R. DESCARTES

LA GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

Des probleſmes qu'on peut conſtruire ſans y employer que des cercles & des lignes droites.

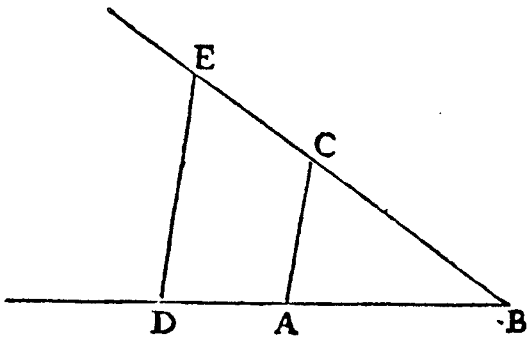
Tous les Probleſmes de Geometrie ſe peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'eſt beſoin par aprés que de connoiſtre la longeur de quelques lignes droites, pour les conſtruire.

Et comme toute l'Arithmetique n'eſt compoſée, que de quatre ou cinq operations, qui ſont l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, la Diuiſion, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne eſpece de Diuiſion : Ainſi n'at'on autre choſe a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a eſtre connuës, que leur en adiouſter d'autres, ou en oſter, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement eſtre priſe a diſcretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit à l'vne de ces deux, comme l'autre eſt a l'vnité, ce qui eſt le meſme que la Multiplication; oubien en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit a l'vne de ces deux, comme l'vnité eſt

Commẽt le calcul d'Arithmetique ſe rapporte aux operations de Geometrie.

eſt a l'autre, ce qui eſt le meſme que la Diuiſion; ou enfin trouuer vne, ou deux, ou pluſieurs moyennes proportionnelles entre l'vnité, & quelque autre ligne; ce qui eſt le meſme que tirer la racine quarrée, on cubique, &c. Et ie ne craindray pas d'introduire ces termes d'Arithmetique en la Geometrie, affin de me rendre plus intelligibile.

La Multiplication.

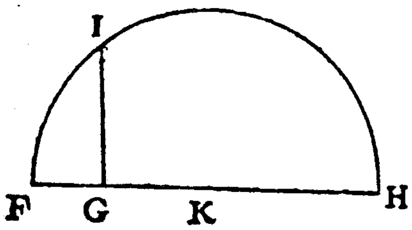


Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E eſt le produit de cete Multiplication.

La Diviſion.

Oubien s'il faut diuiſer B E par B D, ayant ioint les poins E & D, ie tire A C parallele a D E, & B C eſt le produit de cete diuiſion.

l'Extraction de la racine quarrée.



Ou s'il faut tirer la racine quarrée de G H, ie luy adiouſte en ligne droite F G, qui eſt l'vnité, & diuiſant F H en deux parties eſgales au point K, du centre K ie tire le cercle F I H, puis eſleuant du point G vne ligne droite iuſques à I, à angles droits ſur F H, c'eſt G I la racine cherchée. Ie ne dis rien icy de la racine cubique, ny des autres, à cauſe que i'en parleray plus commodement cy aprés.

Commẽt on peut

Mais ſouuent on n'a pas beſoin de tracer ainſi ces ligne gnes ſur le papier, & il ſuffiſt de les deſigner par quelques lettres, chaſcune par vne ſeule. Comme pour adiouſter la ligne B D a G H, ie nomme l'vne a & l'autre b, & eſcris $a + b$; Et $a - b$, pour ſouſtraire b d'a; Et ab, pour les multiplier l'vne par l'autre; Et $\frac{a}{b}$, pour diuiſer a par b; Et aa, ou a^2, pour multiplier a par ſoy meſme; Et a^3, pour le multiplier encore vne fois par a, & ainſi a l'infini; Et $\sqrt{a^2 + b^2}$, pour tirer la racine quarrée d'$a^2 + b^2$; Et $\sqrt{C.\, a^3 - b^3 + abb}$, pour tirer la racine cubique d'$a^3 - b^3 + abb$, & ainſi des autres. *Vſer de chiffres en Geometrie.*

Où il eſt a remarquer que par a^2 ou b^3 ou ſemblables, ie ne conçoy ordinairement que des lignes toutes ſimples, encore que pour me ſeruir des noms vſités en l'Algebre, ie les nomme des quarrés ou des cubes, &c.

Il eſt auſſy a remarquer que toutes les parties d'vne meſme ligne, ſe doiuent ordinairement exprimer par autant de dimenſions l'vne que l'autre, lorſque l'vnité n'eſt point determinée en la queſtion, comme icy a^3 en contient autant qu'abb ou b^3 dont ſe compoſe la ligne que i'ay nommée $\sqrt{C.\, a^3 - b^3 + abb}$: mais que ce n'eſt pas de meſme lorſque l'vnité eſt determinée, a cauſe qu'elle peut eſtre ſouſentendue par tout ou il y a trop ou trop peu de dimenſions: comme s'il faut tirer la racine cubique de $aabb - b$, il faut penſer que la quantité $aabb$ eſt diuiſée vne fois par l'vnité, & que l'autre quantité b eſt multipliée deux fois par la meſme.

Au reſte affin de ne pas manquer a ſe ſouuenir des noms de ces lignes, il en faut touſiours faire vn regiſtre ſeparé, à meſure qu'on les poſe ou qu'on les change, eſcriuant par exemple.

A B ∞ 1, c'eſt a dire, A B eſgal à 1.

G H ∞ *a*

B D ∞ *b*, &c.

Commét il faut venir aux Equatiõs qui ſeruent a reſoudre les problesmes.

Ainſi voulant reſoudre quelque probleſme, on doit d'abord le conſiderer comme deſia fait, & donner des noms a toutes les lignes, qui ſemblent neceſſaires pour le conſtruire, auſſy bien a celles qui ſont inconnuës, qu'aux autres. Puis ſans conſiderer aucune difference entre ces lignes connuës, & inconnuës, on doit parcourir la difficulté, ſelon l'ordre qui monſtre le plus naturellement de tous en qu'elle ſorte elles dependent mutuellement les vnes des autres, iuſques a ce qu'on ait trouué moyen d'exprimer vne meſme quantité en deux façons: ce qui ſe nomme vne Equation; car les termes de l'vne de ces deux façons ſont eſgaux a ceux de l'autre. Et on doit trouuer autant de telles Equations, qu'on a ſuppoſé de lignes, qui eſtoient inconnuës. Oubien s'il ne s'en trouue pas tant, & que nonobſtant on n'omette rien de ce qui eſt deſiré en la queſtion, cela teſmoigne qu'elle n'eſt pas entierement determinée. Et lors on peut prendre a diſcretion des lignes connuës, pour toutes les inconnuës auſquelles ne correſpond aucune Equation. Aprés cela s'il en reſte encore pluſieurs, il ſe faut ſeruir par ordre de chaſcune des Equations qui reſtent auſſy, ſoit en la conſiderant toute ſeule, ſoit en la comparant auec les autres, pour expliquer chaſcune de ces lignes inconnuës; & faire ainſi

ainſi en les demeſlant, qu'il n'en demeure qu'vne ſeule, eſgale a quelque autre, qui ſoit connuë, oubien dont le quarré, ou le cube, ou le quarré de quarré, ou le ſurſolide, ou le quarré de cube, &c. ſoit eſgal a ce, qui ſe produiſt par l'addition, ou ſouſtraction de deux ou pluſieurs autres quantités, dont l'vne ſoit connuë, & les autres ſoient compoſées de quelques moyennes proportionnelles entre l'vnité, & ce quarré, ou cube, ou quarré de quarré, &c. multipliées par d'autres connuës. Ce que i'eſcris en cete ſorte.

$z \infty b.$ ou

$z^2 \infty - az + bb.$ ou

$z^3 \infty + az^2 + bbz - c^3.$ ou

$z^4 \infty az^3 - c^3z + d^4.$ &c.

C'eſt a dire, z, que ie prens pour la quantité inconnuë, eſt eſgalé a b, ou le quarré de z eſt eſgal au quarré de b moins a multiplié par z. ou le cube de z eſt eſgal à a multiplié par le quarre de z plus le quarré de b multiplié par z moins le cube de c. & ainſi des autres.

Et on peut touſiours reduire ainſi toutes les quantités inconnuës à vne ſeule, lorſque le Probleſme ſe peut conſtruire par des cercles & des lignes droites, ou auſſy par des ſections coniques, ou meſme par quelque autre ligne qui ne ſoit que d'vn ou deux degrés plus compoſée. Mais ie ne m'areſte point a expliquer cecy plus en detail, a cauſe que ie vous oſterois le plaiſir de l'apprendre de vous meſme, & l'vtilité de cultiuer voſtre eſprit en vous y exerceant, qui eſt a mon auis la principale, qu'on puiſſe

 tirer

tirer de cete ſcience. Auſſy que ie n y remarque rien de ſi difficile, que ceux qui ſeront vn peu verſés en la Geometrie commune, & en l'Algebre, & qui prendront garde a tout ce qui eſt en ce traité, ne puiſſent trouuer.

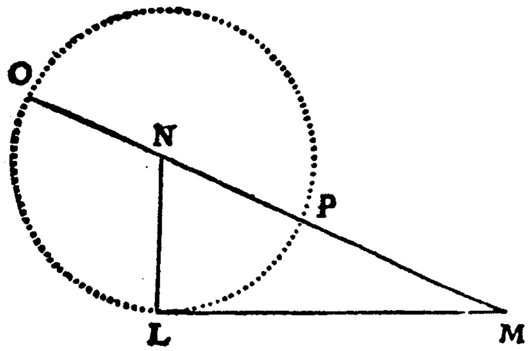
C'eſt pourquoy ie me contenteray icy de vous auertir, que pourvû qu'en demeſlant ces Equations on ne manque point a ſe ſeruir de toutes les diuiſions, qui ſeront poſſibles, on aura infalliblement les plus ſimples termes, auſquels la queſtion puiſſe eſtre reduite.

Quels ſont les probleſmes plans

Et que ſi elle peut eſtre reſolue par la Geometrie ordinaire, c'eſt a dire, en ne ſe ſeruant que de lignes droites & circulaires tracées ſur vne ſuperficie plate, lorſque la derniere Equation aura eſté entierement démeſlée, il n'y reſtera tout au plus qu'vn quarré inconnu, eſgal a ce qui ſe produiſt de l'Addition, ou ſouſtraction de ſa racine multipliée par quelque quantité connue, & de quelque autre quantité auſſy connue

Comment ils ſe reſoluent.

Et lors cete racine, ou ligne inconnue ſe trouue ayſement. Car ſi i'ay par exemple



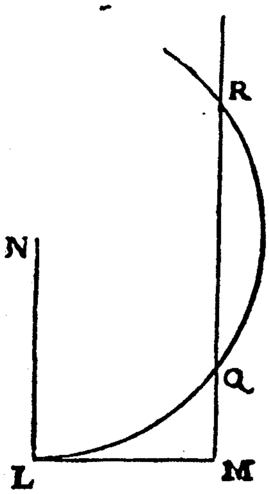
$$z^2 \propto az + bb$$

ie fais le triangle rectangle N L M, dont le coſté L M eſt eſgal à b racine quarrée de la quantité connue bb, & l'autre L N eſt $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre quantité connue, qui eſtoit multipliée par z que ie ſuppoſe eſtre la ligne inconnue. puis prolongeant M N la baze de ce triangle,

angle, iusques a O, en sorte qu'N O soit esgale a N L, la toute O M est z la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cete sorte

$$z \infty \tfrac{1}{2} a + \sqrt{\tfrac{1}{4} aa + bb}.$$

Que si iay $yy \infty -- ay + bb$, & qu'y soit la quantité qu'il faut trouuer, ie fais le mesme triangle rectangle N L M, & de sa baze M N i'oste N P esgale a N L, & le reste P M est y la racine cherchée. De façon que iay $y \infty -- \tfrac{1}{2} a + \sqrt{\tfrac{1}{4} aa + bb}$. Et tout de mesme si i'auois $x^4 \infty -- a x^2 + b^2$. P M seroit x^2. & i'aurois $x \infty \sqrt{-- \tfrac{1}{2} a + \sqrt{\tfrac{1}{4} aa + bb}}$: & ainsi des autres.



Enfin si i'ay

$$z^2 \infty az -- bb:$$

ie fais N L esgale à $\tfrac{1}{2} a$, & L M esgale à b cōme deuāt, puis, au lieu de ioindre les poins M N, ie tire M Q R parallele a L N. & du centre N par L ayant descrit vn cercle qui la couppe aux poins Q & R, la ligne cherchée z est M Q, oubiē M R, car en ce cas elle s'exprime en deux façons, a sçauoir $z \infty \tfrac{1}{2} a + \sqrt{\tfrac{1}{4} aa -- bb}$, & $z \infty \tfrac{1}{2} a -- \sqrt{\tfrac{1}{4} aa -- bb}$.

Et si le cercle, qui ayant son centre au point N, passe par le point L, ne couppe ny ne touche la ligne droite M Q R, il n'y a aucune racine en l'Equation, de façon qu'on peut assurer que la construction du problesme proposé est impossible.

Au

Au reste ces mesmes racines se peuuent trouuer par vne infinité d'autres moyens , & i'ay seulement veulu mettre ceux cy, comme fort simples, affin de faire voir qu'on peut construire tous les Problesmes de la Geometrie ordinaire, sans faire autre chose que le peu qui est compris dans les quatre figures que i'ay expliquées. Ce que ie ne croy pas que les anciens ayent remarqué. car autrement ils n'eussent pas pris la peine d'en escrire tant de gros liures, ou le seul ordre de leurs propositions nous fait connoistre qu'ils n'ont point eu la vraye methode pour les trouuer toutes, mais qu'ils ont seulement ramassé celles qu'ils ont rencontrées.

[...]