejeter les développemens des fonctions en séries infinies, toutes les fois que les séries obtenues ne sont pas convergentes; et je me suis vu forcé de renvoyer au calcul intégral la formule de TAYLOR, cette formule ne pouvant plus être admise comme générale qu'autant que la série qu'elle renferme se trouve réduite à un nombre fini de termes, et complétée par une intégrale définie. Je n'ignore pas que l'illustre auteur de la *Mécanique analytique* a pris la formule dont il s'agit pour base de sa théorie des *fonctions dérivées*. Mais, malgré tout le respect que commande une si grande autorité, la plupart des géomètres s'accordent maintenant à reconnaître l'incertitude des résultats auxquels on peut être conduit par l'emploi de séries divergentes, et nous ajouterons que, dans plusieurs cas, le théorème de TAYLOR semble fournir le développement d'une fonction en série convergente, quoique la somme de la série diffère essentiellement de la fonction proposée [*voyez* la fin de la 38.^e Leçon]. Au reste, ceux qui liront mon ouvrage, se convaincront, je l'espère, que les principes du calcul différentiel, et ses applications les plus importantes, peuvent être facilement exposés, sans l'intervention des séries.

Dans le calcul intégral, il m'a paru nécessaire de démontrer généralement l'existence des *intégrales* ou *fonctions primitives* avant de faire connaître leurs diverses propriétés. Pour y parvenir, il a fallu d'abord établir la notion d'*integrales prises entre des limites données* ou *intégrales définies*. Ces dernières pouvant être quelquefois infinies ou indéterminées, il était essentiel de rechercher dans quels cas elles conservent une valeur unique et finie.

[...]

TROISIÈME LEÇON.

Dérivées des Fonctions d'une seule Variable.

LORSQUE la fonction $y = f(x)$ reste continue entre deux limites données de la variable x, et que l'on assigne à cette variable une valeur comprise entre les deux limites dont il s'agit, un accroissement infiniment petit, attribué à la variable, produit un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même. Par conséquent, si l'on pose alors $\Delta x = i$, les deux termes du *rapport aux différences*

$$(1) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}$$

seront des quantités infiniment petites. Mais, tandis que ces deux termes s'approcheront indéfiniment et simultanément de la limite zéro, le rapport lui-même pourra converger vers une autre limite, soit positive, soit négative. Cette limite, lorsqu'elle existe, a une valeur déterminée, pour chaque valeur particulière de x; mais elle varie avec x. Ainsi, par exemple, si l'on prend $f(x) = x^m$, m désignant un nombre entier, le rapport entre les différences infiniment petites sera

$$\frac{(x+i)^m - x^m}{i} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}i + \ldots + i^{m-1}$$

et il aura pour limite la quantité mx^{m-1}, c'est-à-dire, une nouvelle fonction de la variable x. Il en sera de même en général; seulement, la forme de la fonction nouvelle qui servira de limite au rapport $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ dépendra de la forme de la fonction proposée $y = f(x)$. Pour indiquer cette dépendance, on donne à la nouvelle fonction le nom de *fonction dérivée*, et on la désigne, à l'aide d'un accent, par la notation

$$y' \quad \text{ou} \quad f'(x),$$

Dans la recherche des dérivées des fonctions d'une seule variable x, il est utile de distinguer les fonctions que l'on nomme *simples*, et que l'on considère comme résultant d'une seule opération effectuée sur cette variable, d'avec les fonctions que l'on construit à l'aide de plusieurs opérations et que l'on nomme *composées*. Les fonctions simples que produisent les opérations de l'algèbre et de la trigonométrie [*voyez* la I.re partie du *Cours d'analyse*, ch. I.er] peuvent être réduites aux suivantes

$$a+x,\quad a-x,\quad ax,\quad \frac{a}{x},\quad x^a,\quad A^x,\quad L(x),$$

$$\sin x,\quad \cos x,\quad \operatorname{arc}\sin x,\quad \operatorname{arc}\cos x,$$

A désignant un nombre constant, $a=\pm A$ une quantité constante, et la lettre L indiquant un logarithme pris dans le système dont la base est A. Si l'on prend une de ces fonctions simples pour y, il sera facile en général d'obtenir la fonction dérivée y'. On trouvera, par exemple,

pour $y=a+x$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(a+x+i)-(a+x)}{i}=1$, $\quad y'=1$;

pour $y=a-x$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(a-x-i)-(a-x)}{i}=-1$, $\quad y'=-1$;

pour $y=ax$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{a(x+i)-ax}{i}=a$, $\quad y'=a$;

pour $y=\frac{a}{x}$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{a}{x+i}-\frac{a}{x}}{i}=-\frac{a}{x(x+i)}$, $\quad y'=-\frac{a}{x^2}$;

pour $y=\sin x$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}i}\cos\left(x+\frac{1}{2}i\right)$, $y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$;

pour $y=\cos x$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{\sin\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}i}\sin\left(x+\frac{1}{2}i\right)$, $y'=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

De plus, en posant $i=\alpha x$, $A^i=1+\beta$ et $(1+\alpha)^a=1+\gamma$, on trouvera

pour $y=L(x)$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{L(x+i)-L(x)}{i}=\frac{L(1+\alpha)}{\alpha x}=\frac{L(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{x}$, $\quad y'=\frac{L(e)}{x}$;

pour $y=A^x$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{A^{x+i}-A^x}{i}=\frac{A^i-1}{i}A^x=\frac{A^x}{L(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}}$, $\quad y'=\frac{A^x}{L(e)}$;

pour $y=x^a$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+i)^a-x^a}{i}=\frac{(1+\alpha)^a-1}{\alpha}x^{a-1}=\frac{L(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{L(1+\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}}ax^{a-1}$, $y'=ax^{a-1}$.

Dans ces dernières formules, la lettre e désigne le nombre $2{,}718\ldots$ qui sert de limite à l'expression $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$. Si l'on prend ce nombre pour base d'un système de logarithmes, on obtiendra les logarithmes *Népériens* ou *hyperboliques*, que nous indiquerons toujours à l'aide de la lettre l. Cela posé, on aura évidemment $l(e)=1$,

$$Le=\frac{Le}{LA}=\frac{le}{lA}=\frac{1}{lA};$$

et de plus on trouvera

$$\text{pour} \quad y=l(x), \quad y'=\frac{1}{x};$$

$$\text{pour} \quad y=e^x, \quad y'=e^x.$$

Les diverses formules qui précèdent étant établies seulement pour les valeurs de x auxquelles correspondent des valeurs réelles de y, on doit supposer x positive, dans celles de ces formules qui se rapportent aux fonctions $L(x)$, $l(x)$, et même à la fonction x^a, lorsque a désigne une fraction de dénominateur pair, ou un nombre irrationnel.

Soit maintenant z une seconde fonction de x, liée à la première $y=f(x)$ par la formule

$$z=F(y). \tag{2}$$

z ou $F(fx)$ sera ce qu'on appelle une *fonction de fonction* de la variable x; et, si l'on désigne par Δx, Δy, Δz, les accroissemens infiniment petits et simultanés des trois variables x, y, z, on trouvera

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{F(y+\Delta y)-F(y)}{\Delta x}=\frac{F(y+\Delta y)-F(y)}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

puis, en passant aux limites,

$$z'=y'.F'(y)=f'(x).F'(fx). \tag{3}$$

Par exemple, si l'on fait $z=ay$, et $y=l(x)$, on aura $z'=ay'=\frac{a}{x}$.

A l'aide de la formule (3), on déterminera facilement les dérivées des fonctions simples A^x, x^a, arc sin x, arc cos x, en supposant connues celles des fonctions $L(x)$, $\sin x$, $\cos x$. On trouvera en effet

pour $y = A^x$, $L(y) = x$, $y' \dfrac{L(e)}{y} = 1$, $y' = \dfrac{y}{L(e)} = A^x l(A)$;

pour $y = x^a$, $l(y) = a l(x)$, $y' \dfrac{1}{y} = \dfrac{a}{x}$, $y' = a\dfrac{y}{x} = a x^{a-1}$;

pour $y = \text{arc} \sin x$, $\sin y = x$, $y' \cos y = 1$, $y' = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

pour $y = \text{arc} \cos x$, $\cos y = x$, $y' \times - \sin y = 1$, $y' = \dfrac{-1}{\sin y} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

De plus, les dérivées des fonctions composées

$$A^y, \quad e^y, \quad \frac{1}{y}$$

étant respectivement, en vertu de la formule (3),

$$y' A^y l(A), \quad y' e^y, \quad -\frac{y'}{y^2},$$

les dérivées des suivantes

$$A^{B^x}, \quad e^{e^x}, \quad \text{séc}\, x = \frac{1}{\cos x}, \quad \text{coséc}\, x = \frac{1}{\sin x}$$

deviendront

$$A^{B^x} B^x l(A) l(B), \quad e^{e^x} e^x, \quad \frac{\sin x}{\cos^2 x}, \quad -\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

Nous remarquerons, en finissant, que les dérivées des fonctions composées se déterminent quelquefois aussi facilement que celles des fonctions simples. Ainsi, par exemple, on trouve

pour $y = \text{tang}\, x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{i}\left(\dfrac{\sin(x+i)}{\cos(x+i)} - \dfrac{\sin x}{\cos x}\right) = \dfrac{\sin i}{i \cos x \cos(x+i)}$, $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

pour $y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{i}\left(\dfrac{\cos(x+i)}{\sin(x+i)} - \dfrac{\cos x}{\sin x}\right) = -\dfrac{\sin i}{i \sin x \sin(x+i)}$, $y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

et l'on en conclut

pour $y = \text{arc tang.}\, x$, $\text{tang}\, y = x$, $\dfrac{y'}{\cos^2 y} = 1$, $y' = \cos^2 y = \dfrac{1}{1+x^2}$;

pour $y = \text{arc cot.}\, x$, $\cot y = x$, $\dfrac{-y'}{\sin^2 y} = 1$, $y' = -\sin^2 y = \dfrac{-1}{1+x^2}$.

TRENTE-SEPTIÈME LEÇON.

Théorèmes de Taylor *et de* Maclaurin. *Extension de ces Théorèmes aux Fonctions de plusieurs variables.*

On appelle *série* une suite indéfinie de termes

(1) $$u_0,\ u_1,\ u_2\ \ldots\ldots\ u_n,\ \&c.\ldots$$

qui dérivent les uns des autres suivant une loi connue. Soit

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

la somme des n premiers termes, n désignant un nombre entier quelconque. Si, pour des valeurs de n toujours croissantes, la somme s_n s'approche indéfiniment d'une certaine limite s, la série sera dite *convergente*, et la limite s représentée par la notation

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \&c.$$

s'appellera la *somme* de la série. Si au contraire, tandis que n croît indéfiniment, la somme s_n ne s'approche d'aucune limite fixe, la série sera *divergente*, et n'aura plus de somme. Dans l'un et l'autre cas, le terme correspondant à l'indice n, savoir, u_n, se nomme *le terme général*. De plus, si dans la première hypothèse on fait $s = s_n + r_n$; r_n sera ce qu'on nomme *le reste* de la série, à partir du $n.^{me}$ terme.

Ces définitions étant admises, il résulte évidemment des formules (2) et (3) de la 36.ᵉ leçon que les séries

(2) $$F(0),\ \frac{x}{1}F'(0),\ \frac{x^2}{1.2}F''(0),\ \frac{x^3}{1.2.3}F'''(0),\ \&c.\ldots,$$

(3) $$f(x),\ \frac{h}{1}f'(x),\ \frac{h^2}{1.2}f''(x),\ \frac{h^3}{1.2.3}f'''(x),\ \&c.\ldots$$

seront convergentes, et auront pour sommes respectives les deux fonctions $F(x)$, $f(x+h)$, toutes les fois que les deux intégrales

(4) $$\int_0^x \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} F^{(n)}(z)\,dz = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} F^{(n)}(\theta x),$$

$$(5)\qquad \int_0^h \frac{(h-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f^{(n)}(x+z)\,dz = \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(x+\theta h)$$

convergeront, pour des valeurs croissantes de n, vers la limite zéro. On trouvera, en conséquence,

$$(6)\qquad F(x) = F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{1.2} F''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} F'''(0) + \&c.,$$

si l'expression (4) s'évanouit par des valeurs infinies de n, et

$$(7)\qquad f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x) + \&c.;$$

si l'expression (5) satisfait à la même condition. Les formules (6) et (7) renferment les théorèmes de *Maclaurin* et de *Taylor*. Elles servent, quand les intégrales (4) et (5) remplissent les conditions prescrites, à *développer* les deux fonctions $F(x)$ et $f(x+h)$ en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes et entières des quantités x et h. Les restes de ces séries sont précisément les deux intégrales dont nous venons de parler.

[· · ·]

Comme, en vertu de la formule (19) [22.^{e} leçon], l'intégrale (4) est équivalente à un produit de la forme

$$x\,\frac{(x-\theta x)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\,F^{(n)}(\theta x), \tag{13}$$

θ désignant un nombre inférieur à l'unité; il est clair que des valeurs infinies de n feront évanouir cette intégrale, si elles réduisent à zéro la fonction

$$\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\,F^{(n)}(z) \tag{14}$$

pour toutes les valeurs de z renfermées entre les limites 0 et x. Cette dernière condition sera évidemment remplie, si la valeur numérique de l'expression $F^{(n)}(\theta x)$ supposée réelle, ou le module de la même expression supposée imaginaire, ne croît pas indéfiniment, pendant que n augmente. En effet, puisque la quantité $m(n-m)=(\frac{n}{2})^2-(\frac{n}{2}-m)^2$ croît avec le nombre m entre les limites $m=1$, $m=\frac{n}{2}$, et que l'on a par suite

$$1.(n-1)<2.(n-2)<3.(n-3)<\ldots, \qquad 1.2.3\ldots(n-1)>(n-1)^{\frac{n-1}{2}},$$

on peut affirmer que la valeur numérique ou le module de l'expression (14) restera toujours inférieur à la valeur numérique ou au module du produit

$$(15)\qquad \left(\frac{x-z}{\sqrt{n-1}}\right)^{n-1} F^{(n)}(z).$$

Or, ce produit deviendra nul, dans l'hypothèse admise, pour $n=\infty$:

Exemples. Si l'on prend pour valeurs successives de la fonction $F(x)$

$$e^x,\quad \sin x,\quad \cos x,$$

on trouvera pour les valeurs correspondantes de $F^{(n)}(\theta x)$

$$e^{\theta x},\quad \sin\left(\frac{n\pi}{2}+\theta x\right),\quad \cos\left(\frac{n\pi}{2}+\theta x\right).$$

Comme ces dernières quantités restent finies, quel que soit x, tandis que n augmente, on doit en conclure que le théorème de *Maclaurin* est toujours applicable aux trois fonctions proposées. On aura, en conséquence, pour des valeurs quelconques de x, et pour des valeurs positives de A,

$$(16)\quad e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\&c., A^x=e^{xl(A)}=1+\frac{xlA}{1}+\frac{x^2(lA)^2}{1.2}+\frac{x^3(lA)^3}{1.2.3}+\&c.$$

$$(17)\quad \sin x=\sin(0)+\frac{x}{1}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{x^2}{1.2}\sin\left(\frac{2\pi}{2}\right)+\frac{x^3}{1.2.3}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\&c.=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4}-\&c.$$

$$(18)\quad \cos x=\cos(0)+\frac{x}{1}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{x^2}{1.2}\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right)+\frac{x^3}{1.2.3}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\&c.=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\&c.$$

Lorsque la fonction $F^{(n)}(\theta x)$ devient infinie pour des valeurs infinies de n, l'expression (14) peut encore converger vers la limite zéro. C'est ce qui arrivera, par exemple, si l'on prend $F(x)=l(1+x)$, et si en même temps on attribue à x une valeur numérique plus petite que l'unité. En effet, on trouvera dans ce cas, en supposant $z=\theta x$, $\theta<1$, $x^2<1$,

$$(19)\qquad \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}F^{(n)}(z)=\pm\frac{(x-z)^{n-1}}{(1+z)^n}=\pm\frac{x^{n-1}}{1-\theta}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n;$$

et, comme la fraction $\frac{1-\theta}{1+\theta x}$ sera évidemment inférieure à l'unité, il est clair que l'expression (19) s'évanouira, pour $n=\infty$. On trouvera, en conséquence, pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites -1 et $+1$,

$$(20)\qquad l(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\&c.\ldots$$