Jean Le Rond D'Alembert, « Recherches sur le calcul intégral »,
***HAB pour l'année 1746*, 1748, p. 182-192.**

RECHERCHES

SUR LE CALCUL INTEGRAL

PAR MR. D'ALEMBERT.

PREMIERE PARTIE.

DE L'INTEGRATION DES FRACTIONS RATIONELLES.

POUR POUVOIR reduire generalement à la quadrature de l'hyperbole ou à celle du cercle, une fraction rationnelle differentielle, suivant la methode de *M. Bernoulli* * il faut démontrer que tout multinome rationnel & sans diviseur composé d'une variable x & de constantes, peut toujours se partager, lorsqu'il est d'un degré pair, en facteurs trinomes $xx + fx + g$, $xx + hx + i$. &c. dont tous les coëfficiens f, g, h, i, &c. soient réels. Il est visible que cette difficulté ne tombe que sur les multinomes qui ne peuvent etre divisés par aucuns binomes réels, $x + a$, $x + b$ &c. car on pourra toujours faire evanouïr par la division tous les Binomes réels, lorsqu'il y en aura, & l'on voit aisément que les produits de ces binomes donneront des facteurs réels $xx + fx + g$.

* Voyez les mem. de l'Acad. de Paris. an. 1702.

Mrs. COTTES, MOIVRE, HERMAN &c. & plusieurs autres n'ont resolu la difficulté dont il s'agit que pour les multinomes $x^{2m} + Ax^{m} + B$ composés de trois termes seulement. *M. Smith*, dans

ou negative, pourra etre exprimée simplement par $y = az^{\frac{m}{n}}$, en dans le Commentaire qu'il a inferé à la fin de *l'Harmonia mensurarum*, la refolu aussi pour les multinomes du 4e degré feulement, & il tire sa démonstration de ce que la réduite de ce multinome considéré comme une Equation du 4e degré, a son dernier terme negatif. Perfonne, que je fache n'a été plus loin, si on en excepte *Mr. Euler*, qui dans le Tom.VII. des *Miscellanea Berolinensia*, fait mention d'un ouvrage, ou il à demontré en general la propofition dont il est question. Mais il me semble que *M. Euler* n'a encore rien publié de son travail fur ce fujet. Du moins je n'en ay trouvé aucune trace dans les ouvrages de ce celebre auteur. J'ai donc cru pouvoir exposer ici en peu de mots mes recherches fur cette matiére, d'autant plus qu'elles me fourniront l'occafion de demontrer chemin faifant plusieurs propofitions, assez mal prouvées dans presque tous les livres d'algebre.

II. *Propof. I. Soit* TM *une courbe quelconque dont les coordonnées* $TP = z$, $PM = y$, *& dans laquelle* $y = 0$ *ou* ∞ *lorsque* $z = 0$. *Si on prend* z *positive ou negative, mais infiniment petite, la valeur de* y *en* z *pourra toujours être exprimée par une quantité réelle, lorsque* z *sera positive: &, lorsque* z *sera negative, par une quantite reelle, ou par une quantité* $p + q\sqrt{-1}$, *dans laquelle* p *&* q *feront l'un & l'autre réels.* *Fig. 1. 2. 3.*

CAR LORSQUE z est infiniment petite, on peut avoir la valeur de y en z par cette ferie trés convergente $y = az^{\frac{m}{n}} + bz^{\frac{r}{s}} + cz^{\frac{t}{u}}$ &c. dans laquelle les expofans de z font imaginés aller en augmentant, & dont on peut toujours fuppofer que tous les termes font réels en faifant z positive; car puisque la courbe passe par le point T ou qu'elle a une asymptote en ce point, (*hyp.*), il s'enfuit qu'on peut toujours

toujours ſuppoſer que les z poſitives tombent du côté de P ou ſont les ordonnées réelles. 1° Or ſi tous les termes de cette ſerie demeurent poſitifs en faiſant z negative, la valeur de y, repondante à z poſitive ou negative, pourra etre exprimée ſimplement par $y = a z^{\frac{m}{n}}$, en negligeant tous les autres termes qui ſont nuls par rapport au 1er, & en ce cas il repondra une valeur réelle de y, tant à z negative, qu'à z poſitive. 2°. Si $z^{\frac{m}{n}}$ devient imaginaire en faiſant z negative, ce qui arrivera ſi n eſt un nombre pair, & m un nombre impair, alors l'ordonnée correſpondante à z negative ou poſitive pourra encore etre exprimée par $a z^{\frac{m}{n}}$ qui ſera réelle, quand z ſera poſitive, & qui ſe changera pour z negative en $a \sqrt[2k]{-z}^{\,m} = a z^{\frac{m}{2k}} \times \sqrt[2k]{-1} = a \left(z^{\frac{m}{2}} \sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{k}}$. Or les Geometres ſavent * que toute quantité $\overline{B\sqrt{-1}}^{\,b}$ peut toujours ſe réduire à la forme $p + q\sqrt{-1}$, p & q etant réels. Donc l'ordonnée imaginaire répondante à z negative pourra etre exprimée dans ce cas par $p + q\sqrt{-1}$. 3°. Si quelques uns des termes de la ſerie demeurent réels en faiſant z negative, & que les autres deviennent imaginaires, on prendra $y = a z^{\frac{m}{n}} + c z^{\frac{t}{u}}$, $a z^{\frac{m}{n}}$ repreſentant tous les termes qui demeurent réels en faiſant z negative, & $c z^{\frac{t}{u}}$ ceux qui deviennent imaginaires. Or la valeur de $c z^{\frac{t}{u}}$ lorsque z eſt negative peut etre ſuppoſée $= e + f\sqrt{-1}$, (n. 2. preced.)

* Voyez l'art. 11. cy deſſous.

preced.) e & f etant réels. Donc lorsque z eſt negative, on $ay =$ $az^{\frac{m}{n}} + e + f\sqrt{-1}$, *c. a. d.* $p + q\sqrt{-1}$. *Ce Q. F. D.*

(Pour ne laiſſer aucun ſcrupule ſur cette demonſtration, nous remarquerons 1°. que la valeur de y en z, lorsque z eſt infiniment petite, eſt une ſuite infiniment convergente, dont les termes commencent, au moins à une certaine diſtance du 1er terme, à ne contenir que des puiſſances poſitives de z, & ſont par conſequent infiniment petits. 2°. que ſi on ſubſtitue à la place de y ſa valeur en z dans l'Equation de la courbe, plus la valeur ſubſtituée de y aura de termes, plus les puiſſances de z ſeront hautes dans les termes qui reſteront apres avoir effacé ceux qui ſe detruiſent, & qu'ainſi le reſultat de la ſubſtitution approchera d'autant plus d'etre nul, qu'on prendra plus de termes pour la valeur de y. 3°. qu'il en ſera de même ſi en faiſant z negative dans l'Equation de la courbe, on y ſubſtituë la valeur de y repondante à z negative; car plus cette valeur ſubſtituée aura de termes, plus les puiſſances de z ou de $-z$ ſeront hautes dans les termes reſtans apres la ſubſtitution. Or ſi on cherche une quantité $A + B\sqrt{-1} = (-z)^{\frac{n}{2m}}$, on trouvera facilement, & on prouvera cy aprés art. II. que A & B ſont des quantités réelles de l'ordre de $z^{\frac{n}{2m}}$. Donc ſi on ſubſtitue dans ces termes reſtans, à la place des puiſſances de $-z$, leurs valeurs $A + B\sqrt{-1}$, & qu'on partage le réſultat en deux quantités ſeparées, l'une toute réelle, l'autre multipliée par $\sqrt{-1}$, chacune de ces quantités ſera d'autant plus petite, & approchera d'autant plus de zero, que l'on prendra plus de termes pour la valeur de y. Donc la ſerie infinie qui repreſente la valeur de y repondante à $-z$, en la vraye valeur de y, quoiqu'imaginaire;

naire ; & il eſt viſible que $-z$ etant infiniment petite, non ſeulement on peut negliger tous les termes réels de la ſerie excepté un ſeul, mais qu'on peut auſſi en negliger tous les termes imaginaires excepté un ſeul. Car ſoit $(-z)^{\frac{n}{2m}} = A + B\sqrt{-1}$ & $(-z)^{\frac{n+p}{2m}} = a + b\sqrt{-1}$, a ſera infiniment petit par rapport à A & b par rapport à B. donc &c.

Au reste il eſt tres important d'obſerver à l'occaſion de cette démonſtration, que quand z eſt infiniment petite, il n'eſt pas toujours permis de ſuppoſer $y =$ à une ſeule puiſſance de z, pour déterminer la figure de la courbe a ſon origine. Car ſoit par exemple la courbe dont l'Equation eſt $y = z^2 + \sqrt{z^5}$; cette courbe doit avoir à ſon origine la forme repreſentée par la fig. 3, c'eſt a dire qu'elle doit avoir deux branches convexes du même côté de ſon axe, ſans aucunes autres branches réelles ; au lieu que ſi on ne prenoit que $y = z^2$ pour ſon Equation à l'origine, on trouveroit qu'elle reſſembleroit à la parabole ordinaire. Il eſt même quelquefois neceſſaire d'exprimer la valeur de y par 3 termes: par exemple ſoit $y = bz + z^2 \pm \sqrt{z^5}$, la courbe aura à ſon origine la forme qui eſt repreſentée dans la fig. 5, au lieu que ſi on negligeoit le terme z^2, on trouveroit qu'elle auroit à ſon origine la forme repreſentée fig. 6.)

III. Cor. I. Si on rapporte la courbe aux coordonnées AC, CT, je dis que l'ordonnée imaginaire, répondante à une abſciſſe AQ, infiniment peu plus grande que AC, pourra etre ſuppoſée $= p + q\sqrt{-1}$. Car en transportant l'axe TP en AC, on ne fait qu'augmenter de la quantité conſtante & réelle CT, toutes les ordonnées PM de la courbe, ſoit réelles, ſoit imaginaires. Or les

Fig. IV.

ordon-

ordonnées imaginaires, qui répondent à TP negative & infin. petite, peuvent etre ſuppoſées $= p + q \sqrt{-1}$ (art. II.). Donc les ordonnées imaginaires répondantes à AQ ſont $= CT + p + q\sqrt{-1}$. Donc &c.

IV. Cor. II. Donc ſi on augmente l'abſciſſe AC d'une quantité finie CQ, au moins jusqu'à un certain terme, l'ordonnée correſpondante pourra etre ſuppoſée $= p + q \sqrt{-1}$. Car s'il n'y avoit aucune valeur finie de CQ, telle que $p + p \sqrt{-1}$ pût exprimer l'ordonnée correſpondante, cette ordonnée ne pourroit pas non plus etre exprimée par $p + q \sqrt{-1}$, CQ etant infiniment petite. Ce qui eſt contre le Cor. precedent. D'ailleurs il eſt viſible par les obſervations qui terminent l'art. 2, que la valeur de y en z etant infiniment convergente lorsque z eſt infiniment petite, on peut ſuppoſer à z une valeur finie, telle que la valeur correſpondante de y ſoit auſſi exprimée par une ſerie tres convergente ; & ſi on imagine que cette ſerie entiére compoſée d'une infinité de termes ſoit ſubſtituée dans l'Equation de la courbe à la place de y, le réſultat de la ſubſtitution ſera infiniment petit ou zero, ſoit dans le cas de z poſitive, ſoit dans le cas de z negative. Or dans le cas de z negative, la ſerie qui exprime la valeur de y eſt compoſée de termes dont chacun eſt $A + B \sqrt{-1}$, A & B marquant des quantités réelles. Par conſéquent la ſerie entiére peut être ſuppoſée $= p + q\sqrt{-1}$. Il y a donc une valeur finie de $-z$, à laquelle il répond une valeur de y, egale à $p + q \sqrt{-1}$.

V. Cor. III. Je dis maintenant que, quelle que ſoit la quantité finie CQ dont on augmente l'abſciſſe AC, l'ordonnée imaginaire correſpondante pourra toujours être ſuppoſée egale à $p + q\sqrt{-1}$. Car ſuppoſons pour un moment qu'on ne puiſſe pas donner une telle valeur à l'ordonnée, & que CO ou α ſoit la plus grande valeur de CQ, qui donne l'ordonnée correſpondante $=$ à $p + q\sqrt{-1}$, c. à. d. que α ou CO ſoit la plus grande valeur de CQ qui donne p & q réels, il eſt evident (art. 2. 3. 4.) qu'en augmentant α d'une quantité infiniment petite, la valeur correſpondante de p pourra etre ſuppoſée $t + i\sqrt{-1}$, & celle de $q = b + \delta\sqrt{-1}$, t, i, b, δ, etant réels. Car la valeur réelle de p & de q en α, & en general la valeur de p & de q en CQ, eſt exprimée par deux Equations, qu'on peut ſuppoſer etre celles de deux courbes, qui ont CQ pour abſciſſe commune, & pour ordonnées p & q, (on aura ces Equations en ſubſtituant d'abord $p + q\sqrt{-1}$ au lieu de y dans l'Equation de la courbe, & enſuite égalant ſeparement à zero, la partie toute réelle de la transformée, & la partie dont les termes contiennent $\sqrt{-1}$. Aprés avoir diviſé cette dernière par $\sqrt{-1}$, on aura deux Equations où les quantités CQ, p, q, ſe trouveront melées, même ſi on veut avec leurs differences, ce qui arrivera lorsque la courbe TM ne ſera pas Geometrique; & on pourra par les methodes connües, changer ces Equations en deux autres, donc l'une contienne CQ, & p, l'autre CQ, & q, & de plus leurs differences, ſi cela eſt neceſſaire.) Donc en augmentant α d'une quantité infiniment petite, & par conſequent auſſi (art. 4.) d'une quantité finie, l'ordonnée correſpondante pourra etre ſuppoſée $t + i\sqrt{-1} + (\beta + \delta\sqrt{-1}).\sqrt{-1} = t - \delta + (i + \beta)\sqrt{-1}$, c. à. d. qu'elle pourra etre repreſentée par une quantité $e + f\sqrt{-1}$ dans laquelle e & f ſoient réels. Donc α n'eſt pas la plus petite valeur de CQ qui donne l'ordonnée correſpondante $=$ à $p + q\sqrt{-1}$; ce qui eſt contre l'hypotheſe. Donc &c.

VI. *Pro-*

VI. *Propos. II. Soit un multinome quelconque* $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \ldots + fx + g$, *tel qu'il n'y ait aucune quantité réelle qui etant substituée à la place de* x, *y fasse evanouir tous les termes, je dis qu'il y aura toujours une quantité* $p + q\sqrt{-1}$ *à substituer à la place de* x, *& qui rendra ce multinome egal à zero.*

Car 1°. on peut toujours changer le dernier terme g, sans toucher aux autres, en un terme tel, qu'il y aura une quantité réelle, à substituer à la place de x pour faire evanouïr tous les termes; en effet substituons dans le multinome, à la place de x, une quantité réelle b, & soit $h^m + ah^{m-1} + bh^{m-2} \ldots + fh = A$, il est evident que substituant b à la place de x dans $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \ldots + fx - A$, tout se detruira; or ce multinome ne differe du proposé que par son dernier terme.

2°. Soit tirée une droite BAD sur laquelle on prenne depuis le point A des parties AB & AD qui representent les termes $-A$ & g, & imaginons qu'au point B on eleve perpendiculairement la ligne BO qui represente la quantité réelle b, & qu'à tous les points A, C, D, &c. on eleve des lignes, réelles ou imaginaires, qui representent les quantités réelles ou imaginaires dont la substitution à la place de x fait evanouïr tous les termes du multinome, en donnant successivement à son dernier terme toutes les valeurs possibles depuis — AB ou — A jusqu'à AC ou g; il est evident que les extremités O, Q, T. &c. des ordonnées réelles seront à une courbe OQTS, & que l'ordonnée imaginaire répondante à AD pourra toujours etre supposée $= p + q\sqrt{-1}$. (art. 5.) Donc &c. *Ce Q. F. D.* *Fig.* VII.

VII. Co-

VII. Coroll. I. Donc le multinome proposé pourra etre divisé par $x-p-q\sqrt{-1}$. Car en faisant la division il est toujours possible de parvenir à un reste r dans lequel il n'y ait plus de x; & si on nomme Q le quotient, il est evident que $(x-p-q\sqrt{-1})\times Q+r$ sera egal & identique au multinome proposé. Donc substituant dans cette quantité $p+q\sqrt{-1}$ au lieu de x, le resultat doit etre $=o$. Donc $r=o$. Donc la division se fait sans reste.

VIII. Coroll. II. Le même multinome pourra aussi se diviser par $x-p+q\sqrt{-1}$. La difficulté se reduit à faire voir que si $p+q\sqrt{-1}$ substitué à la place de x fait evanouïr tous les termes du multinome, il en sera de même de $p-q\sqrt{-1}$. Pour le démontrer je remarque qu'en substituant $p+q\sqrt{-1}$ au lieu de x, & faisant le résultat $=o$, on a necessairement deux Equations, dont l'une est formée des termes tout réels, & l'autre des termes imaginaires qui contiennent $\sqrt{-1}$; que dans la partie formée de termes tout réels, il n'y a que des puissances paires de q; que dans la partie formée de termes imaginaires, il n'y a que des puissances impaires de q, & que cette partie ou Equation contient $q\sqrt{-1}$ à tous ses termes. Donc en la divisant par $q\sqrt{-1}$, elle ne contiendra plus que des puissances paires de q ainsi que l'autre. Donc chacune de ces Equations ne souffrira aucun changement, si on y substituë $-q$ pour q. Donc si $p+q\sqrt{-1}$ substitué à la place de x fait evanouir tous les termes du multinome, il en sera de même de $p-q\sqrt{-1}$.

IX. *Propos. III. Les mêmes choses etant supposées que dans l'art. 6. je-dis que le multinome pourra toujours se diviser en facteurs*

$xx + hx + i$, $xx + lx + m$, *&c. dont les coefficiens soient réels.*

Car puisque ce multinome peut se diviser par $x - p - q\sqrt{-1}$ & $x - p + q\sqrt{-1}$ (art. 7. & 8.) il pourra aussi se diviser par $xx - 2px + pp + qq$ qui est un facteur tout réel ; & faisant sur le quotient qui en proviendra les mêmes raisonnemens qu'on a faits, art. 6. 7. 8, sur le multinome, on prouvera de même qu'il peut aussi se diviser par un facteur trinome réel, & ainsi de suite. Donc &c. *Ce Q. f. D.*

REMARQUE I^ere.

X. Il est à remarquer que dans les demonstrations precedentes, on n'a point supposé que la racine imaginaire de multinome, eût ou pût avoir une expression imaginaire, avant de la reduire à $p + q\sqrt{-1}$; & nos démonstrations n'en sont par là que plus generales. Mais on pourra toujours avoir les quantités réelles p & q au moins par une construction geometrique, puisque l'on a deux Equations qui renferment p & q.

D'ailleurs, sans s'embarasser si le multinome a des racines imaginaires, on peut se contenter de le diviser par $xx + hx + i$, & supposant le reste de la division egal à zero, on aura deux Equations en h & en i, qui auront toujours au moins plusieurs racines réelles.

REMARQUE II^de.

XI. Si on a l'expression imaginaire quelconque de la racine du multinome, ou en general d'une quantité quelconque, on pourra toujours trouver une quantité $p + q\sqrt{-1}$ à laquelle cette expres-

sion

ſion ſoit égale, & aſſigner les quantités p & q, ou par la ſeule diviſion des arcs de cercle en parties égales, ou par cette diviſion & par les logarithmes & la quadrature du cercle, lorsqu'il ſe rencontrera dans l'expreſſion donnée des expoſans imaginaires. J'ai démontré cette propoſition dans l'art. 79 de ma diſſertation ſur les vents, à l'occaſion d'un Probleme pour la ſolution duquel elle m'etoit neceſſaire; j'y ai fait voir 1°. que $\frac{a + b\sqrt{-1}}{g + h\sqrt{-1}} = A + B\sqrt{-1}$, en prenant A & B réels, ce qui eſt evident puisque $\frac{a + b\sqrt{-1}}{g + h\sqrt{-1}} =$

$$\frac{(a + b\sqrt{-1}) \times (g - h\sqrt{-1})}{(g + h\sqrt{-1}) \times (g - h\sqrt{-1})} = \frac{ag + bh}{aa + hh} + \frac{bg - ah}{aa + hh}\sqrt{-1}$$

2°. que $(a + b\sqrt{-1})^{g + h\sqrt{-1}}$ etoit $= A + B\sqrt{-1}$, en prenant B & A pour les ſinus & coſinus d'un angle dont le rayon eſt $\sqrt{(aa + bb)^g} \times c^{\frac{-h\int adb - bda}{2(aa+bb)}}$ & dont la valeur eſt b Log. $\sqrt{(aa + bb)} + g\int\frac{adb - bda}{aa + bb}$; où l'on remarquera que $\int\frac{adb - bda}{aa + bb}$ eſt l'angle dont la tangente eſt $\frac{b}{a}$. 3°. Par ces deux Propoſitions il eſt facile de réduire toute quantité imaginaire à $A + B\sqrt{-1}$, en faiſant evanouïr ſucceſſivement toutes les expreſſions imaginaires qu'elle renfermera, excepté une ſeule; qui doit même s'evanouïr ſi l'expreſſion propoſée, qui renferme des imaginaires, marque cependant une quantité réelle, comme dans le cas irreductible du 3e. degré.

Ainſi

Tab. V. ad pag. 250.

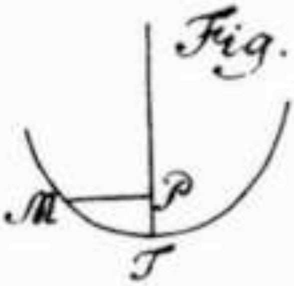


Fig. 1.

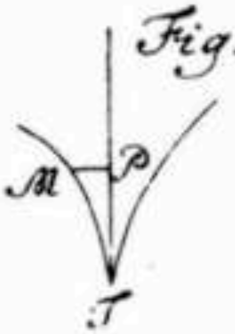
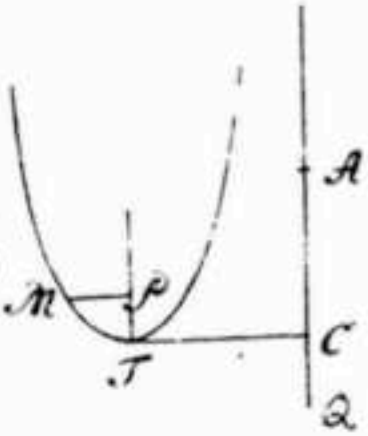


Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.



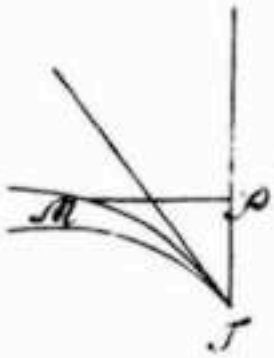


Fig. 5.

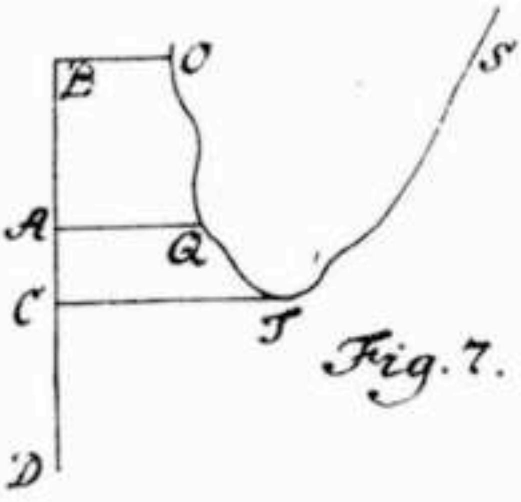


Fig. 7.

Fig. 6.