CCCXXV.

DESCARTES A ELISABETH.

[Egmond du Hoef, novembre 1643.]

Texte de Clerselier, tome III, lettre 80, p. 461-465.

« A M. la Princesse Elizabeth, etc. Touchant le Probleme : trois cercles estant donnez, trouuer le quatriéme qui touche les trois », dit Clerselier, sans donner de date. Mais la réponse d'Elisabeth est datée du 21 novembre, lettre CCCXXVII ci-après; d'autre part, nous savons, par une lettre du 21 octobre, la CCCXXe ci-avant (p. 26, l. 24), qu'à cette date la princesse avait le problème en mains. La

présente a donc été écrite dans l'intervalle de ces deux dates, et il est plausible de la rapprocher plutôt du 21 novembre.

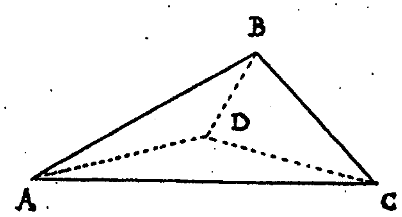
Madame,

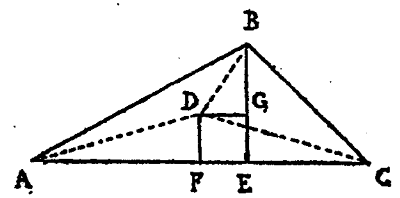
Ayant ſceu de Monſieur de Pollot que Voſtre Alteſſe a pris la peine de chercher la queſtion des trois cercles, & qu'elle a trouué le moyen de la ſoudre, en ne ſuppoſant qu'vne quantité inconnuë, i'ay penſé que mon deuoir m'obligeoit de mettre icy la raiſon pourquoy i'en auois propoſé pluſieurs, & de quelle façon ie les demeſle.

I'obſerue touſiours, en cherchant vne queſtion de Geometrie, que les lignes, dont ie me ſers pour la trouuer, ſoient paralleles, ou s'entrecouppent à angles droits, le plus qu'il eſt poſſible; & ie ne conſidere point d'autres Theoremes, ſinon que les coſtez des triangles ſemblables ont ſemblable proportion entr'eux, & que, dans les triangles rectangles, le quarré de la baſe eſt égal aux deux quarrez des coſtez. Et ie ne crains point de ſuppoſer pluſieurs quantitez inconnuës, pour reduire la queſtion à tels termes, qu'elle ne depende que de ces deux Theoremes; au contraire, i'aime mieux en ſuppoſer plus que moins. Car, par ce moyen, ie voy plus clairement tout ce que ie fais, & en les demeſlant ie trouue mieux les plus courts chemins, & m'exempte de multiplications ſuperfluës; au lieu que, ſi l'on tire d'autres lignes, & qu'on ſe ſerue d'autres Theoremes, bien qu'il puiſſe arriuer, par hazard, que le chemin qu'on trouuera ſoit plus court que le mien, toutesfois il arriue quaſi touſiours le contraire. Et on ne voit point ſi bien ce qu'on fait, ſi

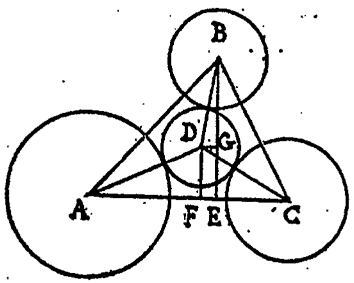
ce n'eſt qu'on ait la demonſtration du Theoreme dont on ſe ſert fort preſente en l'eſprit; & en ce cas on trouue, quaſi touſiours, qu'il depend de la conſideration de quelques triangles, qui ſont ou rectangles, ou ſemblables entr'eux, & ainſi on retombe dans le chemin que ie tiens.

Par exemple, ſi on veut chercher cette queſtion des trois cercles, par l'aide d'vn Theoreme qui enſeigne à trouuer l'aire d'vn triangle par ſes trois coſtez, on n'a beſoin de ſuppoſer qu'vne quantité inconnuë. Car ſi A, B, C ſont les centres des trois cercles donnez, & D le centre du cherché, les trois coſtez du triangle A B C ſont donnez, & les trois lignes A D, B D, C D ſont compoſées des trois rayons des cercles donnez, ioints au rayon du cercle cherché, ſi bien que, ſuppoſant x pour ce rayon, on a tous les coſtez des triangles A B D, A C D, B C D; & par conſequent on peut auoir leurs aires, qui, iointes enſemble, ſont égales à l'aire du triangle donné A B C; & on peut, par cette équation, venir à la connoiſſance du rayon x, qui ſeul eſt requis pour la ſolution de la queſtion. Mais ce chemin me ſemble conduire à tant de multiplications ſuperfluës, que ie ne voudrois pas entreprendre de les demeſler en trois mois. C'eſt pourquoy, au lieu des deux lignes obliques A B & B C, ie mene les trois perpendiculaires B E,





DG, DF, & posant trois quantitez inconnuës, l'vne pour DF, l'autre pour DG, & l'autre pour le rayon du cercle cherché, i'ay tous les costez des trois triangles rectangles ADF, BDG, CDF, qui me donnent trois équations, pour ce qu'en chacun d'eux le quarré de la base est égal aux deux quarrez des costez.



Apres auoir ainsi fait autant d'équations que i'ay supposé de quantitez inconnuës, ie considere si, par chaque équation, i'en puis trouuer vne en termes assez simples; & si ie ne le puis, ie tasche d'en venir à bout, en ioignant deux ou plusieurs équations par l'addition ou soustraction; & enfin, lors que cela ne suffit pas, i'examine seulement s'il ne fera point mieux de changer les termes en quelque façon. Car, en faisant cét examen auec addresse, on rencontre aisément les plus courts chemins, & on en peut essayer vne infinité en fort peu de temps.

Ainsi, en cét exemple, ie suppose que les trois bases des triangles rectangles font[a]

$$AD \infty a + x,$$
$$BD \infty b + x,$$
$$CD \infty c + x,$$

et, faisant $AE \infty d$, $BE \infty e$, $CE \infty f$,

$$DF \text{ ou } GE \infty y, \quad DG \text{ ou } FE \infty z,$$

a. Clerselier emploie, comme signe d'égalité, les deux barres verticales, ||, au lieu du signe ∞, usité par Descartes.

i'ay pour les costez des mesmes triangles :

$$AF \infty d - z \ \& \ FD \infty y,$$
$$BG \infty e - y \ \& \ DG \infty z,$$
$$CF \infty f + z \ \& \ FD \infty y.$$

Puis, faisant le quarré de chacune de ces bases égal au quarré des deux costez, i'ay les trois équations suiuantes :

$$aa + 2ax + xx \infty dd - 2dz + zz + yy,$$
$$bb + 2bx + xx \infty ee - 2ey + yy + zz,$$
$$cc + 2cx + xx \infty ff + 2fz + zz + yy,$$

& ie voy que, par l'vne d'elles toute seule, ie ne puis trouuer aucune des quantitez inconnuës, sans en tirer la racine quarrée, ce qui embarrasseroit trop la question. C'est pourquoy ie viens au second moyen, qui est de ioindre deux équations ensemble, & i'apperçois incontinent que, les termes xx, yy & zz estant semblables en toutes trois, si i'en oste vne d'vne autre, laquelle ie voudray, ils s'effaceront, & ainsi ie n'auray plus de termes inconnus que x, y & z tous simples. Ie voy aussi que, si i'oste la seconde de la premiere ou de la troisiéme, i'auray tous ces trois termes x, y & z; mais que, si i'oste la premiere de la troisiéme, ie n'auray que x & z. Ie choisis donc ce dernier chemin, & ie trouue

$$cc + 2cx - aa - 2ax \infty ff + 2fz - dd + 2dz,$$

ou bien $$z \infty \frac{cc - aa + dd - ff + 2cx - 2ax}{2d + 2f},$$

ou bien $$\tfrac{1}{2}d - \tfrac{1}{2}f + \frac{cc - aa + 2cx - 2ax}{2d + 2f}.$$

Puis, oſtant la ſeconde équation de la premiere ou de la troiſiéme (car l'vn reuient à l'autre), & au lieu de z mettant les termes que ie viens de trouuer, i'ay par la premiere & la ſeconde :

$$aa + 2ax - bb - 2bx \propto dd - 2dz - ee + 2ey,$$

ou bien $2ey \propto ee + aa + 2ax - bb - 2bx - dd + dd - df + \frac{ccd - aad + 2cdx - 2adx}{d+f}$

ou bien $y \propto \frac{1}{2}e - \frac{bb}{2e} - \frac{bx}{e} - \frac{df}{2e} + \frac{ccd + aaf + 2cdx + \cancel{2}afx}{2ed + 2ef}$.

Enfin, retournant à l'vne des trois premieres équations, & au lieu d'y ou de z mettant les quantitez qui leur ſont égales, & les quarrez de ces quantitez pour yy & zz, on trouue vne équation où il n'y a que x & xx inconnus ; de façon que le Probleme eſt plan, & il n'eſt plus beſoin de paſſer outre. Car le reſte ne ſert point pour cultiuer ou recréer l'eſprit, mais ſeulement pour exercer la patience de quelque calculateur laborieux. Meſme i'ay peur de m'eſtre rendu icy ennuyeux à Voſtre Alteſſe, pour ce que ie me ſuis arreſté à écrire des choſes qu'elle ſçauoit ſans doute mieux que moy, & qui ſont faciles, mais qui ſont neantmoins les | clefs de mon Algebre. Ie la ſupplie tres humblement de croire que c'eſt la deuotion que i'ay à l'honorer, qui m'y a porté, & que ie ſuis,

Madame,

De V. A.

Le tres-humble & tres-obeïſſant
ſeruiteur, DESCARTES.