

DEDEKIND : un fondement purement arithmétique.

Préface

Les considérations qui font l'objet de ce court essai datent de l'automne 1858. Je me trouvais alors, en tant que professeur à l'École polytechnique fédérale de Zurich, obligé pour la première fois d'exposer les éléments du calcul différentiel et je ressentis à cette occasion, plus vivement encore qu'auparavant, combien l'arithmétique manque d'un fondement véritablement scientifique. À propos du concept d'une grandeur variable qui tend vers une valeur limite fixe et notamment pour prouver le théorème que toute grandeur qui croît constamment, mais non au-delà de toute limite, doit nécessairement tendre vers une valeur limite, je cherchai refuge dans les évidences géométriques. Maintenant encore, admettre ainsi l'intuition géométrique dans le premier enseignement du calcul différentiel me semble, du point de vue didactique, extraordinairement utile, indispensable même, si l'on ne veut pas perdre trop de temps. Mais, personne ne le niera, cette façon d'introduire au calcul différentiel, ne peut aucunement prétendre avoir un caractère scientifique. Mon sentiment d'insatisfaction était alors si puissant que je pris la ferme décision de réfléchir jusqu'à ce que j'aie trouvé un fondement purement arithmétique et parfaitement rigoureux des principes de l'analyse infinitésimale.

■ Dedekind expose alors sa conception : □

Propriétés des nombres rationnels

Le développement de l'arithmétique des nombres rationnels est, à vrai dire, supposé connu ici, mais il me paraît bon de souligner, sans les discuter, quelques points principaux, afin seulement de caractériser d'emblée le point de vue que j'adopterai dans le chapitre suivant.

■ Dedekind décrit l'ensemble des nombres rationnels, qu'il appelle le système R (mais que nous désignerons par \mathbb{Q} suivant l'usage actuel; nous modifierons de même d'autres notations du texte). Il indique les quatre opérations et surtout la relation d'ordre. □

Mais pour notre but immédiat, une autre propriété du système \mathbb{Q} est encore plus importante; on peut l'exprimer ainsi: le système \mathbb{Q} constitue un domaine ordonné, unidimensionnel, infini dans deux directions opposées.

Comparaison des nombres rationnels avec les points d'une droite

Les propriétés des nombres rationnels que l'on vient de souligner rappellent les relations réciproques de position qui existent entre les points d'une droite D . Si l'on différencie les deux directions opposées qui existent sur elle en «droite» et «gauche», et si p, q sont deux points différents, alors ou bien p est à droite de q , et en même temps q est à gauche de p , ou bien inversement q est à droite de p , et en même temps p est à gauche de q . Un troisième cas est impossible si p et q sont vraiment des points différents. Concernant cette différence de position, on a les lois suivantes:

I. Si p est à droite de q , et si q est à son tour à droite de r , p est aussi à droite de r , et l'on dit que q est situé entre les points p et r .

II. Si p, r sont deux points différents, il existe toujours une infinité de points q situés entre p et r .

III. Si p est un point déterminé de D , tous les points situés sur D se subdivisent en deux classes P_1, P_2 , dont chacune contient une infinité d'individus; la première classe P_1 embrasse tous les points p_1 situés à gauche de p , et la seconde classe P_2 comprend tous les points p_2 situés à droite de p ; le point p lui-même peut au choix être rangé dans la première ou la seconde classe. Dans tous les cas, la division de la droite D en deux classes ou portions P_1, P_2 est telle que tout point de la première classe P_1 est à gauche de tout point de la seconde classe P_2 .

On sait que cette analogie existant entre les nombres rationnels et les points d'une droite devient une véritable corrélation quand on choisit sur la droite un certain point O , origine ou point-zéro, et une certaine unité de longueur pour mesurer les distances. À l'aide de cette dernière, on peut construire pour tout nombre rationnel a une longueur correspondante et si l'on reporte celle-ci sur la droite à partir du point O vers la droite ou vers la gauche selon que a est positif ou négatif, on obtient une extrémité déterminée p , qui peut être désignée comme le point correspondant au nombre a ; au nombre rationnel zéro correspond le point O . De cette manière, à tout nombre rationnel a , c'est-à-dire à tout individu dans \mathbb{Q} correspond un point p et un seul, c'est-à-dire un individu dans D . Si par exemple aux deux nombres a, b correspondent les deux points p, q et si $a < b$, alors p est à gauche de q . Aux lois I, II, III du paragraphe précédent correspondent parfaitement les lois I, II, III de celui-ci.

Continuité de la droite.

Mais il est un fait de la plus grande importance: c'est qu'il existe sur la droite D une infinité de points ne correspondant à aucun nombre rationnel. Si en effet le point p correspond au nombre rationnel a , on sait que la longueur Op est commensurable avec l'unité de longueur invariable utilisée pour la construction, c'est-à-dire qu'il existe une troisième longueur, que l'on appelle une mesure commune et dont ces deux longueurs sont des multiples entiers. Mais les Grecs de l'Antiquité ont déjà su et montré qu'il existe des longueurs incommensurables avec une unité de longueur donnée, par exemple la diagonale du carré dont le côté est l'unité de longueur. Si l'on reporte une telle longueur sur la droite à partir du point O , on obtient une extrémité qui ne correspond à aucun nombre rationnel. Comme on peut, en outre, facilement démontrer qu'il existe une infinité de longueurs incommensurables avec l'unité de longueur, on peut affirmer: la droite D est infiniment plus riche en individus ponctuels que le domaine \mathbb{Q} des nombres rationnels n'est riche en individus numériques.

Si maintenant l'on veut, et c'est bien ce que l'on souhaite, suivre ainsi arithmétiquement tous les phénomènes de la droite, les nombres rationnels n'y suffisent pas et il devient alors absolument indispensable de raffiner de façon essentielle l'instrument \mathbb{Q} construit par la création des nombres rationnels, en créant de nouveaux nombres tels que le domaine des nombres devienne aussi complet, ou nous dirons tout de suite aussi «continu», que la droite. [...]

La comparaison faite ci-dessus entre le domaine \mathbb{Q} des nombres rationnels et une droite a induit à reconnaître que le premier est lacunaire, incomplet ou discontinu, tandis que la droite doit être dite complète, non lacunaire ou continue. Mais en quoi consiste en fait cette continuité?

Tout doit être contenu dans la réponse donnée à cette question, et elle seule fournit un fondement scientifique aux recherches portant sur tous les domaines continus. On n'obtient rien bien sûr par de vagues discours sur la connexion ininterrompue existant dans les plus infimes parties; il s'agit d'indiquer une caractéristique de la continuité, utilisable comme base de déductions effectives. J'y ai réfléchi longtemps en vain, mais finalement j'ai trouvé ce que je cherchais. Les avis sur cette découverte seront peut-être partagés; je crois cependant que la plupart des gens en trouveront le contenu très trivial. Il consiste en ceci. Au paragraphe précédent, on attire l'attention sur le fait que tout point p de la droite opère une division de celle-ci en deux portions telles que tout point d'une portion est à gauche de tout point de l'autre. Je trouve alors l'essence de la continuité dans la réciproque, c'est-à-dire dans le principe suivant:

«Si tous les points de la droite sont répartis en deux classes, telles que tout point de la première classe soit situé à gauche de tout point de la seconde

classe, il existe un point et un seul qui opère cette partition de tous les points en deux classes, cette découpe de la droite en deux portions.»

Création des nombres irrationnels.

Les derniers mots indiquent déjà suffisamment de quelle façon le domaine \mathbb{Q} des nombres rationnels, non continu, doit être complété en un domaine continu. Dans le paragraphe 1, on souligne (III) que tout nombre rationnel opère une division du système \mathbb{Q} en deux classes A_1, A_2 telle que tout nombre a_1 de la première classe A_1 soit plus petit que tout nombre a_2 de la seconde classe A_2 ; le nombre a est soit le plus grand nombre de la classe A_1 soit le plus petit nombre de la classe A_2 . Soit donnée maintenant une certaine partition du système \mathbb{Q} en deux classes A_1, A_2 ayant pour seule propriété caractéristique que tout nombre a_1 dans A_1 est plus petit que tout nombre a_2 dans A_2 . Nous nommerons par souci de brièveté une telle partition une «coupure», que nous désignerons par (A_1, A_2) . Nous pouvons dire alors que tout nombre rationnel a «opère» une ou, à vrai dire, deux sections que nous ne considérerons cependant pas comme essentiellement différentes; cette coupure a d'autre part la propriété suivante: ou bien il existe parmi les nombres de la première classe un nombre qui en est le plus grand, ou bien, il existe parmi les nombres de la seconde classe un nombre qui en est le plus petit. Et réciproquement, si une coupure a aussi cette propriété, elle est opérée par ce nombre rationnel qui est le plus grand ou le plus petit.

Mais on se persuadera aisément qu'il existe une infinité de coupures qui ne sont pas opérées par des nombres rationnels. L'exemple le plus immédiat en est celui-ci.

Soit n un nombre entier positif, différent du carré d'un nombre entier; il existe alors un nombre entier positif m tel que :

$$m^2 < n < (m + 1)^2.$$

Si l'on range dans la seconde classe A_2 tout nombre rationnel positif a_2 dont le carré est $> n$, et dans la première classe A_1 , tous les autres rationnels a_1 , alors cette répartition constitue une coupure (A_1, A_2) , c'est-à-dire que tout nombre a_1 est plus petit que tout nombre a_2 . Si en effet $a_1 = 0$ ou est négatif, alors a_1 est déjà pour cette seule raison plus petit que tout nombre a_2 , car celui-ci est par définition positif; mais si a_1 est positif, son carré est $\leq n$, et par suite a_1 est plus petit que tout nombre a_2 dont le carré est $> n$.

■ Mais cette coupure n'est pas un nombre rationnel. Pour établir ce résultat, on doit montrer d'abord qu'il n'existe pas de nombre rationnel dont le carré soit égal à n . C'est ce que fait Dedekind, à l'aide d'une suite de calculs élémentaires; il en déduit que cela prouve son propos. □

Dans cette propriété que toutes les coupures ne sont pas opérées par des nombres rationnels, consiste le caractère incomplet ou non continu du domaine \mathbb{Q} de tous les nombres rationnels.

Chaque fois que nous sommes en présence d'une coupure (A_1, A_2) non produite par un nombre rationnel, nous créons un nombre nouveau, *irrationnel*, x , que nous considérons comme parfaitement défini par cette coupure (A_1, A_2) ; nous dirons que le nombre x correspond à cette coupure ou qu'il opère cette coupure. Donc, à partir de maintenant, à toute coupure déterminée correspond un nombre déterminé et un seul, rationnel ou irrationnel, et nous considérons toujours deux nombres comme *différents* ou *inégaux* s'ils correspondent à deux coupures essentiellement différentes.

Continuité et nombres irrationnels, 1872.