LIVRE TROISIÈME

DE LA CONSTRUCTION DES PROBLÈMES QUI SONT SOLIDES OU PLUS QUE SOLIDES.

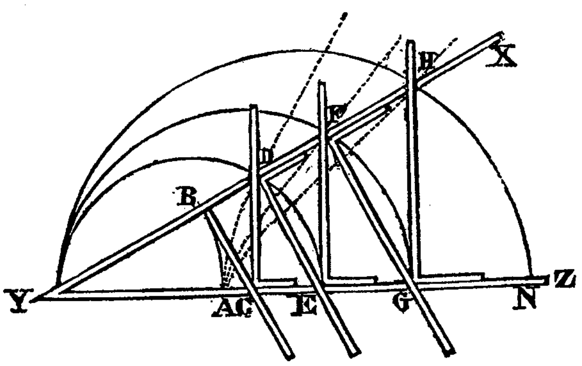
De quelles lignes courbes on peut se servir en la construction de chaque problème.

Encore que toutes les lignes courbes qui peuvent être décrites par quelque mouvement régulier doivent être reçues en la géométrie, ce n'est pas à dire qu'il soit permis de se servir indifféremment de la première qui se rencontre pour la construction de chaque problème, mais il faut avoir soin de choisir toujours la plus simple par laquelle il soit possible de le résoudre. Et même il est à remarquer que par les plus simples on ne doit pas seulement entendre celles qui peuvent le plus aisément être décrites, ni celles qui rendent la construction ou la démonstration du problème proposé plus facile, mais principalement celles qui sont du plus simple genre qui puisse servir à déterminer la quantité qui est cherchée.

Exemple touchant l'invention de plusieurs moyennes proportionnelles.

Comme, par exemple, je ne crois pas qu'il y ait aucune façon plus facile

Fig. 25.



pour trouver autant de moyennes proportionnelles qu'on veut, ni dont la démonstration soit plus évidente, que d'y employer les lignes courbes qui se décrivent par l'instrument XYZ *(fig. 25)* ci-dessus expliqué. Car, voulant trouver deux moyennes proportionnelles entre YA et YE, il ne faut que décrire un cercle dont le diamètre soit YE, et pourceque ce cercle coupe la courbe AD au point D, YD est l'une des moyennes proportionnelles cherchées, dont la démonstration se voit à l'œil par la seule application de cet instrument sur la ligne YD; car, comme YA ou YB, qui lui est égale, est à YC, ainsi YC est à YD, et YD à YE.

Tout de même pour trouver quatre moyennes proportionnelles entre YA et YG, ou pour en trouver six entre YA et YN, il ne faut que tracer le cercle YFG qui, coupant AF au point F, détermine la ligne droite YF qui est l'une de ces quatre proportionnelles; ou YHN qui, coupant AH au point H, détermine YH l'une des six; et ainsi des autres.

Mais pourceque la ligne courbe AD est du second genre, et qu'on peut trouver deux moyennes proportionnelles par les sections coniques qui sont du premier; et aussi pourcequ'on peut trouver quatre ou six moyennes proportionnelles par des lignes qui ne sont pas de genres si composés que sont AF et AH, ce seroit une faute en géométrie que de les y employer. Et c'est une faute aussi, d'autre côté, de se travailler inutilement à vouloir construire quelque problème par un genre de lignes plus simple que sa nature ne permet.

De la nature des équations

Or, afin que je puisse ici donner quelques règles pour éviter l'une et l'autre de ces deux fautes, il faut que je die quelque chose en général de la nature des équations, c'est-à-dire des sommes composées de plusieurs termes partie connus et partie inconnus dont les uns sont égaux aux autres, ou plutôt qui, considérés tous ensemble, sont égaux à rien: car ce sera souvent le meilleur de les considérer en cette sorte.

Combien il peut y avoir de racines en chaque équation.

Sachez donc qu'en chaque équation, autant que la quantité inconnue a de dimensions, autant peut-il y avoir de diverses racines, c'est-à-dire de valeurs de cette quantité; car, par exemple, si on suppose x égale à 2, ou bien $x - 2$ égal à rien; et derechef $x = 3$, ou bien $x - 3 = 0$; en multipliant ces deux équations

$$x - 2 = 0, \quad \text{et} \quad x - 3 = 0,$$

l'une par l'autre, on aura

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

ou bien

$$x^2 = 5x - 6,$$

qui est une équation en laquelle la quantité x vaut 2 et tout ensemble vaut 3. Que si derechef on fait

$$x - 4 = 0,$$

et qu'on multiplie cette somme par

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

on aura

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0,$$

qui est une autre équation en laquelle x, ayant trois dimensions, a aussi trois valeurs, qui sont 2, 3 et 4.

Quelles sont les fausses racines.

Mais souvent il arrive que quelques unes de ces racines sont fausses ou moindres que rien; comme si on suppose que x désigne aussi le défaut d'une quantité qui soit 5, on a

$$x + 5 = 0,$$

qui, étant multiplié par

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0,$$

fait

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$

pour une équation en laquelle il y a quatre racines, à savoir trois vraies qui sont 2, 3, 4, et une fausse qui est 5.

Comment on peut diminuer le nombre des dimensions d'une équation lorsqu'on connoît quelqu'une de ses racines.

Et on voit évidemment de ceci que la somme d'une équation qui contient plusieurs racines peut toujours être divisée par un binôme composé de la quantité inconnue moins la valeur de l'une des vraies racines, laquelle que ce soit, ou plus la valeur de l'une des fausses; au moyen de quoi on diminue d'autant ses dimensions.

Comment on peut examiner

Et réciproquement que si la somme d'une équation ne peut être divisée par un binôme composé de la quantité inconnue + ou — quelque autre quantité, cela témoigne que cette autre quantité n'est la valeur d'aucune de ses racines. Comme cette dernière

si quelque quantité donnée est la valeur d'une racine.

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$

peut bien être divisée par $x - 2$, et par $x - 3$, et par $x - 4$, et par $x - 5$, mais non point par x + ou — aucune autre quantité; ce qui montre qu'elle ne peut avoir que les quatre racines 2, 3, 4 et 5.

[...]

[...]

Or par cette façon de changer la valeur des racines sans les connoître on peut faire deux choses qui auront ci-après quelque usage. La première est qu'on peut toujours ôter le second terme de l'équation qu'on examine, à savoir en diminuant les vraies racines de la quantité connue de ce second terme divisée par le nombre des dimensions du premier, si l'un de ces deux termes étant marqué du signe +, l'autre est marqué du signe —; ou bien en l'augmentant de la même quantité, s'ils ont tous deux le signe + ou tous deux le signe —. Comme pour ôter le second terme de la dernière équation qui est

Comment on peut ôter le second terme d'une équation.

$$y^4 + 16y^3 + 71y^2 - 4y - 420 = 0,$$

ayant divisé 16 par 4, à cause des quatre dimensions du terme y^4, il vient derechef 4; c'est pourquoi je fais $z - 4 = y$, et j'écris

$$\begin{array}{rrrrr}
z^4 - 16z^3 & + \ 96z^2 & - 256z & + \ 256 & \\
+ 16z^3 & - 192z^2 & + 768z & - 1024 & \\
 & + \ 71z^2 & - 568z & + 1136 & \\
 & & - \ 4z & + \ 16 & \\
 & & & - \ 420 & \\
\hline
z^4 \qquad & - \ 25z^2 & - \ 60z & - \ 36 & = 0
\end{array}$$

où la vraie racine qui étoit 2 est 6, à cause qu'elle est augmentée de 4; et les fausses, qui étoient 5, 6 et 7, ne sont plus que 1, 2 et 3, à cause qu'elles sont diminuées chacune de 4.

Tout de même si on veut ôter le second terme de

$$x^4 - 2ax^3 + (2a^2 - c^2)\,x^2 - 2a^3x + a^4 = 0,$$

pourceque divisant $2a$ par 4 il vient $\frac{1}{2}a$, il faut faire $z + \frac{1}{2}a = x$, et écrire

$$\begin{array}{rrrrr}
z^4 + 2az^3 & + \frac{3}{2}a^2z^2 & + \frac{1}{2}a^3z & + \frac{1}{16}a^4 & \\
- 2az^3 & - 3a^2z^2 & - \frac{3}{2}a^3z & - \frac{1}{4}a^4 & \\
 & + 2a^2z^2 & + 2a^3z & + \frac{1}{2}a^4 & \\
 & - c^2z^2 & - ac^2z & - \frac{1}{4}a^2c^2 & \\
 & & - 2a^3z & - a^4 & \\
 & & & + a^4 & \\
\hline
\end{array}$$

$$z^4 + \left(\frac{1}{2}a^2 - c^2\right)z^2 - (a^3 + ac^2)\,z + \frac{5}{16}a^4 - \frac{1}{4}a^2c^2 = 0$$

et si on trouve après la valeur de z, en lui ajoutant $\frac{1}{2}a$ on aura celle de x.

[. . .]

[...]

Que les racines tant vraies que fausses peuvent être réelles ou imaginaires.

Au reste, tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement imaginaires, c'est-à-dire qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation, mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui corresponde à celles qu'on imagine; comme encore qu'on en puisse imaginer trois en celle-ci,

$$x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0,$$

il n'y en a toutefois qu'une réelle qui est 2, et pour les deux autres, quoiqu'on les augmente ou diminue, ou multiplie en la façon que je viens d'expliquer, on ne sauroit les rendre autres qu'imaginaires.

La réduction des équations cubiques, lorsque le problème est plan.

Or quand, pour trouver la construction de quelque problème, on vient à une équation en laquelle la quantité inconnue a trois dimensions, premièrement, si les quantités connues qui y sont contiennent quelques nombres rompus, il les faut réduire à d'autres entiers par la multiplication tantôt expliquée; et s'ils en contiennent de sourds, il faut aussi les réduire à d'autres rationnaux autant qu'il sera possible, tant par cette même multiplication que par divers autres moyens qui sont assez faciles à trouver. Puis examinant par ordre toutes les quantités qui peuvent diviser sans fraction le dernier terme, il faut voir si quelqu'une d'elles, jointe avec la quantité inconnue par le signe + ou —, peut composer un binôme qui divise toute la somme; et si cela est, le problème est plan, c'est-à-dire il peut être construit avec la règle et le compas; car, ou bien la quantité connue de ce binôme est la racine cherchée, ou bien l'équation étant divisée par lui se réduit à deux dimensions, en sorte qu'on en peut trouver après la racine par ce qui a été dit au premier livre.

Par exemple, si on a

$$y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0,$$

le dernier terme qui est 64 peut être divisé sans fraction par 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64; c'est pourquoi il faut examiner par ordre si cette équation ne peut point être divisée par quelqu'un des binômes $y^2 - 1$ ou $y^2 + 1$, $y^2 - 2$ ou $y^2 + 2$, $y^2 - 4$, etc.; et on trouve qu'elle peut l'être par $y^2 - 16$ en cette sorte :

$$\begin{array}{cccc}
+ y^6 & - \ 8y^4 & - 124y^2 & - 64 = 0 \\
- y^6 & - \ 8y^4 & - \ \ 4y^2 & \overline{-16} \\
\hline
0 & - 16y^4 & - 128y^2 & \\
 & \overline{-16} & \overline{-16} & \\
\hline
+ & y^4 + & 8y^2 + & 4 = 0.
\end{array}$$

La façon de diviser une équation par un binôme qui contient sa racine.

Je commence par le dernier terme, et divise -64 par -16, ce qui fait $+4$ que j'écris dans le quotient; puis je multiplie $+4$ par $+y^2$, ce qui fait $+4y^2$; c'est pourquoi j'écris $-4y^2$ en la somme qu'il faut diviser, car il y faut toujours écrire le signe + ou — tout contraire à celui que produit la multiplication; et joignant $-124y^2$ avec $-4y^2$, j'ai $-128y^2$ que je divise derechef par -16, et j'ai $+8y^2$ pour mettre dans le quotient; et en le multipliant par y^2, j'ai $-8y^4$ pour joindre avec le terme qu'il faut diviser, qui est aussi $-8y^4$; et ces deux ensemble font $-16y^4$ que je divise par -16, ce qui fait $+y^4$ pour le quotient et $-y^6$ pour joindre avec $+y^6$, ce qui fait 0 et montre que la division est achevée. Mais s'il étoit resté quelque quantité, ou bien qu'on n'eût pu diviser sans fraction quelqu'un des termes précédents, on eût par là reconnu qu'elle ne pouvoit être faite.

Tout de même si on a

$$\left.\begin{matrix} y^6 + a^2 \\ -2c^2 \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} -a^4 \\ +c^4 \end{matrix}\right\} y^2 \left.\begin{matrix} -a^6 \\ -2a^4c^2 \\ -a^2c^4 \end{matrix}\right\} = 0,$$

le dernier terme se peut diviser sans fraction par a, a^2, $a^2 + c^2$, $a^3 + ac^2$, et semblables; mais il n'y en a que deux qu'on ait besoin de considérer, à savoir a^2 et $a^2 + c^2$, car les autres, donnant plus ou moins de dimensions dans le quotient qu'il n'y en a en la quantité connue du pénultième terme, empêcheroient que la division ne s'y pût faire. Et notez que je ne compte ici les dimensions de y^6 que pour trois, à cause qu'il n'y a point de y^5, ni de y^3, ni de y en toute la somme. Or en examinant le binôme $y^2 - a^2 - c^2 = 0$, on trouve que la division se peut faire par lui en cette sorte :

$$\begin{array}{lllll}
+y^6 & \left.\begin{matrix}+\ a^2\\-2c^2\end{matrix}\right\} y^4 & \left.\begin{matrix}-a^4\\+c^4\end{matrix}\right\} y^2 & \left.\begin{matrix}-\ a^6\\-2a^4c^2\\-\ a^2c^4\end{matrix}\right\} = 0 & \\
-y^6 & & & & \\
\hline
0 & \left.\begin{matrix}-2a^2\\+\ c^2\end{matrix}\right\} y^4 & \left.\begin{matrix}-a^4\\-a^2c^2\end{matrix}\right\} y^2 & \overline{-\ a^2 - c^2} & \\
\hline
 & -a^2 - c^2 & -a^2 - c^2 & & \\
\hline
+y^4 & & \left.\begin{matrix}+2a^2\\-\ c^2\end{matrix}\right\} y^2 & \left.\begin{matrix}+a^4\\+a^2c^2\end{matrix}\right\} = 0, &
\end{array}$$

ce qui montre que la racine cherchée est $a^2 + c^2$, et la preuve en est aisée à faire par la multiplication.

Mais lorsqu'on ne trouve aucun binôme qui puisse ainsi diviser toute la somme de l'équation proposée, il est certain que le problème qui en dépend est solide; et ce n'est pas une moindre faute après cela de tâcher à le construire sans y employer que des cercles et des lignes droites, que ce seroit d'employer des sections coniques à construire ceux auxquels on n'a besoin que de cercles: car enfin tout ce qui témoigne quelque ignorance s'appelle faute.

Quels problèmes sont solides lorsque l'équation est cubique.

Que si on a une équation dont la quantité inconnue ait quatre dimensions, il faut en même façon, après en avoir ôté les nombres sourds et rompus, s'il y en a, voir si on pourra trouver quelque binôme qui divise toute la somme en le composant de l'une des quantités qui divisent sans fraction le dernier terme. Et si on en trouve un, ou bien la quantité connue de ce binôme est la racine cherchée, ou du moins, après cette division, il ne reste en l'équation que trois dimensions, ensuite de quoi il faut derechef l'examiner en la même sorte. Mais lorsqu'il ne se trouve point de tel binôme, il faut, en

La réduction des équations qui ont quatre dimensions, lorsque le problème est plan. Et quels sont ceux qui sont solides.

augmentant ou diminuant la valeur de la racine, ôter le second terme de la somme en la façon tantôt expliquée, et après la réduire à une autre qui ne contienne que trois dimensions; ce qui se fait en cette sorte: au lieu de

$$+ x^4 \ldots px^2 \ldots qx \ldots r = 0,$$

il faut écrire

$$+ y^6 \ldots 2py^4 + (p^2 \ldots 4r)\, y^2 - q^2 = 0.$$

Et pour les signes + ou — que j'ai omis, s'il y a eu $+p$ en la précédente équation, il faut mettre en celle-ci $+2p$, ou s'il y a eu $-p$, il faut mettre $-2p$; et au contraire s'il y a eu $+r$, il faut mettre $-4r$, ou s'il y a eu $-r$, il faut mettre $+4r$; et soit qu'il y ait eu $+q$ ou $-q$, il faut toujours mettre $-q^2$ et $+p^2$, au moins si on suppose que x^4 et y^6 sont marqués du signe +, car ce seroit tout le contraire si on y supposoit le signe —.

Par exemple, si on a

$$+ x^4 - 4x^2 - 8x + 35 = 0,$$

il faut écrire en son lieu

$$y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0,$$

car la quantité que j'ai nommée p étant -4, il faut mettre $-8y^4$ pour $2py^4$; et celle que j'ai nommée r étant 35, il faut mettre $(16 - 140)\,y^2$, c'est-à-dire $-124y^2$ au lieu de $(p^2 - 4r)y^2$; et enfin q étant 8, il faut mettre -64 pour $-q^2$.

Tout de même, au lieu de

$$+ x^4 - 17x^2 - 20x - 6 = 0,$$

il faut écrire

$$+ y^6 - 34y^4 + 313y^2 - 400 = 0;$$

car 34 est double de 17, et 313 en est le carré joint au quadruple de 6, et 400 est le carré de 20.

Tout de même aussi au lieu de

$$+ z^4 + \left(\frac{1}{2}a^2 - c^2\right) z^2 - (a^3 + ac^2)\, z - \frac{5}{16}a^4 - \frac{1}{4}a^2c^2 = 0,$$

il faut écrire

$$y^6 + (a^2 - 2c^2)\, y^4 + (c^4 - a^4)\, y^2 - a^6 - 2a^4c^2 - a^2c^4 = 0;$$

car p est $\frac{1}{2}a^2 - c^2$, et p^2 est $\frac{1}{4}a^4 - a^2c^2 + c^4$, et $4r$ est $-\frac{5}{4}a^4 + a^2c^2$, et enfin $-q^2$ est $-a^6 - 2a^4c^2 - a^2c^4$.

Après que l'équation est ainsi réduite à trois dimensions, il faut chercher la valeur de y^2 par la méthode déjà expliquée; et si elle ne peut être trouvée, on n'a point besoin de passer outre, car il suit de là infailliblement que le problème est solide. Mais si on la trouve, on peut diviser par son moyen la précédente équation en deux autres, en chacune desquelles la quantité inconnue n'aura que deux dimensions et dont les racines seront les mêmes que les siennes; à savoir, au lieu de

$$+ x^4 \ldots px^2 \ldots qx \ldots r = 0,$$

il faut écrire ces deux autres

$$+ x^2 - yx + \frac{1}{2}y^2 \ldots \frac{1}{2}p \ldots \frac{q}{2y} = 0,$$

et

$$+ x^2 + yx + \frac{1}{2}y^2 \ldots \frac{1}{2}p \ldots \frac{q}{2y} = 0.$$

Et pour les signes + et — que j'ai omis, s'il y a $+p$ en l'équation précédente, il faut mettre $+\frac{1}{2}p$ en chacune de celles-ci, et $-\frac{1}{2}p$ s'il y a en l'autre $-p$; mais il faut mettre $+\frac{q}{2y}$ en celle où il y a $-yx$, et $-\frac{q}{2y}$ en celle où il y a $+yx$, lorsqu'il y a $+q$ en la première; et au contraire, s'il y a $-q$, il faut mettre $-\frac{q}{2y}$ en celle où il y a $-yx$, et $+\frac{q}{2y}$ en celle où il y a $+yx$. Ensuite de quoi il est aisé de connoître toutes les racines de l'équation proposée, et par conséquent de construire le problème dont elle contient la solution, sans y employer que des cercles et des lignes droites.

Par exemple, à cause que faisant

$$y^6 - 34y^4 + 313y^2 - 400 = 0$$

pour

$$x^4 - 17x^2 - 20x - 6 = 0,$$

on trouve que y^2 est 16, on doit, au lieu de cette équation

$$+ x^4 - 17x^2 - 20x - 6 = 0,$$

écrire ces deux autres

$$+ x^2 - 4x - 3 = 0,$$

et

$$+ x^2 + 4x + 2 = 0,$$

car y est 4, $\frac{1}{2}y^2$ est 8, p est 17, et q est 20, de façon que

$$+ \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} \text{ fait } - 3, \text{ et } + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} \text{ fait } + 2.$$

Et tirant les racines de ces deux équations, on trouve toutes les mêmes que si on les tiroit de celle où est x^4, à savoir, on en trouve une vraie qui est $\sqrt{7} + 2$, et trois fausses qui sont

$$\sqrt{7} - 2, \quad 2 + \sqrt{2}, \quad \text{et} \quad 2 - \sqrt{2}.$$

Ainsi ayant

$$x^4 - 4x^2 - 8x + 35 = 0,$$

pourceque la racine de

$$y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0$$

est derechef 16, il faut écrire

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

et

$$x^2 + 4x + 7 = 0.$$

Car ici

$$+ \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} \text{ fait } 5, \text{ et } + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} \text{ fait } 7.$$

Et pourcequ'on ne trouve aucune racine, ni vraie ni fausse, en ces deux dernières équations, on connoît de là que les quatre de l'équation dont elles procèdent sont imaginaires, et que le problème pour lequel on l'a trouvée est plan de sa nature, mais qu'il ne sauroit en aucune façon être construit, à cause que les quantités données ne peuvent se joindre.

[...]